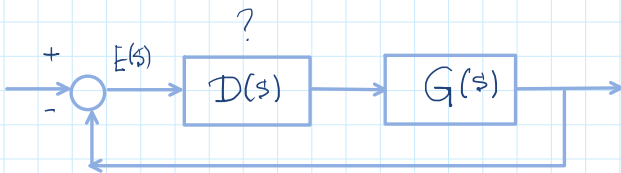


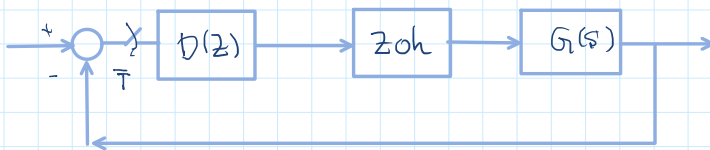
ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΛΕΓΚΤΩΝ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- "Εμπρός" Τεχνικές : σχεδιάζουμε ο ελεγκτής $D(s)$ (π.χ. Laplace)
 Για συνέχεια $D(s) \rightarrow D(z)$ (μετακ. το σύστημα συνεχ. χρόνου $D(s) \rightarrow$ διακριτού χρόνου $D(z)$)
 $\downarrow$
 "μετακ. αναλογικών φίλτρων σε ψηφιακά"
 $\rightarrow$ "σύστημα διακριτού χρόνου σχεδιασμένο με $D(z)$ "
- "Απίστρο" Τεχνικές : σχεδιάζουμε ο ελεγκτής $D(z)$...
 σχεδιάζουμε ο αναλογικός $D(s)$...

ΕΜΜΕΣΗ ΤΕΧΝΙΚΗ



Λόγος : να μετακ. $D(s) \rightarrow D(z)$:



Συστήματα **16800000** :

Βήμα 1 : Ελεγκτής συνεχούς χρόνου στο συνεχ. πεδίο σχεδιασμένο με "Zoh" - "Zoh" $\rightarrow$ καθυστέρηση ($\dots e^{-sT}$)

$$\text{Προέγγραφο : } \frac{1 - e^{-sT}}{s} \approx \frac{T}{1 + \frac{sT}{2} + \frac{s^2 T^2}{3!} + \dots} \approx \frac{T}{1 + \frac{sT}{2}}$$

$\rightarrow$ "Zoh" η καθυστέρηση $\rightarrow$ αμελητέα $\Rightarrow$...

"Zoh" = Γραμμική $\Rightarrow$ πάλι στο συνεχ. πεδίο σχεδιασμένο με $D(s)$ και επανασχεδιασμός $D(s)$

Βήμα 2 : Μετακ. $D(s) \rightarrow D(z)$

Βήμα 3 : Επαλήθευση ικανοτήτων προδιαγραφών ?

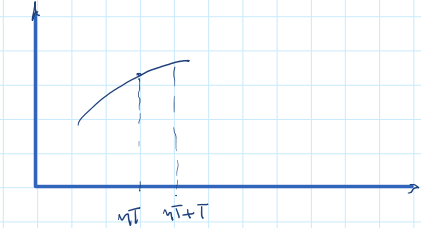
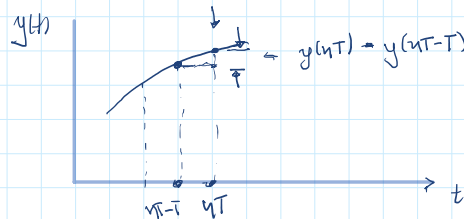
Βήμα 4 : Υλοποίηση του ψηφ. ελεγκτή $D(z) \rightarrow$ ψηφιακό αλγόριθμο

ΔΙΑΚΡΙΤΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ

- τεχνικές : αριθμητικές λύσεις ή διαφορικές-αποκαθροιστικές
- πρόβλημα (αριθμητικά) παραγώγων-αποκαθροισμάτων

□ "Παραγωγή"

~ "Ομοθω Διαφορά" + "Εμπροσθεν Διαφορά"



$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{y(t) - y(t-T)}{T}$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{y(t+T) - y(t)}{T}$$

ML
⇒ $\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{Y(s) - e^{-sT}Y(s) + y(0^+)}{s}$

$y(0) \ll \mu\kappa\epsilon\acute{o}\varsigma \Rightarrow s = \frac{1 - e^{-sT}}{T} \Rightarrow$

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}, \quad z = \frac{1}{1 - sT}$$

$$s = \frac{z - 1}{T}, \quad z = 1 + Ts$$

π.χ., (ομοθω Διαφορά) : $\mathcal{D}(z) = \mathcal{D}(s) \Big|_{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}}$

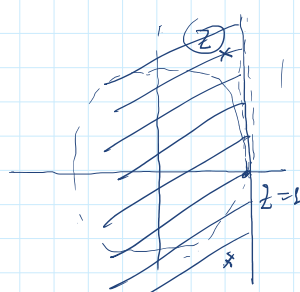
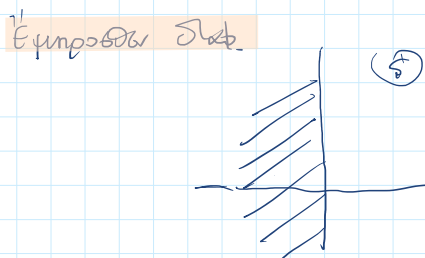
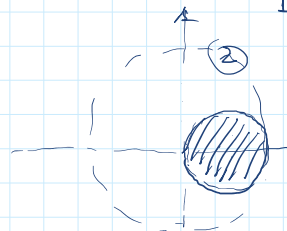
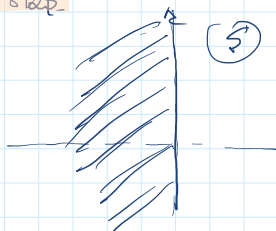
$$\frac{s}{s + \alpha} \rightarrow \dots = \left(\frac{1}{1 + \alpha T} \right) \cdot \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{1 + \alpha T} z^{-1}} \right)$$

Ιδιότητες ως Μετασχηματισμός

□ απλώς πρώτου

□ **Πίσω Διαφορά** $\mathcal{D}(s)$ → μετασχηματίζεται σε **Πίσω Διαφορά** $\mathcal{D}(z)$ (ομοθω Διαφορά)

ομοθω Διαφ. Για $s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$ αν $s = j\omega \Rightarrow z = \frac{1}{1 - j\omega T} = \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{j\theta}$
($\theta = \tan^{-1}(\omega T)$)



Είσοδος $D(s) \rightarrow$ έξοδος $D(z)$

(Έμπροσθεν διαφ.)

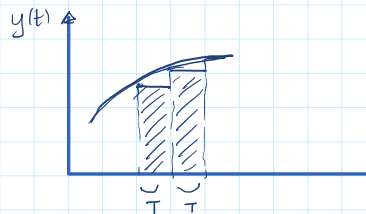
αίσαση $D(s) \rightarrow$ -/- $D(z)$

□ Δεν δαμωών αμεσάβανη των κρστικι ανόκρση, όδτε αν ανόκρση συχότση

$$D(z) \neq \mathcal{Z} \{ D(s) \}$$

- "Ολοκλήρωμα"

Αριθμωότατος κώνος



$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau, \quad t = nT$$

$$y(nT) = \int_0^{nT} x(\tau) d\tau$$

$$y(nT) = T \sum_{i=1}^{n-1} x(iT)$$

$$y(nT+T) = T \sum_{i=1}^n x(iT) = T \sum_{i=1}^{n-1} x(iT) + T x(nT)$$

$$\rightarrow y(nT+T) = y(nT) + T x(nT)$$

$$\boxed{\frac{1}{s} = \frac{T}{z-1}} \quad \text{"Έμπροσθεν διαφ."}$$

"αμεσάβανη διαφ."

Τρσνσφωότατος κώνος

$$y(nT) = T/2 \sum_{i=1}^{n-1} [x(iT) + x(iT+T)]$$

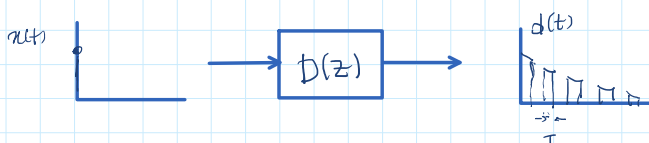
$$\boxed{\frac{1}{s} \approx \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}} \quad \text{συγγνωμικός μετασχηματισμός}$$

□ Δεν δαμωό αν κρστικι ανόκρση, όδτε αν ανόκρση συχότση

Κρστικι Αμεσάβανη (Μετ. Z)



(συνεχώς χρόνος)



(δωρεζω χρόνος)

$$g(nT) \equiv d(nT)$$

$\frac{1}{s} \rightarrow \frac{1}{z-1}$

$$g(nT) \equiv d(n)$$

$$D(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(nT) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT) z^{-n} = G(z) \equiv Z \left\{ G(s) \right\}$$

□ Διατερεί τών κρουστικῶν ἀνέκρουσιν,

□ Δὲν διατερεί τών ἀνέκρουσιν συνεχόμενων

Βασικὴν Απεικονιστικὴν

$$\left(\frac{1}{1-z^{-1}} \right) D(z) = Z \left[\frac{1}{s} G(s) \right] \Big|_{t=kT}$$

$$\Rightarrow D(z) = (1-z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$$

("Σ.Μ. + zoh")

□ Δὲν διατερεί τών κρουστικῶν ἀνέκρουσιν. ὅτι τών ἀνέκρουσιν συνεχόμενων

- Διαφωτιστικὸς Κλάδος μετὰ Απεικονιστικὴν Σχέσην (frequency prewarping)

$$D(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \rightsquigarrow D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

- Δὲν διατερεί τών ἀνέκρουσιν συνεχόμενων

Ερώτημα: Ποιὰ εἶναι ἡ ἀνέκρουσιν τῆς $D(z)$ ἐν σχέσιν μετὰ τών ἀνέκρουσιν συνεχόμενων $D(s)$;

(0 ~ συνεχ. συνεχόμενα χρονία
ω ~ " " διακριτά χρονία)

~ Νὰ συμπληρώσωμε τὴν $D(j\omega)$ μετὰ τὴν $D(e^{j\omega T})$

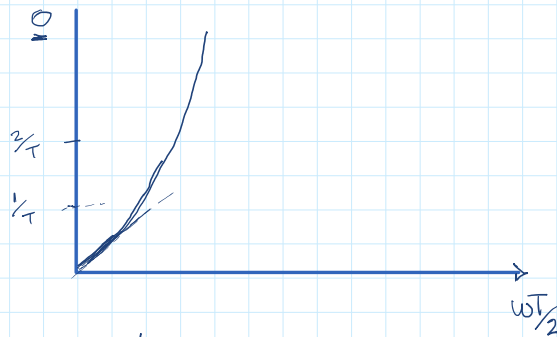
(ἀντικατάσταση : $s = j\omega$
 $z = e^{j\omega T}$)

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow j\omega = \frac{2}{T} \frac{1-e^{-j\omega T}}{1+e^{j\omega T}} \Rightarrow (\text{de Moivre}) \left(\cos \varphi + j \sin \varphi \right)^n = \cos n\varphi + j \sin n\varphi$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$$

□ ὁ διαφορτικὸς κλάδος μεταμορφώνει τὴν ἀνέκρουσιν συνεχόμενων

□ ο άγνωστος πλάτος μετασχηματισμός των απόκριών συχνοτήτων



$$\omega T \ll \mu \text{αρός} \Rightarrow \tan \frac{\omega T}{2} \approx \frac{\omega T}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{0 \approx \omega}$$

$$\omega \text{ου} : |D(s)| \Big|_{s=j\omega} = |D(z)| \Big|_{z=e^{j\omega T}}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 Πλάτος $D(s)/\omega$ Πλάτος $D(z)/\omega$

Άρα, η μεταμόρφωση των συχνοτήτων δεν $\frac{\omega T}{2}$ είναι πρό μυρος, πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψη (των διαφορών τω έλεγχu)

Επιδιορθωτικός Έλεγχος:

- Αναρροφικός Ανταρροφισμός (δίν φίλτρο) $\leadsto$ επιπλέον απόκλιση (και πάλι έλεγχος μεταμόρφωσης συχνοτήτων)
 $\downarrow$
 και πάρει νέες τιμές $\nearrow$

Βήμα 1: $\forall$ πρό/μυρος δ τα : αποκλιση α με $\alpha' = \frac{2}{T} \tan \frac{\alpha T}{2}$

$$s \text{τα} \leadsto s + \alpha' \quad \Big| \quad \alpha' = \frac{2}{T} \tan \frac{\alpha T}{2}$$

Βήμα 2: Μετασχηματίζω $D(s, \alpha')$ $\leadsto D(z, \alpha)$

$$D(z, \alpha) = D(s, \alpha') \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$\approx$ "scaling" συχνοτήτων $\nearrow$

σημειω: "scaling" Πλάτος : για dc κέρος = 1

(Θ. τελικής τιμής)

• χαμηλές συχνοτήτες : $z = 1 \quad \left(\lim_{z \rightarrow 1} () \right)$

• υψηλές " " : $z = -1 \quad \left(\lim_{z \rightarrow -1} () \right)$

$$\left(\begin{array}{l} \text{δίνου: } t \rightarrow +\infty, \omega \rightarrow 0, \Rightarrow z = 1 \\ t \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty \Rightarrow z = -1 \end{array} \right)$$

Παράδειγμα,

$$D(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}$$

Büro 1:

$$D(s, \alpha') = \frac{\alpha}{s + \frac{2}{T} \tan \frac{\alpha T}{2}}$$

Büchse 2:

Arbeitsweise: $\frac{z}{T} \frac{z^{-L}}{1+z^{-L}}$ c

$$D(z) = D(s) \Big|_{s = -} = K \frac{\alpha}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{2}{T} \tan \frac{\alpha T}{2}} = \dots$$

Für K : $\text{Det} D_{SS} = 1$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} D(z) \cdot \frac{1}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ (z-1) \frac{1}{(z-1)} \right\} \cdot \frac{\alpha}{\frac{2}{T} + \dots} = K \frac{\alpha}{\frac{2}{T} \tan \frac{\alpha T}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow K = \frac{\frac{2}{T} \tan \frac{\alpha T}{2}}{\alpha}$$

$$A_{\alpha}, \quad \mathcal{D}(z) = \frac{\tan \frac{\alpha T}{2}}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \tan \frac{\alpha T}{2}}$$

- Εύκολο $D(S) \Rightarrow$ εύκολο $D(Z)$
- όχι αντιστροφή (παραμόρφωση απόκριση συχρότητας)
- Σιωπές των απόκριση συχρότητας στα σημεία αποκρούς
- Δεν σιωπές των κρατικών απόκριση

Ταυτότητα $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$. (matched Z-transform)

"Zerlegung in Pol- und Nullstellen" $D(s) \rightsquigarrow D(z)$

$\left(\begin{array}{l} \xi_1 \rightarrow z_1 = e^{i\pi} ? \\ \text{= drehung um ein } \xi_1 \end{array} \right)$

$$D(z) \neq D(s) \quad \left| \quad s + \alpha = (1 - z^{-1} e^{-\alpha T}) \right.$$

$$\begin{cases} s + \alpha \rightsquigarrow 1 - z^{-1} e^{-\alpha T} \\ s + \alpha \pm j\omega \rightsquigarrow 1 - 2z^{-1} e^{-\alpha T} \cos \omega T + e^{-2\alpha T} z^{-2} \end{cases}$$

Παρατήρηση - Τονομετρώ τους νύκτους όπως ο M, Z ($\equiv$ κρουστική αμεταβλητότητα με z και s)
 τα μωδονικά μετασχηματίζονται σε άγνωστο δόσεις

= κέρδος κλάσμα scaling
 $D(s) =$ μωδονικό παλινδρόμηση

Παράδειγμα: $D(s) = \frac{s}{s + \alpha}$

$$D(z) \approx K' \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1} e^{-\alpha T}} \quad (\text{υψηλο-διαφορικό φίλτρο}) \Rightarrow z = -1$$

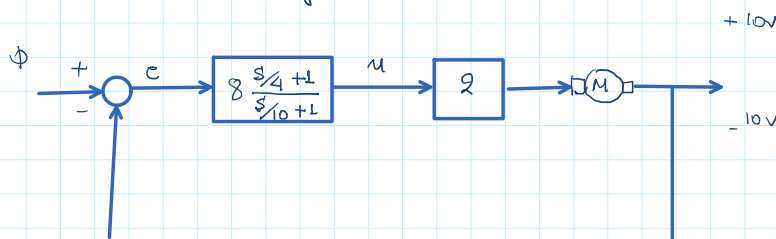
$$\lim_{z \rightarrow -1} D(z) = K' \frac{1 - (-1)^{-1}}{1 - (-1)^{-1} e^{-\alpha T}} = 1 \Rightarrow K' = \frac{1 - e^{-\alpha T}}{2}$$

$$\text{Αρα, } D(z) = \frac{1 - e^{-\alpha T}}{2} \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1} e^{-\alpha T}}$$

□ Για μωδονικά παλινδρόμηση αναδιπλώσει συστήματα

□ για Z, M χωρίς μωδονικά σε παράλληλη δίοδο το άσπαστο φίλτρο

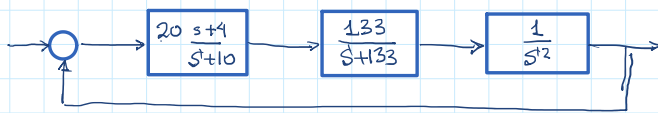
Σχεδιασμός Παράδειγμα:



- Προβλεπόμενη καθυστέρηση z και: $T = 0.015 \text{ sec}$

$$\frac{1 - e^{-\alpha T}}{2} \approx K \frac{2}{\alpha \cdot T} = \frac{133}{\alpha \cdot T}$$

$$\frac{1-e^{-sT}}{s} \approx K \frac{2}{s+\frac{2}{T}} = \frac{133}{s+133}$$



Γ.Τ.Ρ.

$s = -133 \Rightarrow$ ο πόλος στην εμπροστική των διακριτών κλιμακών βρ.
(απειρί T)

$$D(s) = \frac{\frac{s}{\alpha} + 1}{\frac{s}{\beta} + 1}, \quad \alpha = 4, \quad \beta = 10$$

$$\text{- Ζωτισμός Μ.Ζ.} \Rightarrow D(z) = K \frac{z - e^{-\alpha T}}{z - e^{-\beta T}},$$

$$e^{-\alpha T} = e^{-4 \times 0.015} = 0.94$$

$$e^{-\beta T} = e^{-10 \times 0.015} = 0.86$$

$$\text{Άρα, } D(z) = K \frac{z - 0.94}{z - 0.86}$$

$$(\text{χαμηλές συχν.}) \Rightarrow K = \lim_{s \rightarrow \infty} D(s) / \lim_{z \rightarrow 1} D(z) \Rightarrow$$

$$K = 8 \frac{1 - 0.86}{1 - 0.94} \Rightarrow K \approx 19.1$$

Τέλος,

$$D(z) = 19.1 \frac{z - 0.94}{z - 0.86}$$