ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΛΕΓΚΤΩΝ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- "Εμμεσες" Τεχνικές : σχεδιάζουμε ο ελεγκτής $D(s)$ (πεδ. Laplace)

  στη συνέχεια $D(s) \rightsquigarrow D(z)$ (μετασχ. το σύστημα συνεχ. χρόνου $D(s) \rightsquigarrow$ διάκριτου χρ. $D(z)$)

  ↓

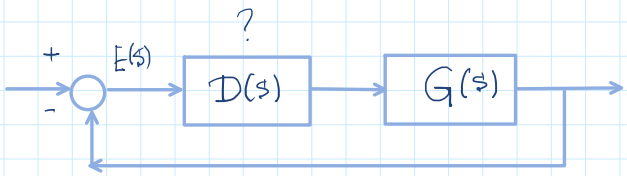
  "μετασχ. αναλογικών φίλτρων σε ψηφιακά"

  $\rightsquigarrow$ "σύστημα δειγματοληπτικών δεδομένων με $D(z)$"

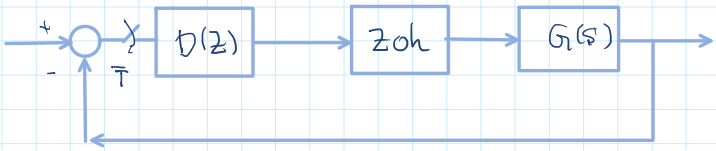
- "Άμεσες" Τεχνικές : δοσ. δειγματοληπτικών δεδομένων $G(z)$ ...

  σχεδιάζεται ο καλύτερος $D(z)$ ...

ΕΜΜΕΣΗ ΤΕΧΝΙΚΗ



Σκοπός: να μετασχ. $D(s) \rightsquigarrow D(z)$;



Θέλουμε: Συστήματα Ισοδύναμα:

Βήμα 1: Έλεγχος συμπεριφοράς του συστ. συνεχούς χρόνου όταν έχω - Zoh - "Zoh" $\rightsquigarrow$ καθυστέρηση ($\sim e^{-sT}$)

προσέγγιση: $\frac{1-e^{-sT}}{s} \simeq \frac{T}{1+\frac{sT}{2!}+\frac{s^2T^2}{3!}+\cdots} \simeq \frac{T}{1+\frac{sT}{2}}$

$\rightarrow$ "αν η καθυστέρηση ≈ αμελητέα $\Rightarrow$ ...

" — " = σημαντική $\Rightarrow$ πάω στο σύστημα συνεχούς χρόνου και επανασχεδιάζω $D(s)$

Βήμα 2: Μετασχημ. $D(s) \rightarrow D(z)$

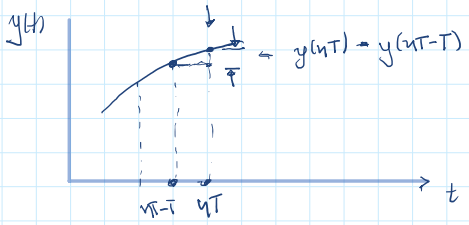
Βήμα 3: Επαλήθευση ικανοποίησης προδιαγραφών ?

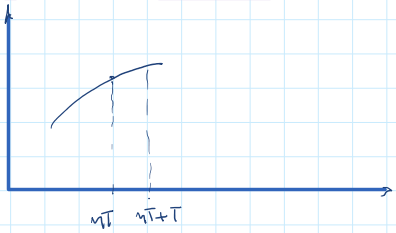
Βήμα 4: Υλοποίηση του ψηφ. ελεγκτή $D(z) \rightsquigarrow$ ψηφιακό αλγόριθμο

ΔΙΑΚΡΙΤΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ

- τεχνικές : αριθμητικές λύσεις σε διαφορικές - ολοκληρωτικές
- προέρχεται (αριθμητικά) παραγώγων - ολοκληρωμάτων

□ "Παραγώγιση" ⇝ "Οπίσθια διαφορά" + "Εμπρόσθια διαφορά"





$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{y(t) - y(t-T)}{T}$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{y(t+T) - y(t)}{T}$$

ML

$$\Rightarrow \quad sY(s) = \frac{Y(s) - e^{-sT}Y(s) + y(0)}{T}$$

$y(0) \ll$ μικρό $\Rightarrow$

$$s = \frac{1 - e^{-sT}}{T} \Rightarrow$$

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}, \quad z = \frac{1}{1 - sT}$$

$$s = \frac{z - 1}{Tz}, \quad z = \frac{1}{1 - sT}$$

π.χ. (οπίσθια διαφορά) : $D(z) = D(s)\Big|_{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}}$

$$\frac{s}{s + \alpha} \rightarrow \cdots = \left(\frac{1}{1 + \alpha T}\right) \cdot \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{1}{1 + \alpha T} z^{-1}}\right)$$

Ιδιότητες των Μετασχηματισμών

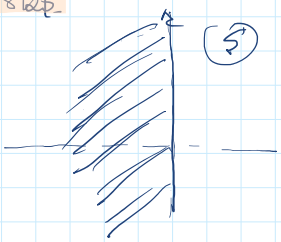
□ απλή πράξη

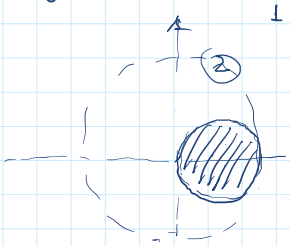
□ Συναρτήσεις $D(s)$ ⇝ μετασχηματίζονται σε Συναρτήσεις $D(z)$ (οπίσθιας διαφοράς)

Για $s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$ αν : $s = j\omega \Rightarrow z = \frac{1}{1 - j\omega T} = \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{j\theta}$

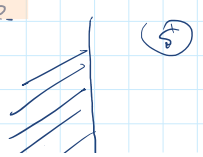
$(\theta = \tan^{-1}(\omega T))$

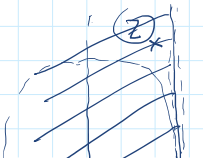
Οπίσθιας διαφ.

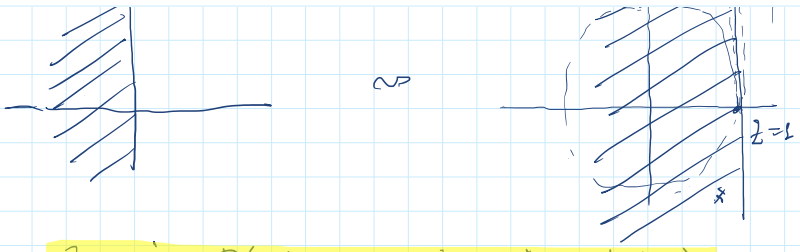




Εμπρόσθιας διαφ.







ευθύπλους $D(s)$ ⇝ ευθύπλους $D(z)$ ("Εμπρόσθια διαφ.")

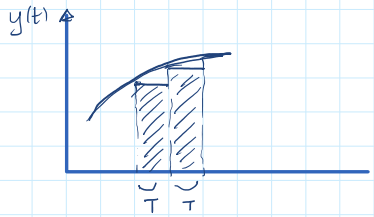
αθλαδής $D(s)$ ⇝ -//- $D(z)$

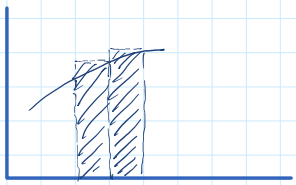
- Δεν διατηρούν μεταβατική και κρουστική απόκριση, άρα και απόκριση συχνότητας

$$D(z) \neq \mathcal{Z}\{D(s)\}$$

- πώς μετασχηματίζεται ο άξονας jΩ του s-επιπέδου στο επίπεδο z ?

- "Ολοκλήρωση" Αριστερόπλευρος κανόνας Δεξιόπλευρος κανόνας





$$y(t) = \int_0^t x(t)\,dt \qquad t = nT$$

$$y(nT) = \int_0^{nT} x(t)\,dt$$

$$y(nT) = T \sum_{i}^{n-1} x(iT)$$

$$y(nT+T) = T \sum_{i}^{n} x(iT) = T \sum_{i}^{n-1} x(iT) + T\,x(nT)$$

$$\rightarrow \quad y(nT+T) = y(nT) + T\,x(nT)$$

$$\frac{1}{s} = \frac{T}{z-1}$$ ... "Εμπρόσθια διαφορά" "Απλούν διαφορά"

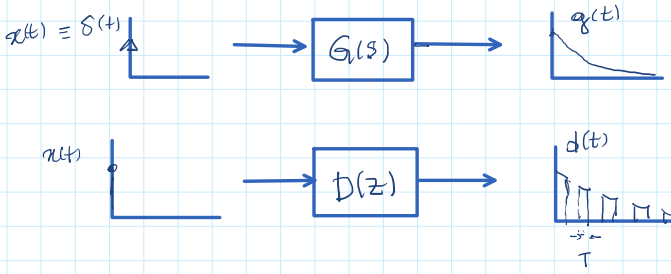
Τραπεζοειδής κανόνας : $y(nT) = T/2 \sum_{i=0}^{n-1} [x(iT) + x(iT+T)]$

$$\frac{1}{s} \cong \frac{T}{2}\,\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$ ⇝ διγραμμικός μετασχηματισμός

- Δεν διατηρούν την κρουστική απόκριση, άρα και την απόκριση συχνότητας

Κρουστική Αμετάβλητους (Μετ. Z)

Κρουστική Αμεταβλητότητα (Μτχ. Z)



(συνεχούς χρόνου)

(διάκριτου χρόνου)

$$g(nT) \equiv d(nT)$$

$$D(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(nT)\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT)\, z^{-n} = G(z) \equiv \mathcal{Z}\{G(s)\}$$

- διατηρεί την κρουστική απόκριση,
- δεν διατηρεί την απόκριση συχνότητας

Βηματική Αμεταβλητότητα

(η βηματική απόκριση του $G(s)$ ≈ βηματική απόκριση $D(z)$)

$$\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) D(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s} G(s)\right]\Big|_{t=kT} \Rightarrow \boxed{D(z) = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}}$$

("Σ.Μ. + zoh")

- δεν διατηρεί την κρουστική απόκρ. ούτε την απόκριση συχνότητας

- Διγραμμικός Μετασχ. με Ανάδίπλωση Συχνότητας (frequency prewarping)

$$D(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \rightsquigarrow D(z) = D(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

- δεν διατηρεί την απόκριση συχνότητας !

Ερώτημα: Ποιά είναι η απόκριση της $D(z)$ σε σχέση με την απόκριση συχν. της $D(s)$;

(Ο ≈ συχν. σύστημα συνεχούς χρόνου)

(Ω ⇝ συχν. ψύσεως συνεχούς χρόνου)

ω ⇝ " διάκριτου χρόνου)

- Να συσχετίσουμε τον $D(j\Omega)$ με τον $D(e^{j\omega T})$

(αντικατάσταση: $s = j\Omega$
$z = e^{j\omega T}$)

$$s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Rightarrow j\Omega = \frac{2}{T}\frac{1-e^{-j\omega T}}{1+e^{j\omega T}} \Rightarrow (\text{de Moivre})\ \left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right)^n = \cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2}}$$

Η σχέση μεταξύ παραμορφωμένης και πραγματικής συχνότητας

$\omega T \ll$ μικρό $\Rightarrow$

$$\tan\frac{\omega T}{2} \approx \frac{\omega T}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega \approx \omega}$$

Άρα: $|D(s)|_{s=j\Omega} = |D(z)|_{z=e^{j\omega T}}$

↑ πλάτος $D(s)/\Omega$ ↑ πλάτος $D(z)/\omega$

Άρα, η παραμόρφωση της συχνότητας όταν $\frac{\omega T}{2}$ δεν είναι πολύ μικρό, πρέπει να διορθώνεται μ' άλλη (στον σχεδιασμό του εξαγωγέα)

Επανασχεδιασμός Εξαγωγέα:

- Αναλογικός Αντιστοιχητής (ενός φίλτρου) ⇝ διπλέτα ανοκτοπόλου (να μην έχουμε παραμόρφωση συχνότητας)

πρέπει να πάρουν νέες τιμές:

Βήμα 1: $\forall$ πόλο/μηδενικό $s+\alpha$: αντικαθιστώ α με $\alpha' = \frac{2}{T}\tan\frac{\alpha T}{2}$

$$s+\alpha \rightsquigarrow s+\alpha' \Big|_{\alpha' = \frac{2}{T}\tan\frac{\alpha T}{2}}$$

Βήμα 2: Μετασχηματίζω $D(s,\alpha') \rightsquigarrow D(z,\alpha)$

$$D(z,\alpha) = D(s,\alpha')\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$D(z,\alpha) = D(s,\alpha')\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

≈ "scaling" συχνότητας

- Για το πλάτος πρέπει να γίνει "scaling" ξεχωριστά:

"scaling" πλάτος: για dc κέρδος = 1

(Θ. τελικής τιμής)

- χαμηλές συχνότητες : $z = 1$ $\left(\lim_{z\to 1}(\ )\right)$
- υψηλές -"- : $z = -1$ $\left(\lim_{z\to -1}(\ )\right)$

(Διότι: $t \to +\infty,\ \omega \to 0,\ \Rightarrow z = 1$

$t \to 0,\ \omega \to \infty \Rightarrow z = -1$)

Παράδειγμα. $D(s) = \dfrac{\alpha}{s+\alpha}$

Βήμα 1. $D(s,\alpha') = \dfrac{\alpha}{s + \frac{2}{T}\tan\frac{\alpha T}{2}}$

Βήμα 2: αντικατάσταση: $\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$:

$$D(z) = D(s)\Big|_{s=\ldots} = K\,\frac{\alpha}{\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{2}{T}\tan\frac{\alpha T}{2}} = \ldots$$

Για το K: θεωρούμε $D_{ss} = 1$

$$\lim_{t\to+\infty} D(z)\cdot\frac{1}{z-1} = \lim_{z\to 1}\left\{(z-1)\frac{1}{(z-1)}\right\} K\,\frac{\alpha}{\frac{2}{T}\frac{0}{2} + \ldots} = K\,\frac{\alpha}{\frac{2}{T}\tan\frac{\alpha T}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{\frac{2}{T}\tan\frac{\alpha T}{2}}{\alpha}}$$

Άρα, $$\boxed{D(z) = \frac{\tan\frac{\alpha T}{2}}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \tan\frac{\alpha T}{2}}}$$

- ☐ Ευστάθεια $D(\$) \Rightarrow$ Ευστάθεια $D(z)$
- ☐ Όχι ανεπιθύμητη συχνότητα
- ☐ Διατήρηση των απόκρισης συχνότητας στα σημεία ακριβώς
- ☐ Δεν διατηρεί την κρουστική απόκριση

Τετράγωνος Μ.Ζ. (matched z-transform)

"τοποθέτηση πόλων/μηδενικών" $D(\$) \rightsquigarrow D(z)$

($\$_1 \rightsquigarrow z_1 = e^{\$_1 T}$? = απόκριση με τον $\$_1$)

$$D(z) \triangleq D(\$)\Big|_{\$+\alpha = (1 - z^{-1}e^{-\alpha T})}$$

$$\begin{cases} \$+\alpha \rightsquigarrow 1 - z^{-1}e^{-\alpha T} \\ \$+\alpha \pm j\beta \rightsquigarrow 1 - 2z^{-1}e^{-\alpha T}\cos\beta T + e^{-2\alpha T}z^{-2} \end{cases}$$

Παραμετρίσεις - τοποθετεί τους πόλους όπως ο Μ.Ζ. (= κρουστική αμετάβλητα με zoh)

τα μηδενικά μετασχηματίζονται σε άλλες θέσεις

- κέρδος χρειάζεται scaling
- $D(\$)$ = γινόμενο παραγόντων

Παράδειγμα $D(\$) = \dfrac{\$}{\$ + \alpha}$

$$D(z) = K' \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1}e^{-\alpha T}} \quad \text{(υψηλο-διαβατό φίλτρο)} \Rightarrow z = -1$$

Άρα $\lim_{z \to -1} D(z) = K' \dfrac{\quad}{\quad} = 1 \Rightarrow K' = \dfrac{1 - e^{-\alpha T}}{2}$

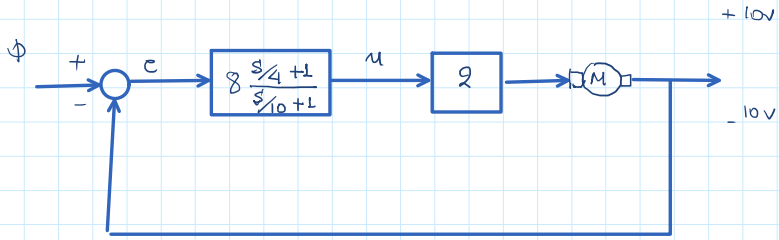
Άρα, $$D(z) = \frac{1 - e^{-\alpha T}}{2} \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1}e^{-\alpha T}}$$

- ☐ Στα μηδενικά παραμένει απεπιθύμητη συχνότητας (συχνότητες $> \frac{\omega_s}{2}$)

Για Σ.Μ. χωρίς μνημονικά θα περιγράφω εύκολα το αναλογικό φίλτρο

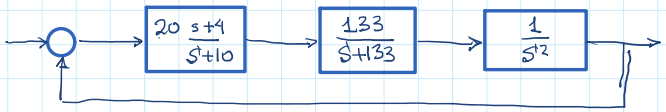
(δίνει: ...)

Σχεδιαστικό Παράδειγμα: (Συστ. σερβομηχανισμού γωνιακής θέσης οπτικής ίνας)



- Προσέγγιση καθυστέρησης ZOH: $T = 0.015\ sec$

$$\frac{1-e^{-sT}}{s} \simeq K\,\frac{2}{s+\frac{2}{T}} = \frac{133}{s+133}$$



Γ.Τ.Ρ.

$s=-133 \Rightarrow$ ο ZOH δεν επηρεάζει την δυναμική κρατώντας σταθερή (εκτός T)

- $D(s) = \dfrac{s/4+1}{s/6+1}$, $\alpha=4$, $b=10$

- Χαρτογράφηση Η.Ζ. $\Rightarrow$ $D(z) = K\,\dfrac{z-e^{-\alpha T}}{z-e^{-bT}}$,

$e^{-\alpha T} = e^{-4\times 0.015} = 0,94$

$e^{-bT} = e^{-10\times 0.015} = 0,86$

Άρα, $D(z) = K\,\dfrac{z-0.94}{z-0,86}$

(χαμηλές συχν.) $\Rightarrow$ $K = \lim_{s\to 0} D(s) \,/\, \lim_{z\to 1} D(z) \Rightarrow$

$K = 8\,\dfrac{1-0.86}{1-0.94} \Rightarrow K \simeq 19,1$

Τέλος,

$$\boxed{D(z) = 19,1\,\frac{z-0.94}{z-0,86}}$$