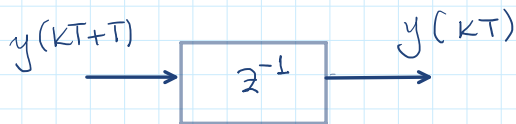


ΑΜΙΓΡΟΣ ΨΗΦΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΞΟΜΟΙΩΣΗΣ - ΠΡΟΤΥΠΟ Κ.Ε. (Εξ. διαφορών)

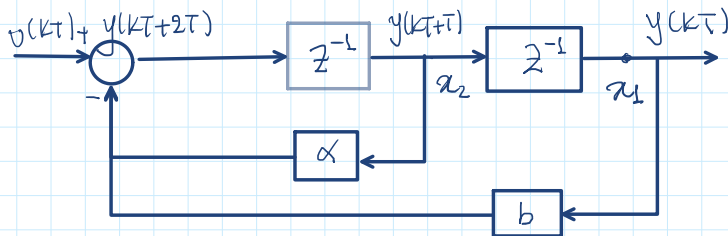


$y(kT+nT) \equiv$ μετρήσιμο

Π.Χ.

$$y(kT+2T) + ay(kT+T) + by(kT) = v(kT) \quad +$$

$$y(kT+2T) = v(kT) - ay(kT+T) - by(kT)$$



Καίνου: Έξοδος καθυστέρηση $\equiv$ μεταβλ. καθυστέρηση

$$y(kT) = x_1(kT)$$

$$\Rightarrow x_1(kT+T) = x_2(kT)$$

$$x_2(kT+T) = v(kT) - ax_2(kT) - bx_1(kT)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(kT+T) \\ x_2(kT+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(kT)$$

$$y(kT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

- Πως προκύπτει το π.κ.ε. από τον Σ.Μ. (πραγματική)

$$Y(z) = H(z) U(z), \quad H(z) : \text{διακριτικός ριθμός } \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \}$$

$$H(z) = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{z - \lambda_i}$$

$$\Rightarrow Y(z) = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{z - \lambda_i} U(z) = : \text{αντίστοιχο} : \boxed{X_i(z) \equiv \frac{U(z)}{z - \lambda_i}} \quad (\text{μεταβλ. καθυσ.})$$

$$Y(z) = \sum_{i=1}^n C_i X_i(z) \xrightarrow{Mz^{-1}} y(kT) = \sum_{i=1}^n C_i x_i(kT)$$

$$\boxed{x_i[(k+1)T] = \lambda_i x_i(kT) + U(kT)}$$

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \\ \vdots \\ x_n[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ \vdots \\ x_n(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} U(kT)$$

$$y(kT) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ \vdots \\ x_n(kT) \end{bmatrix}$$

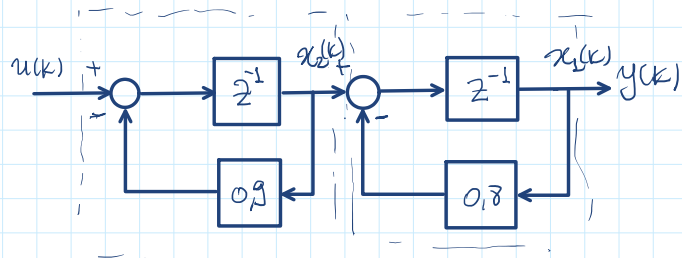
$$y(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Άλλα Μέθοδοι Εύρεσης Κατάδοι Προσώπου

Εφαρμογή:

$$y(k+2) = u(k) + 1,7y(k+1) - 0,72y(k)$$

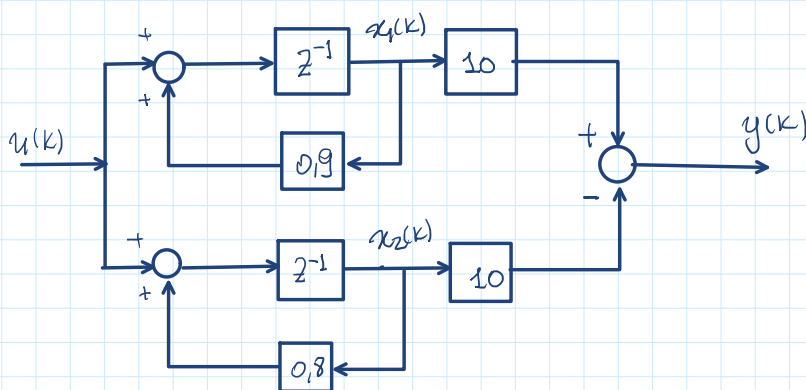
$$\xrightarrow{M.Z} \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^2 - 1,7z + 0,72} = \left[\frac{1}{z - 0,9} \right] \left[\frac{1}{z - 0,8} \right] \quad (\text{Εν Τέρμα})$$



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 1 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

$$\text{Άλλως: } \frac{Y(z)}{U(z)} = \left[\frac{10}{z - 0,9} \right] + \left[\frac{-10}{z - 0,8} \right] \quad (\text{απαιτείται κλάσμα}) \quad (\text{Υπεράσπασμα})$$



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 10 & -10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

Ισοδύναμα πρώτου & μεταδ. ομοιογενούς

ή $\lambda, \mu \Leftrightarrow$ ελέγχιμο + παρατηρήσιμο μέρος τῶν συστήματος

$$\text{Γ.Χ.Α.} : \text{Π.Κ.Ε.} : \begin{cases} x(k+1) = A x(k) + B u(k) \\ y(k) = C x(k) + D u(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

- Αναδρομική λύση:

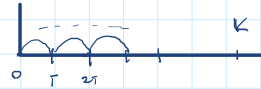
$$k=0 : x(1) = A x(0) + B u(0)$$

$$k=1 : x(2) = A x(1) + B u(1) = A^2 x(0) + A B u(0) + B u(1)$$

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=1}^{k-1} A^{(k-1-i)} B u(i) \quad \leadsto \text{Δεν γράφει}$$

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=1}^k A^{(k-i-1)} B u(i) \quad \leadsto \text{Δύο γενικά}$$

$$\Phi(kT) \equiv \Phi(k) = A^k$$



$$x(kT) = \underbrace{\Phi(k) x(0)}_{\text{δύο από μόν. δειγμάτων}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \Phi(k-1-i) B u(i)}_{\text{μεταβλ. δύο μόν. δειγμάτων}}$$

$$y(kT) = C \Phi(k) x(0) + C \sum_{i=1}^{k-1} \Phi(k-1-i) B u(i)$$

Επίλυση με Μ.Ζ.:

$$z \{x_{k+1}T\} = A z \{x_kT\} + B z \{u_kT\}$$

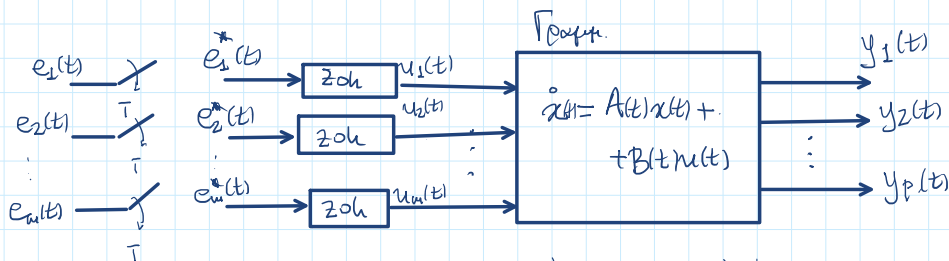
$$z X(z) - z x(0) = A X(z) + B U(z) \Rightarrow \dots \quad X(z) = z (zI - A)^{-1} x(0) + (zI - A)^{-1} B U(z)$$

$$\Rightarrow X_{\text{μ.δ.}} = z (zI - A)^{-1} x(0) \equiv \Phi(z) x(0)$$

$$X_{\text{μ.κ.}} = (zI - A)^{-1} B U(z)$$

Π.Κ.Ε. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΠΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Διακριτοποίηση (Χρονικά Μετασχηματιστικά Συστήματα)



m είσοδοι - p εξόδους
η καταστάσεις

$$u_i^*(t) \equiv u_i^*(kT) = e_i^*(kT), \quad kT \leq t < (k+1)T$$

$$k=0, 1, \dots, \quad i=1, \dots, m$$

Η κατάσταση $x(t)$:

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(kT) d\tau$$

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0) + u(kT) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) d\tau$$

Θέσω : $t_0 = kT, \quad t = (k+1)T$

Θέση : $t_0 = kT$, $t = (k+1)T$

$$\Rightarrow x[(k+1)T] = \Phi[(k+1)T, kT] x(kT) + u(kT) \Theta[(k+1)T, kT]$$

$$\Theta[(k+1)T, kT] = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T, \tau] B(\tau) d\tau$$

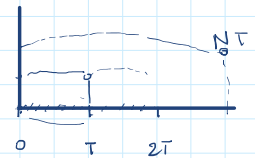
$$T = 1 \text{ sec} : \begin{cases} x(k+1) = \Phi(k+1, k) x(k) + \Theta(k+1, k) u(k) \\ y(k) = C(k) x(k) + D(k) u(k) \end{cases}$$

(Ακριβώς ψηφιακών συστ. : $x(k+1) = A(k) x(k) + B(k) u(k)$)
 $y(k) = C(k) x(k) + D(k) u(k)$

Συμπέρασμα Γ, X, A_0 :

$$x[(k+1)T] = \underline{\Phi(T)} x(kT) + \underline{\Theta(T)} u(kT)$$

$$y(kT) = C x(kT) + D u(kT)$$



$$\Phi(T) = \Phi((k+1)T - kT) \equiv \Phi(T)$$

$$\Phi(T) = e^{AT} = \mathbb{I} + AT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \dots$$

$$\Phi(T) = \Phi(t) \Big|_{t=T} = e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \{ (s\mathbb{I} - A)^{-1} \} \Rightarrow e^{At} \Big|_{t=T} \equiv e^{AT}$$

$$\Theta(T) = \int_0^T \Phi(T-\tau) B d\tau \Rightarrow \Theta(T) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B d\tau$$

$$\Phi(\tau) = e^{A\tau}$$

Λύση : $x(NT) = \underbrace{\Phi(NT)}_{\downarrow} x(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \Phi[(N-k-1)T] \Theta(T) u(kT)$

μεταβατικός πίνακας : $t_0 \rightarrow t = NT$

$$\Phi(NT) = \underbrace{\Phi(T) \dots \Phi(T)}_{\sim \text{φορές}} = \Phi^N(T) \neq \Phi(t) \Big|_{t=NT}$$

$$x(N) = \underbrace{A^N}_{\sim} x(0) + \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} B u(k)$$

Κ.Ζ. : Λύση Γ, X, A_0

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= \Phi(T)x(k) + \Theta(T)u(k) \\
 \xrightarrow{Mz} zX(z) - z x(0) &= \Phi(T)X(z) + \Theta(T)U(z) \\
 \Rightarrow \dots X(z) &= [z\mathbb{I} - \Phi(T)]^{-1} z x(0) + [z\mathbb{I} - \Phi(T)]^{-1} \Theta(T)U(z) \\
 &\sim \Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} [z\mathbb{I} - \Phi(T)]^{-1} z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Σ. Μ. \& Π. Κ. Ε. : } G(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = C[z\mathbb{I} - \Phi(T)]^{-1} \Theta(T) + D \\
 &= C(z\mathbb{I} - A)^{-1} B + D
 \end{aligned}$$

ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \quad (\sim \text{Σύστημα συνεχών μεταβλητών}) \\
 u(t) &\equiv u(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T
 \end{aligned}$$

$$\text{Π. Κ. Ε. : } x[(k+1)T] = \Phi(T)x(kT) + \Theta(T)u(kT)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ο πίνακας μετάβασης : } \Phi(NT) &= \underbrace{\Phi(T)\Phi(T)\dots\Phi(T)}_{N \text{ φορές}} \\
 \text{ήτοι } \Phi(T) &= e^{AT} = \left. \phi(t) \right|_{t=T}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \text{αριθμ. ψηφιακά συστήματα : } x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\
 \Phi(N) &= A \cdot A \dots A = A^N
 \end{aligned}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

$$1. \quad \Phi(NT) = z^{-1} \left\{ [z\mathbb{I} - \Phi(T)]^{-1} z \right\}$$

$$A^N \equiv \Phi(N) = z^{-1} \left\{ [z\mathbb{I} - A]^{-1} z \right\}$$

$$2. \quad \Theta. \text{ Cayley-Hamilton} \quad \leadsto$$

$$3. \quad \Theta. \text{ Sylvester}$$

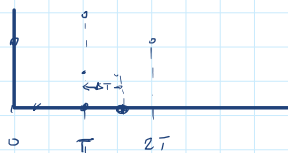
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ (Αποκρ. διάμεση σημείο δόνησης)

$$- \text{Απόκριση μεταξύ σημείων δόνησης}$$

$$x(t) = \phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t-\tau)B u(\tau) d\tau$$

ενεσδι $u(t) = u(kT)$, $t_0 \leq t < t_1$

$$\Rightarrow x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \Theta(t-t_0)u(kT)$$



$$t = kT + \Delta T = (k+\Delta)T, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$0 \leq \Delta \leq 1$$

$$x(kT + \Delta T) = \Phi(\Delta T)x(kT) + \Theta(\Delta T)u(kT), \quad t_0 = kT$$

Π.χ. $G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-T-e^{-T} & 1-e^{-T} \\ -1+e^{-T} & e^{-T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T-1+e^{-T} \\ 1-e^{-T} \end{pmatrix} u(kT)$

$$x[(k+1)T] = \Phi(T)x(kT) + \Theta(T)u(kT)$$

χρ $T = 1 \text{ sec} : \Rightarrow \Phi(T) \equiv \Phi(1) = \begin{bmatrix} 0,632 & 0,632 \\ -0,632 & 0,368 \end{bmatrix}$

$$\Theta(1) = \begin{bmatrix} 0,368 \\ 0,632 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(kT + \Delta T) \\ x_2(kT + \Delta T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \Delta T - e^{-\Delta T} & 1 - e^{-\Delta T} \\ -1 + e^{-\Delta T} & e^{-\Delta T} \end{bmatrix} x(kT) + \begin{bmatrix} \Delta T - 1 + e^{-\Delta T} \\ 1 - e^{-\Delta T} \end{bmatrix} u(kT)$$

$$x[(k+1)T] = \Phi(T-\Delta T)x[(k+\Delta)T] + \Theta(T-\Delta T)u[(k+\Delta)T]$$

$$\Delta T = \dots$$