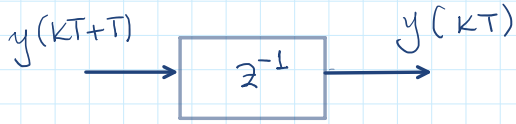
ΑΜΙΓΟΣ ΨΗΦΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΞΟΜΟΙΩΣΗΣ – ΠΡΟΤΥΠΟ Κ.Ε. (Εξ. διαφορών)

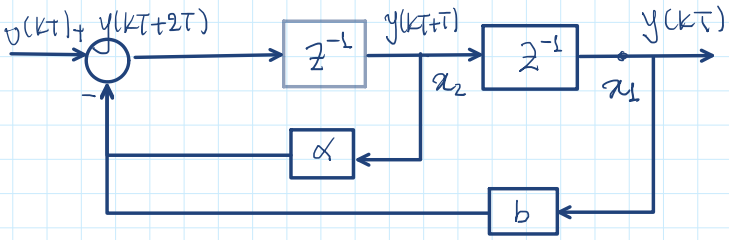


∘ $y(kT+nT)$ ≡ μετρήσιμο

Π.Χ.

$$y(kT+2T) + \alpha y(kT+T) + b y(kT) = v(kT) \quad \leftarrow$$

$$y(kT+2T) = v(kT) - \alpha y(kT+T) - b y(kT)$$



Κανόνας: Έξοδοι καθυστερητών ≡ μεταβλ. κατάστασης

$$y(kT) = x_1(kT)$$

$$\Rightarrow x_1(kT+T) = x_2(kT)$$

$$x_2(kT+T) = v(kT) - \alpha x_2(kT) - b x_1(kT)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(kT+T) \\ x_2(kT+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(kT)$$

$$y(kT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

– Πως προκύπτει το Π.Κ.Ε. από την Σ.Μ. (παρμενάκι)

$$Y(z) = H(z)\, U(z), \quad H(z): \text{διακεκριμένος πόλος } \{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\}$$

$$H(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{z - \lambda_i}$$

$$\Rightarrow Y(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{z-\lambda_i} U(z) = : \text{αν ορίσω} : \boxed{X_i(z) \triangleq \frac{U(z)}{z-\lambda_i}} \quad \text{(μεταβλ. κατάστ.)}$$

$$Y(z) = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(z) \quad \overset{Nz^{-1}}{\Rightarrow} \quad y(kT) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(kT)$$

$$\boxed{x_i[(k+1)T] = \lambda_i x_i(kT) + u(kT)}$$

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \\ \vdots \\ x_n[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ \vdots \\ x_n(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} v(kT)$$

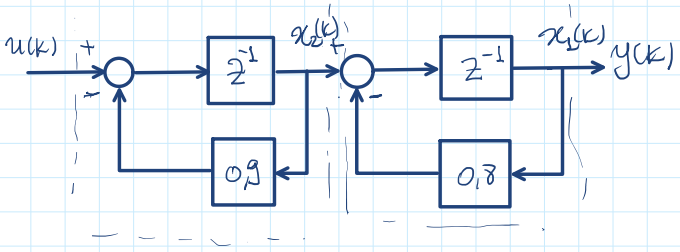
$$y(kT) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ \vdots \\ x_n(kT) \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} \vdots \\ x_n(kT) \end{bmatrix}$

Άλλες Μέθοδοι Εύρεσης Καταστ. Προτύπων

Εφαρμογή: $y(k+2) = u(k) + 1.7\,y(k+1) - 0.72\,y(k)$

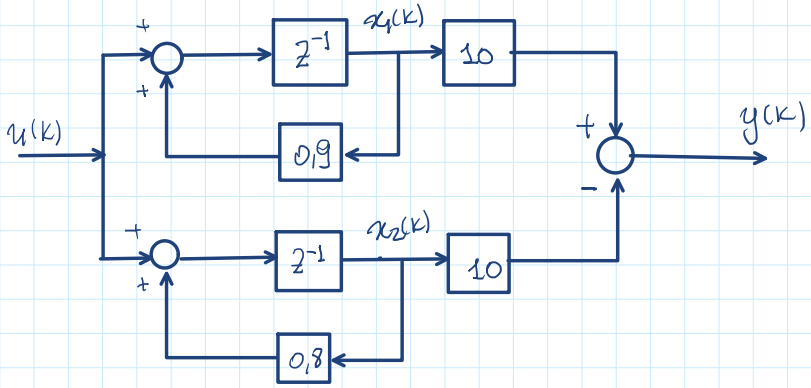
$\xrightarrow{MZ}$ $\dfrac{Y(z)}{U(z)} = \dfrac{1}{z^2 - 1.7z + 0.72} = \left[\dfrac{1}{z-0.9}\right]\left[\dfrac{1}{z-0.8}\right]$ (Εν Σειρά)



$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$

$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$

Αλλιώς: $\dfrac{Y(z)}{U(z)} = \left[\dfrac{10}{z-0.9}\right] + \left[\dfrac{-10}{z-0.8}\right]$ (απλά κλάσματα) (Παράλληλα)



$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$

$y(k) = \begin{bmatrix} 10 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$

Ισοδύναμα πρότυπα $\rightsquigarrow$ μεταβλ. ομοιότητας

ή $\lambda.M. \Leftrightarrow$ ελέγξιμο + παρατηρήσιμο μέρος του συστήματος

Για Γ.Χ.Α.: **Π.Κ.Ε:**
$$\begin{cases} x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) = C\,x(k) + D\,u(k) \end{cases}$$
$$x(0) = x_0$$

- Αναδρομική Λύση:

$k=0$: $x(1) = A\,x(0) + B\,u(0)$

$k=1$: $x(2) = A\,x(1) + B\,u(1) = A^2 x(0) + AB\,u(0) + B\,u(1)$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=1}^{k-1} A^{(k-1-i)} B\,u(i) \rightsquigarrow \text{Λύση γενική}$$

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=1}^{k} A^{(k-1-i)} B u(i) \quad \rightsquigarrow \text{ λύση γενική}$$

$$\boxed{\Phi(kT) \equiv \Phi(k) = A^k}$$

$$x(kT) = \underbrace{\Phi(k)x(0)}_{\text{λύση ομογ. μιτ. διέγερσης}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \Phi(k-1-i) B u(i)}_{\text{μερική λύση μιτ. κατάστασης}}$$

$$y(kT) = C\Phi(k)x(0) + C\sum \ldots$$

Επίλυση μέ Μ.Ζ.:

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)T\} = A\,\mathcal{Z}\{x(kT)\} + B\,\mathcal{Z}\{u(kT)\}$$

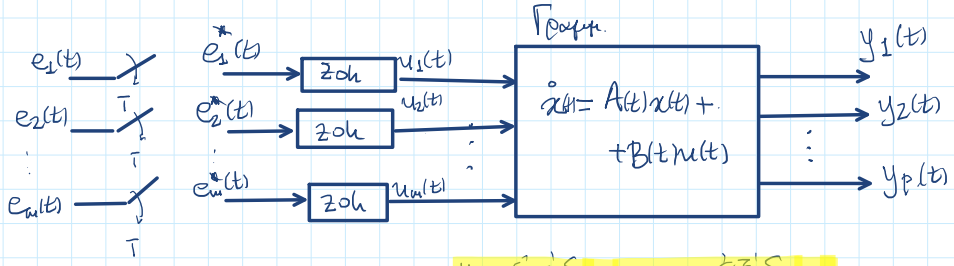
$$zX(z) - zx(0) = AX(z) + BU(z) \Rightarrow \ldots \quad X(z) = z(z\mathbb{1} - A)^{-1}x(0) + (z\mathbb{1} - A)^{-1}BU(z)$$

$$\Rightarrow X_{\text{μιτ. διεγ.}} = z(z\mathbb{1} - A)^{-1}x(0) \equiv \Phi(z)\,x(0)$$

$$X_{\text{μιτ. κατ.}} = (z\mathbb{1} - A)^{-1} B U(z)$$

Π.Κ.Ε. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΠΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Διακριτοποίηση (Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα)



m εἰσόδοι – p ἐξόδοι
η καταστάσεις

Όμως: $u_i(t) \equiv u_i(kT) = e_i(kT)$, $\quad kT \le t < (k+1)T$

$k = 0, 1, \ldots, \quad i = 1, \ldots m$

Η κατάσταση $x(t)$: $\quad x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(kT)\,d\tau$

$$\boxed{x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + u(kT)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)\,d\tau}$$

Θέτω: $t_0 = kT$, $t = (k+1)T$

Θέτω : $t_0 = kT$, $t = (k+1)T$

$$\Rightarrow \boxed{x[(k+1)T] = \Phi[(k+1)T, kT]\, x(kT) + u(kT)\, \Theta[(k+1)T, kT]}$$

$$\Theta[(k+1)T, kT] = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T, \tau]\, B(\tau)\, d\tau$$

$T = 1_{sec}$:

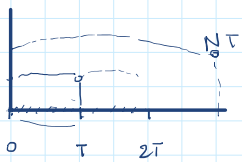
$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi(k+1, k)\, x(k) + \Theta(k+1, k)\, u(k) \\ y(k) = C(k)\, x(k) + D(k)\, u(k) \end{cases}$$

(Αμεσως ψηφιακων συστ. : $x(k+1) = A(k)\, x(k) + B(k)\, u(k)$, $y(k) = C(k)\, x(k) + D(k)\, u(k)$)

Συστήματα Γ.Χ.Α. :

$$x[(k+1)T] = \Phi(T)\, x(kT) + \Theta(T)\, u(kT)$$

$$y(kT) = C\, x(kT) + D\, u(kT)$$



$$\Phi(T) = \Phi((k+1)T - kT) = \Phi(T)$$

$$\Phi(T) = e^{AT} = \mathbb{1} + AT + \frac{A^2T^2}{2!} + \dots$$

$$\Phi(T) = \Phi(t)\Big|_{t=T} = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbb{1} - A)^{-1}\} \Rightarrow e^{At}\Big|_{t=T} = e^{AT}$$

$$\Theta(T) = \int_0^T \Phi(T-\tau)\, B\, d\tau \Rightarrow \boxed{\Theta(T) = \int_0^T e^{A(t-\tau)} B\, d\tau \quad , \quad \Phi(T) = e^{AT}}$$

Λύση : $x(NT) = \Phi(NT)\, x(0) + \sum_{k=0}^{N-1} \Phi[(N-k-1)T]\, \Theta(T)\, u(kT)$

↓

μεταβλητός πίνακας : $t \to \infty \longrightarrow t = NT$

$\Phi(NT) = \underbrace{\Phi(T) \cdots \Phi(T)}_{N \text{ φορές}} = \Phi^N(T) \neq \Phi(t)\Big|_{t=NT}$

$$x(N) = \underset{\sim}{A}^N x(0) + \sum_{k=0}^{N-1} A^{N-k-1} B\, u(k)$$

Μ.Ζ. : Λύση Γ.Χ.Α.

$$x(k+1) = \Phi(T)x(k) + \Theta(T)u(k)$$

$\overset{MZ}{\Rightarrow}$ $\quad zX(z) - zx(0) = \Phi(T)X(z) + \Theta(T)U(z)$

$\Rightarrow \dots \quad X(z) = [z\mathbb{1} - \Phi(T)]^{-1} z\,x(0) + [z\mathbb{1} - \Phi(T)]^{-1}\Theta(T)U(z)$

$\rightsquigarrow \Phi(z) = [z\mathbb{1} - \Phi(T)]^{-1} \cdot z$

Σ.Μ. & Π.Κ.Ε. $\quad G(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)} = C[z\mathbb{1} - \Phi(T)]^{-1}\Theta(T) + D$

$= C(z\mathbb{1} - A)^{-1}B + D$

ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

αν $\quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ $\quad$ (~ ενός δείγματος δεδομένων)

$u(t) = u(kT) \qquad kT \le t < (k+1)T$

Π.Κ.Ε.: $\quad x[(k+1)T] = \Phi(T)x(kT) + \Theta(T)u(kT)$

ο πίνακας μεταβάσεως: $\quad \Phi(NT) = \underbrace{\Phi(T)\Phi(T)\cdots\Phi(T)}_{N \text{ φορές}}$

όπου $\Phi(T) = e^{AT} = \phi(t)\Big|_{t=T}$

- χρόνος διακριτικά συστήματα: $\quad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

$\Phi(N) = A \cdot A \cdots A = A^N$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

1. $\quad \Phi(NT) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{[z\mathbb{1} - \Phi(T)]^{-1} z\right\}$

$A^N = \Phi(N) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{[z\mathbb{1} - A]^{-1} z\right\}$

2. Θ. Cayley–Hamilton $\rightsquigarrow$

3. Θ. Sylvester

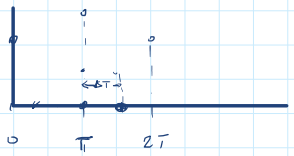
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ (Αποκρ. διάκριτων συστ. δειγματοληψίας)

- Απόκριση μεταξύ στιγμών δειγματοληψίας

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)Bu(\tau)\,d\tau$$

Επειδή $u(t) = u(kT)$, $t_0 \le \tau < t$

$\Rightarrow x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \Theta(t-t_0)u(kT)$



$t = kT + \Delta T = (k+\Delta)T$, $k = 0, 1, 2 \ldots$

$0 \le \Delta \le 1$

$x(kT+\Delta T) = \Phi(\Delta T)x(kT) + \Theta(\Delta T)u(kT)$, $t_0 = kT$

Παρ. $G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-T-e^{-T} & 1-e^{-T} \\ -1+e^{-T} & e^{-T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T-1+e^{-T} \\ 1-e^{-T} \end{pmatrix} u(kT)$

$x[(k+1)T] = \Phi(T)x(kT) + \Theta(T)u(kT)$

(Αν $T = 1$sec : $\Rightarrow \Phi(T) \equiv \Phi(1) = \begin{bmatrix} 0,632 & 0,632 \\ -0,632 & 0,368 \end{bmatrix}$

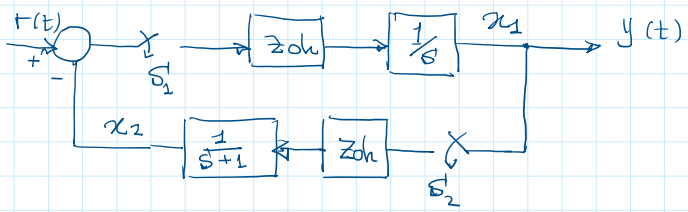
$\Theta(1) = \begin{bmatrix} 0,368 \\ 0,632 \end{bmatrix}$)

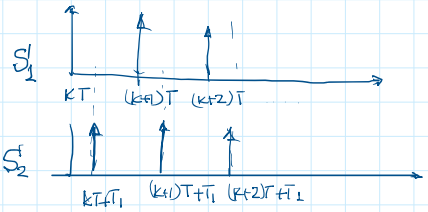
$\begin{bmatrix} x_1(kT+\Delta T) \\ x_2(kT+\Delta T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\Delta T - e^{-\Delta T} & 1-e^{-\Delta T} \\ -1+e^{-\Delta T} & e^{-\Delta T} \end{bmatrix} x(kT) + \begin{bmatrix} \Delta T - 1 + e^{-\Delta T} \\ 1-e^{-\Delta T} \end{bmatrix} u(kT)$

$x[(k+1)T] = \Phi(T-\Delta T)x[(k+\Delta)T] + \Theta(T-\Delta T)u[(k+\Delta)T]$

$\Delta T = \ldots$

— Μη - Συγχρονισμένοι Δειγματοσήπτες —





Είδους βρόχος? Χρόνος μεταδόσεως : $kT \le t \le (k+1)T$

Βρόχος ανάδρασης: -//- $kT+T_1 \le t \le (k+1)T + T_1$

Τότε: $kT \le t \le (k+1)T$: $X_1(s) = \frac{1}{s} x_1(kT) - \frac{1}{s^2} x_2(kT) + \frac{1}{s^2} r(kT)$

$kT+T_1 \le t \le (k+1)T + T_1$: $X_2(s) = \frac{1}{s(s+1)} x_1(kT+T_1) + \frac{1}{s+1} x_2(kT+T_1)$

$M L^{-1}$

$\Rightarrow$ (1) $kT \le t \le (k+1)T$: $x_1(t) = x_1(kT) - (t-kT) x_2(kT) + (t-kT) r(kT)$

(2) $kT+T_1 \le t \le (k+1)T+T_1$: $x_2(t) = \left[1 - e^{-(t-kT-T_1)}\right] x_1(kT+T_1) + e^{-(t-kT-T_1)} x_2(kT+T_1)$

Επειδή: αχρικές τιμές = $x_1(kT)$, $x_1(kT+T_1)$ και $x_2(kT)$, $x_2(kT+T_1)$ υπολογίζονται από τις σχέσεις (1), (2).

Θέτουμε $t = kT+T_1$ και $t = (k+1)T$ στην (1):

$\Rightarrow x_1(kT+T_1) = x_1(kT) - T_1 x_2(kT) + T_1 r(kT)$

$x_1(k+1)T = x_1(kT) - T x_2(kT) + T r(kT)$

Θέτουμε $t = (k+1)T$, και $t = (k+1)T + T_1$ στην (2):

$\Rightarrow x_2(k+1)T = \left[1 - e^{-(T-T_1)}\right] x_1(kT+T_1) + e^{-(T-T_1)} x_2(kT+T_1)$

$x_2\left[(k+1)T+T_1\right] = (1 - e^{-T}) x_1(kT+T_1) + e^{-T} x_2(kT+T_1)$

Τελικά, όταν $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ έχω 4 τελευταίες εξισώσεις υπολογίζουμε τις καταστάσεις και την έξοδο του συστήματος στις στιγμές δειγματοληψίας και των δύο δειγματοληπτών...