ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΛΕΓΚΤΩΝ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

- Τοποθέτηση Ιδιοτιμών με Ανάδραση Κατάστασης

$$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k)$$

επιλέγω $u(k) = -F\,x(k)$

$$F = [F_1\ F_2 \dots F_n]$$

Σύστημα κλειστού βρόχου: $x(k+1) = (A - BF)\,x(k)$

Προδιαγραφές: θέσεις των πόλων του συστ. κλειστού βρόχου

άρα ιδιοτιμές του πίνακα $(A - BF)$

$$\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots \hat{\lambda}_n\}$$

Άρα, (σχεδιάζω) υπολογίζω τον F: $\{\hat{\lambda}_1, \dots \hat{\lambda}_n\}$ = ιδιοτιμές $(A - BF)$

1. (Θ.) $\exists\ F: \{\hat{\lambda}_i\} \in$ ιδιοτ. $(A - BF)$ $\Leftrightarrow$ (A, B) ελέγξιμο

2. τύπος Ackermann $\rightsquigarrow$ υπολογισμός F

όταν σύστημα SISO $\rightarrow$ b, f

$$f^T = [W^T S^T]^{-1} (\hat{\alpha} - \alpha)$$

$$S = [B\ \ AB, \dots A^{n-1}B], \qquad W = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_2 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{n-1} \\ \hat{\alpha}_{n-2} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_0 \end{bmatrix} \qquad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

$$P(z) = |z\mathbb{1} - A| = z^n + \alpha_{n-1} z + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

$$\hat{P}(z) = |z\mathbb{1} - A + bf^T| = z^n + \hat{\alpha}_{n-1} + \dots + \hat{\alpha}_0$$

ΕΛΕΓΧΟΣ DEADBEAT ("μηδενοριθμικός")

ΜΟΝΟ για ΨΗΦΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Έστω $x(k) = [A - BK]^k x(0)$: λύση συστ. κλειστού βρόχου

$\in$

$\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots \hat{\lambda}_n\}$

$(x(k+1) = (A - BK)\,x(k))$

Ειδική Περίπτωση : $\hat{\lambda}_i = 0$, $i = 1, \dots n$

τότε $x(k) = 0$, $k \le n$

Άρα, το σύστημα κλειστού βρόχου έρχεται σε ακινησία σε το πολύ n στιγμές !

Μορφή του πίνακα $(A - BK)$ → "nilpotent" (μηδενικών δύναμης)

Έστω $(A-BK) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A-BK)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(A-BK)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (A-BK)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Επόμενη $(A-BK)^k \equiv$ μήτρα μεταβάσεως $(\equiv A^k)$

Παρατήρηση: Εξαρτάται η πρακτική χρήση από την διάταξη !

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$ $\quad (\ddot{y} = u)$

$P(z) = |zI - A| = (z-1)^2 = z^2 - 2z + 1$

$\hat{P}(z) = z^2$

από τ. Ackermann : $f^T = \begin{bmatrix} 1/T^2 & 3/2T \end{bmatrix}$

$A - bf^T = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{T^2} & \frac{3}{2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & T/4 \\ -\frac{1}{T} & -1/2 \end{bmatrix}$

$\hat{P}(z) = z^2 = |zI - A + bf^T| = \begin{vmatrix} z - 1/2 & -T/4 \\ \frac{1}{T} & z + 1/2 \end{vmatrix}$

$u(kT) = -f^T x(kT) = -\begin{bmatrix} 1/T & 3/2T \end{bmatrix} x(kT)$

$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

T	100sec	10sec	1 sec	0,1 sec	0,01sec
$u(0)$	- 0,015	- 0,16	- 2,5	- 115	- 10.150
→ $u(T)$	0,0051	0,06	1,5	105	10,050