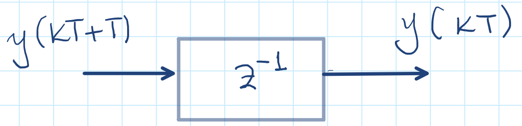
ΑΜΙΓΟΣ ΨΗΦΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΞΟΜΟΙΩΣΗΣ – ΠΡΟΤΥΠΟ Κ.Ε. (Εξ. διαφορών)

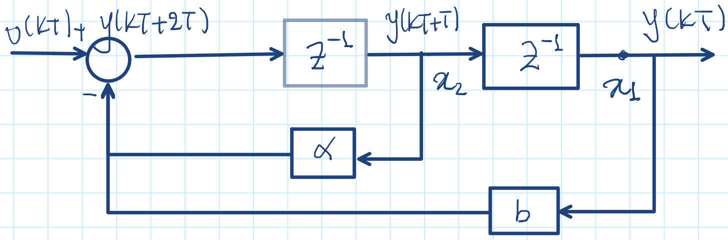


∘ $y(kT+nT) \equiv$ μετρήσιμο

Π.χ.

$$y(kT+2T) + \alpha y(kT+T) + b y(kT) = u(kT)$$

$$y(kT+2T) = u(kT) - \alpha y(kT+T) - b y(kT)$$



Κανόνας: Έξοδοι καθυστερητών $\equiv$ μεταβλ. κατάστασης

$y(kT) = x_1(kT)$

$\Rightarrow x_1(kT+T) = x_2(kT)$

$x_2(kT+T) = u(kT) - \alpha x_2(kT) - b x_1(kT)$

$$\begin{bmatrix} x_1(kT+T) \\ x_2(kT+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(kT)$$

$$y(kT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

– Πως προκύπτει το Π.Κ.Ε. από την Σ.Μ. (παραμενική)

$Y(z) = H(z)\, U(z)$, $H(z)$: διακεκριμένες ρίζες $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\}$

$$H(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{z-\lambda_i}$$

$\Rightarrow Y(z) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{c_i}{z-\lambda_i} U(z) =$: αν ορίσω : $\boxed{X_i(z) \triangleq \dfrac{U(z)}{z-\lambda_i}}$ (μεταβλ. κατάστ.)

$Y(z) = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i(z) \overset{Mz^{-1}}{\Rightarrow} y(kT) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \underline{x_i(kT)}$

$$\boxed{x_i[(k+1)T] = \lambda_i\, x_i(kT) + u(kT)}$$

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \\ \vdots \\ x_n[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ \vdots \\ x_i(kT) \\ x_n(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(kT)$$

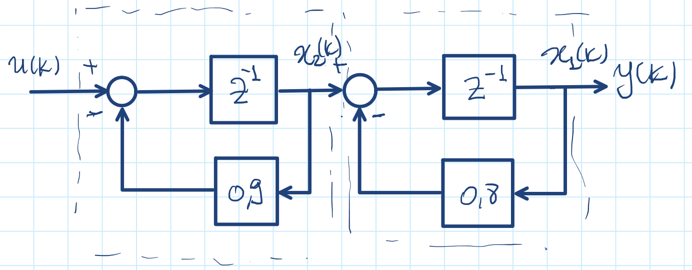
$$y(kT) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ \vdots \\ x_n(kT) \end{bmatrix}$$

$$y(k) = [\;\cdots\;] \begin{bmatrix} \vdots \\ x_n(kT) \end{bmatrix}$$

Άλλες Μέθοδοι εύρεσης Καταστ. Προτύπου

Εφαρμογή: $y(k+2) = u(k) + 1{,}7\,y(k+1) - 0{,}72\,y(k)$

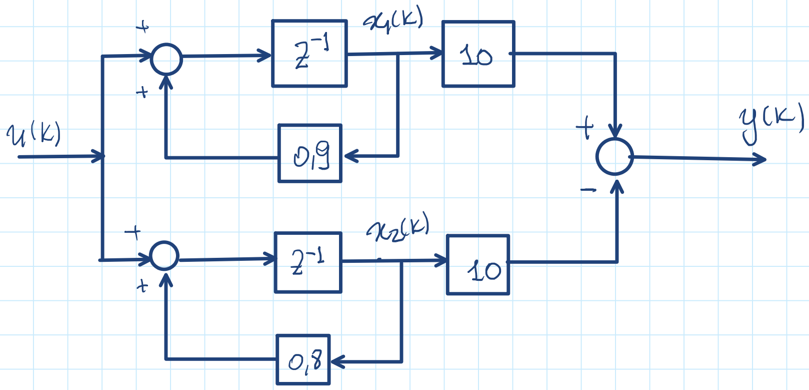
$$\xrightarrow{MZ} \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^2 - 1{,}7z + 0{,}72} = \left[\frac{1}{z-0{,}9}\right]\left[\frac{1}{z-0{,}8}\right] \qquad (\text{Εν Σειρά})$$



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 1 \\ 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [\,1 \quad 0\,]\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

Άλλως: $\dfrac{Y(z)}{U(z)} = \left[\dfrac{10}{z-0{,}9}\right] + \left[\dfrac{-10}{z-0{,}8}\right]$ (απλά κλάσματα) (Παράλληλα)



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [\,10 \quad -10\,]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Ισοδύναμα πρότυπα → μετασχ. ομοιότητας

ή Σ.Μ. ⟺ ελέγξιμο + παρατηρήσιμο μέρος του συστήματος

Για Γ.Χ.Α. : Π.Κ.Ε:

$$\begin{cases} x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) = C\,x(k) + D\,u(k) \end{cases} \qquad x(0) = x_0$$

- Αναδρομική Λύση:

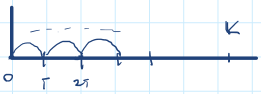
$k=0$: $x(1) = A\,x(0) + B\,u(0)$

$k=1$: $x(2) = A\,x(1) + B\,u(1) = A^2 x(0) + AB\,u(0) + B\,u(1)$

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{(k-1-i)} B\,u(i) \quad \rightsquigarrow \text{Λύση γενική}$$

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=1} A^{(k-1-i)} B u(i)$$ ~ Λύση γενική

$$\boxed{\Phi(kT) = \Phi(k) = A^k}$$



$$x(kT) = \underbrace{\Phi(k)x(0)}_{\text{λύση ομογ. μηδ. διέγερσης}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \Phi(k-1-i) B u(i)}_{\text{μερική λύση μηδ. κατάστασης}}$$

$$y(kT) = C\Phi(k)x(0) + C\sum \dots$$

Επίλυση με Μ.Ζ.:

$$Z\{x((k+1)T)\} = A\,Z\{x(kT)\} + B\,Z\{u(kT)\}$$

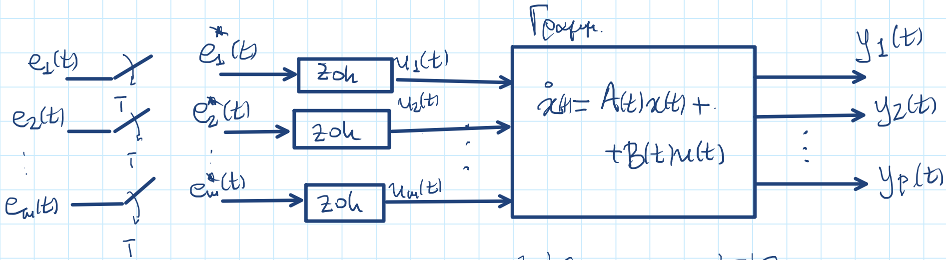
$$zX(z) - zx(0) = AX(z) + BU(z) \Rightarrow \dots \quad X(z) = z(z\mathbb{I}-A)^{-1}x(0) + (z\mathbb{I}-A)^{-1}BU(z)$$

$$\Rightarrow X_{\text{μηδ.διεγ.}} = z(z\mathbb{I}-A)^{-1}x(0) \equiv \Phi(z)\,x(0)$$

$$X_{\text{μηδ.κατ.}} = (z\mathbb{I}-A)^{-1}BU(z)$$

Π.Κ.Ε. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΠΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Διακριτοποίηση (Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα)



m είσοδοι - p έξοδοι
n καταστάσεις

$u_i(t) \equiv u_i(kT) = e_i(kT)$, $kT \le t < (k+1)T$

$k = 0, 1, \dots$, $i = 1, \dots, m$

Η κατάσταση $x(t)$: $x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(kT)\,d\tau$

$$\boxed{x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + u(kT)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)\,d\tau}$$

Θέτω : $t_0 = kT$, $t = (k+1)T$

Θέτω : $t_0 = kT$, $t = (k+1)T$

$$\Rightarrow \boxed{x[(k+1)T] = \Phi[(k+1)T, kT]\, x(kT) + u(kT)\, \Theta[(k+1)T, kT]}$$

$$\Theta[(k+1)T, kT] = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T, kT]\, B(\tau)\, d\tau$$

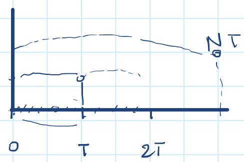
$$T = 1sec : \boxed{\begin{cases} x(k+1) = \Phi(k+1, k)\, x(k) + \Theta(k+1, k)\, u(k) \\ y(k) = C(k)\, x(k) + D(k)\, u(k) \end{cases}}$$

(Αμιγώς ψηφιακών συστ. : $x(k+1) = A(k)\, x(k) + B(k)\, u(k)$
$y(k) = C(k)\, x(k) + D(k)\, u(k)$)

Συστήματα Γ.Χ.Α.:

$$x[(k+1)T] = \underline{\Phi(T)}\, x(kT) + \underline{\Theta(T)}\, u(kT)$$

$$y(kT) = C\, x(kT) + D\, u(kT)$$



$$\Phi(T) = \Phi((k+1)T - kT) = \Phi(T)$$

$$\Phi(T) = e^{AT} = \mathbb{I} + AT + \frac{A^2T^2}{2!} + \dots$$

$$\Phi(T) = \Phi(t)\Big|_{t=T} = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbb{I} - A)^{-1}\} \Rightarrow e^{At}\Big|_{t=T} = e^{AT}$$

$$\Theta(T) = \int_0^T \Phi(T-\tau)\, B\, d\tau \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \Theta(T) &= \int_0^T e^{A(t-\tau)} B\, d\tau \\ \Phi(T) &= e^{AT} \end{aligned}}$$

Λύση: $x(NT) = \underbrace{\Phi(NT)}\, x(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \Phi[(N-k-1)T]\, \Theta(T)\, u(kT)$

$\downarrow$

μεταβατικός πίνακας : $t=0 \longrightarrow t = NT$

$$\Phi(NT) = \underbrace{\Phi(T) \cdots \Phi(T)}_{N \text{ φορές}} = \Phi^N(T) \neq \Phi(t)\Big|_{t=NT}$$

$$x(N) = \underset{\sim}{A^N}\, x(0) + \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} B\, u(k)$$

Μ.Ζ. : Λύση Γ.Χ.Α.

Μ.Ζ. : Λύση Γ.Χ.Α.

$$x(k+1) = \Phi(T)x(k) + \Theta(T)u(k)$$

$$\overset{MZ}{\Rightarrow} \quad zX(z) - z\,x(0) = \Phi(T)X(z) + \Theta(T)U(z)$$

$$\Rightarrow \dots \quad X(z) = [z\mathbb{1} - \Phi(T)]^{-1} z\,x(0) + [z\mathbb{1} - \Phi(T)]^{-1}\Theta(T)U(z)$$

$$\sim \Phi(z) \triangleq [z\mathbb{1} - \Phi(T)]^{-1} z$$

Σ.Μ. κ Π.Κ.Ε:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C[z\mathbb{1} - \Phi(T)]^{-1}\Theta(T) + D$$

$$= C(z\mathbb{1} - A)^{-1}B + D$$

ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

άν $\quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad$ (~ συσ. δειγματοληπτικών δεδομένων)

$$u(t) = u(kT) \qquad kT \leq t < (k+1)T$$

Π.Κ.Ε.: $\quad x[(k+1)T] = \Phi(T)x(kT) + \Theta(T)u(kT)$

ο πίνακας μετάβασης : $\quad \Phi(NT) = \underbrace{\Phi(T)\cdot\Phi(T)\cdots\Phi(T)}_{N \text{ φορές}}$

όπου $\quad \Phi(T) = e^{AT} = \phi(t)\big|_{t=T}$

- αμιγώς ψηφιακά συστήματα : $\quad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

$$\Phi(N) = A\cdot A\cdots A = A^N$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

1. $\quad \Phi(NT) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{[z\mathbb{1} - \Phi(T)]^{-1}z\right\}$

$$A^N = \Phi(N) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{[z\mathbb{1} - A]^{-1}z\right\}$$

2. Θ. Cayley–Hamilton $\quad\sim$
3. Θ. Sylvester

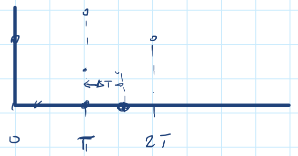
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ (Αποκρ. ανάμεσα στιγμές δειγματοληψίας)

- Απόκριση μεταξύ στιγμών δειγματοληψίας

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)Bu(\tau)\,d\tau \,,$$

επειδή $u(t) = u(kT)$, $t_0 \le \tau < t$

$\Rightarrow x(t) = \Phi(t-t_0)\,x(t_0) + \Theta(t-t_0)\,u(kT)$



$t = kT + \Delta T = (k+\Delta)T$, $k = 0, 1, 2 \dots$

$0 \le \Delta \le 1$

$x(kT+\Delta T) = \Phi(\Delta T)\,x(kT) + \Theta(\Delta T)\,u(kT)$, $t_0 = kT$

Π.χ. $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-T-e^{-T} & 1-e^{-T} \\ -1+e^{-T} & e^{-T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T-1+e^{-T} \\ 1-e^{-T} \end{pmatrix} u(kT)$

$x[(k+1)T] = \Phi(T)\,x(kT) + \Theta(T)\,u(kT)$

Αν $T = 1sec$: $\Rightarrow \Phi(T) \equiv \Phi(1) = \begin{bmatrix} 0{,}632 & 0{,}632 \\ -0{,}632 & 0{,}368 \end{bmatrix}$

$\Theta(1) = \begin{bmatrix} 0{,}368 \\ 0{,}632 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1(kT+\Delta T) \\ x_2(kT+\Delta T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\Delta T-e^{-\Delta T} & 1-e^{-\Delta T} \\ -1+e^{-\Delta T} & e^{-\Delta T} \end{bmatrix} x(kT) + \begin{bmatrix} \Delta T-1+e^{-\Delta T} \\ 1-e^{-\Delta T} \end{bmatrix} u(kT)$$

$x[(k+1)T] = \Phi(T-\Delta T)\,x[(k+\Delta)T] + \Theta(T-\Delta T)\,u[(k+\Delta)T]$

$\Delta T = \dots$