

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ευστάθεια BIBS, BIBO

BIBS : όταν $\|u(k)\| \leq N \left(= \left(\sum_{l=1}^P u_l^2(k) \right)^{1/2} \right), \forall k$

τότε $\|y(k)\| \leq M, \forall k$

BIBO : $\|u(k)\| \leq N \Rightarrow \|y(k)\| \leq M, \forall k$

Ασυμπτωτική Ευστάθεια : (έννοια) $\forall u(k), \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = 0$

$(\lim_{k \rightarrow \infty} \|y(k) - 0\| = 0)$

(Σύστημα Αειχρονόζ. Αδυσμενές)

$G(s) \leadsto G^*(z) : \text{Ευσταθής} \Leftrightarrow s \in \mathbb{C}^- \left(\equiv \text{σταθεράς χρόνου} \right)$

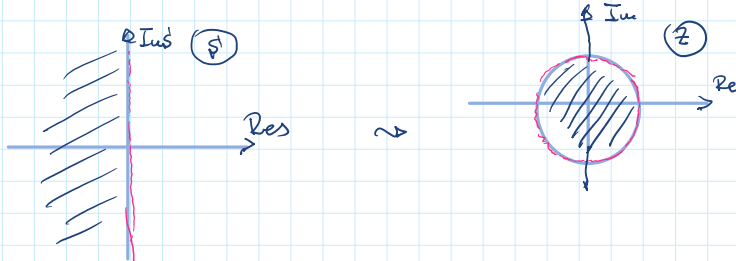
Με την αναπαράσταση : $z = e^{sT} \Rightarrow (s = \sigma + j\omega)$
 $\Rightarrow z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = |z| \angle z$

$|z| = e^{\sigma T}$
 $\angle z = \omega T$

Ευσταθής $\Rightarrow \sigma < 0 \Leftrightarrow |z| < 1 \Rightarrow \text{περιοχή ευσταθούς = μοναδιαός κύκλος}$

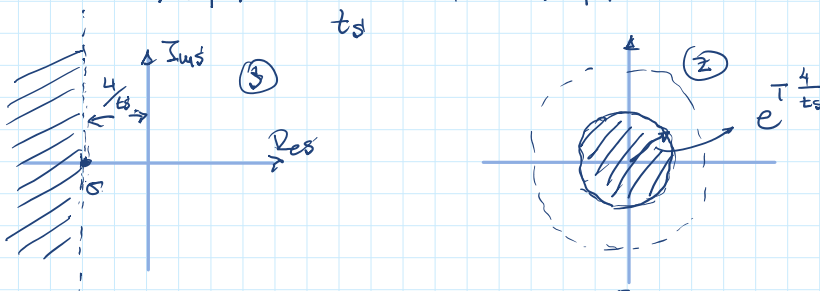
- **Οριακή Ευστάθεια** ($s \in j\omega$ -άξονα)

$\sigma = 0 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow \text{περιοχή μοναδιαός κύκλος}$

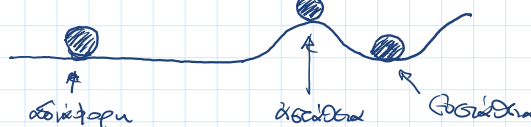


Π.Χ.ο Για μέγιστο χρόνο αποκρίσεως

$|\sigma_i| \geq \frac{4}{t_d} \leadsto |z_i| \leq e^{-T \frac{4}{t_d}}$



Ευσταθία Lyapunov :



$$2. \text{I. } x_e: \quad x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$$

$$x_e = f(x_e, 0, k) = 0$$

Ευστάθεια Lyapunov: $\forall \delta > 0, \exists \delta(\varepsilon, k_0) > 0$:

$$\forall \|x(k_0) - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \|x(k) - x_e\| < \varepsilon, \quad \forall k > k_0$$

Ασυμπιεστική Ευστάθεια Lyapunov: x_e : α) ~~ευστάθεια~~ / Lyapunov

β) $\forall k_0, x(k_0)$:

$$\|x(k_0) - x_e\| \leq \delta(k_0) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi(x(k_0)) - x_e\| = 0$$

$\downarrow$
 $x(k)$

$\square \Gamma, x_0, A$: $x(k+1) = A x(k)$

$$\leadsto \phi(k) = A^k \text{ με } \delta \text{ στοιχείο } \lambda_i^k \text{ (Γαλvan Algebra)}$$

$$\Rightarrow \text{ασυμπεστική ευστάθεια } \lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi(k)\| = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0 \quad (\leadsto)$$

$$\Rightarrow \boxed{|\lambda_i| < 1}$$

Π, X : (Όσοι οι ~~στοιχείοι~~ **ενόσω** στον μοναδιαίο κύκλο ηρέσει να είναι ~~απλά~~)

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x(k), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

↓
Σταθερός πόλος στο +1 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \leadsto \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$
 $\lambda(\lambda-2)+1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$

Έξοδος : $y(k) = (1 \ 0) x(k) \leadsto y(k)$ μη-φραγμένο

$$\text{κ, } x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} (\equiv A x(0)) \Rightarrow x(2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, x(3) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y(0) = (1 \ 0) x(0) = 1$$

$$y(1) = 0$$

$$y(2) = -1$$

$$y(3) = -2$$

⋮

Παρατηρούμε : για $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y(\infty)$ είναι φραγμένο

Παρατηρούμε: Για να είναι ~~ευστάθεια~~ ηρέσει να είναι και BIBO και ~~ευστάθεια~~ / Lyapunov

Π, X . $x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2.5 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$

$$y(k) = (-1 \ 0.5) x(k) + u(k)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2,5 \end{pmatrix} \leadsto \lambda_1 = 0,5$$

$$\lambda_2 = 2 \quad (\leadsto \neq \text{BIBO/Lyapunov})$$

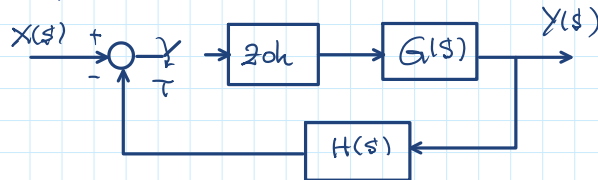
$$G(z) = 1 + \frac{0,5z - 1}{z^2 - 2,5z + 1} = \dots = \frac{z^2 - 2z}{z^2 - 2,5z + 1} = \frac{z(z-2)}{(z-0,5)(z-2)} = \frac{z}{z-0,5}$$

$\Rightarrow$ BIBO Boudos

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

$\Gamma \rightarrow A$ $\leadsto$ \$150 συστήματα

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}$$



$$X \rightarrow E: \quad P(z) = 1 + GH(z) = 0$$

Βασικά $\Rightarrow$ 1) ρίζες $X \rightarrow E$ $\equiv$ πόσες φορές μοναδιαίο κύκλο z -επίσης

2) αριθμός ρίζες (κόμπος) $z=1$ ή $z=-1$

3) πιθανότητα δίνε ενδείξεις επί βυσσίδων

ΚΡΙΤΗΡΙΟ JURY

$$F(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0, \quad \alpha_n > 0 \quad (\text{monic: } \alpha_n = 1)$$

Mintz Jury:

$$b_k = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_{n-k} \\ \alpha_n & \alpha_k \end{vmatrix}$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}$$

z^0	z^1	z^2	...	z^n
α_0	α_1	α_2	...	α_n
α_n	α_{n-1}	α_{n-2}	...	α_0
b_0	b_1	b_2	...	b_{n-1}
b_{n-1}	b_{n-2}	...	...	b_0
c_0	c_1			

$$\text{Αριθμός Γεγονότων πενταγωνίου Jury} = 2n-3$$

Indices:

1) $F(1) > 0$

2) $(-1)^n F(-1) > 0$

Εξαστάση $\Rightarrow$ 16x50w ONEΣ

$\rightarrow$ 3) $|\alpha_0| < \alpha_n \quad \rightarrow (|\alpha_0| < 1)$

4) $|b_0| > |b_{n-1}|$

5) $|c_0| > |c_{n-2}|$

$\rightarrow n+1$ συνθήκες ($n+1$ συνθήκες $\leadsto F(z)$)

- $\alpha_0 \equiv$ πρώτο όριον των ριζών $\rightarrow |\alpha_0| < 1$ ρίζες $\in$ μοναδ. κύκλο

Παράδειγμα: $G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$, $H(s) = 1$

Να βρεθεί η περιοχή των K : εύκολα βρεθεί

$$G(s) = \left[\frac{1-e^{-sT}}{s} \right] \left[\frac{K}{s(s+1)} \right] \Rightarrow \dots G(z) = \left(\frac{z-1}{z} \right) \left[\frac{(e^{-T}+1)z^2 + (1-e^{-T}-Te^{-T})}{(z-1)^2(z-e^{-T})} \right]$$

$T_w; T=1 \text{ sec} \Rightarrow G(z) = \frac{0,00482 + 0,00468}{(z-1)(z-0,368)}$

X.E.: $1 + KG(z) = 0 \Rightarrow 1 + K(\dots) = 0$

$$\Rightarrow F(z) = z^2 + (0,368K - 1,368)z + (0,368 + 0,264K) = 0$$

$n=2 \rightarrow$ χρειαζόμ. Jury ≥ 1

Λυόμενα: 1) $F(1) > 0 \Rightarrow 1 + (0,368K - 1,368) + (0,368 + 0,264K) > 0$
 $\Rightarrow K > 0$

2) $(-1)^2 F(-1) > 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow K < 26,3$

3) $|\alpha_0| < \alpha_2 \Rightarrow K < 2,39$

Περιοχή τιμών: $0 < K < 2,39$

Παράδειγμα: $F(z) = z^3 - 1,8z^2 + 1,05z - 0,2$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $\alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_0$

1) $F(1) > 0 \Rightarrow 1 - 1,8 + 1,05 - 0,2 = 0,05 > 0$

? οκ

2) $(-1)^3 F(-1) > 0 \Rightarrow -1 - 1,8 - 1,05 - 0,2 = -4,05$

$-F(-1) = 4,05 > 0$

? οκ

3) $|\alpha_0| = 0,2 < 1$

? οκ

4) πίνακας Jury:

z^3	z^2	z^1	z^0
-0,2	1,05	-1,8	1
1	-1,8	1,05	-0,2
-0,96	1,59	-0,69	
b_0	b_1	b_2	

$|b_0| = 0,96 > |b_2| = 0,69$

? οκ

Για κομμικά αγγλικά προσέγγιση:

$$0 < K < 2,39$$

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΠΡΟΔΙΑΓΡΑΦΩΝ ΤΟΥ S-ΕΠΠ. ΣΤΟ Z-ΕΠΙΠΕΔΟ

Ζητούμε τις τιμές:
$$S_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 \equiv -\sigma \pm j\omega_d \quad \left(\begin{array}{l} \sigma = \zeta\omega_0 \\ \omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 \end{array} \right)$$

 $0 \leq \zeta \leq 1, \quad \omega_0$

Να εξετάσουμε σε ποια σημεία του Z-επιπέδου μετασχηματίζονται $|z=e^{\sigma T}$ τα σημεία:

1. Σημεία με σταθερό πραγματικό μέρος (σ), $\sigma = \zeta\omega_0 = \text{const.}$

$$S_{1,2} \Big|_{z=e^{\sigma T}} \rightsquigarrow \begin{array}{l} z_{1,2} = e^{-\zeta\omega_0 T} \cdot e^{\pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 T} \\ |z_{1,2}| = e^{-\zeta\omega_0 T}, \quad \angle z_{1,2} = \pm \sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 T \equiv \pm \omega_d T \\ (\omega_d \equiv \sqrt{1-\zeta^2} \cdot \omega_0) \end{array}$$

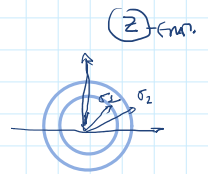
θ. Διαφοροαριθμός: $0 \leq \omega_d \leq \frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{T}$

$0 \leq \omega_d \leq \frac{\pi}{T} \rightsquigarrow \omega_d \text{ μεταβάλλεται} \Rightarrow ? \quad z_{1,2}$

- $\omega_d \rightarrow 0 \Rightarrow \angle z_{1,2} \rightarrow 0$

- $\omega_d \rightarrow \frac{\pi}{T} \Rightarrow \angle z_{1,2} \rightarrow \pm \pi$

Άρα, σημεία με σταθερό $\sigma_1 = \zeta\omega_0 \rightsquigarrow$ κύκλο ακτίνας $e^{-\sigma_1 T}$



2. Σημεία με σταθερό $\zeta = \zeta_0$

$$\left. \begin{array}{l} |z_{1,2}| = e^{-\zeta_0 \omega_0 T} \\ \angle z_{1,2} = \pm \sqrt{1-\zeta_0^2} \omega_0 T \rightsquigarrow \omega_0 = \mp \frac{\angle z_{1,2}}{\sqrt{1-\zeta_0^2} T} \end{array} \right\} \Rightarrow |z_{1,2}| = e^{\pm \frac{\zeta_0}{\sqrt{1-\zeta_0^2}} \frac{\angle z_{1,2}}{T}}$$

Σταθερό $\zeta = \zeta_0 \Rightarrow |z_{1,2}| = e^{\pm \frac{\zeta_0}{\sqrt{1-\zeta_0^2}} \frac{\angle z_{1,2}}{T}} \leftarrow (\text{Αποκλιση από τον άξονα})$

$$0 \leq \omega_0 \leq \frac{\pi}{T\sqrt{1-\zeta_0^2}}$$

Όταν $0 \leq \omega_d \leq \frac{\pi}{T} \rightsquigarrow \omega_0 : 0 \leq \omega_0 \leq \frac{\pi}{T\sqrt{1-\zeta_0^2}}$

Εντός $0 \leq \zeta \leq 1 \rightsquigarrow$ περιπτώσεις:

• $\zeta_0 = 0 \rightsquigarrow S_{1,2} = \pm j\omega_0 \Rightarrow z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0 T}$

Παράδειγμα: $|z_{1,2}| = 1$. Όταν $\omega_0 \rightarrow 0 \Rightarrow z_{1,2} \rightarrow 1$

$$\omega_0 \rightarrow \frac{\pi}{T\sqrt{1-\zeta_0^2}} = \frac{\pi}{T} (\zeta_0=0) \Rightarrow z_{1,2} \rightarrow e^{\pm j\pi} = \pm 1$$

□ Όταν $0 \leq \omega_d \leq \frac{\pi}{T}$ για $\zeta_0 = 0$ κινούνται πάνω στον **μοναδιαίο κύκλο**

□ όταν $0 \leq \omega_d \leq \frac{\pi}{T}$ για $\zeta_0 = 0$ κινείται πάνω στον **μοναδιαίο κύκλο**

$$\bullet \zeta_0 = 1 \Rightarrow s_{1,2} = -\omega_0 \Rightarrow z_{1,2} = e^{-\omega_0 T} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0 \rightarrow 0 \Rightarrow z_{1,2} \rightarrow 1 \\ \omega_0 \rightarrow \frac{\pi}{T\sqrt{1-\zeta_0^2}} \rightarrow \infty \Rightarrow z_{1,2} \rightarrow \emptyset \end{cases}$$

□ όταν $0 \leq \omega_d \leq \frac{\pi}{T}$, $\frac{\zeta_0=1}{0 \leq \omega_0 < \infty}$ τότε $z_{1,2} \in [0, 1] \subset \text{Re } z$

□ όταν $0 \leq \zeta_0 < 1$ τότε όταν $0 \leq \omega_d \leq \frac{\pi}{T} \rightarrow z_{1,2} \in \text{Αμφιπολική ενότητα}$

3. **Συμπέρασμα με σταθερό ω_0**

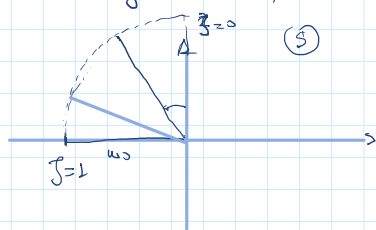
Ισχύει $\omega^2 = \sigma^2 + \omega_d^2 \Rightarrow s_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_d = -\sigma \pm j\omega_d$

$$\Rightarrow z_{1,2} = s_{1,2} \Big|_{z=e^{sT}} = e^{-\sqrt{\omega_0^2 - \omega_d^2} T} \cdot e^{\pm j\omega_d T}, \quad \omega_0 = \text{σταθερό}$$

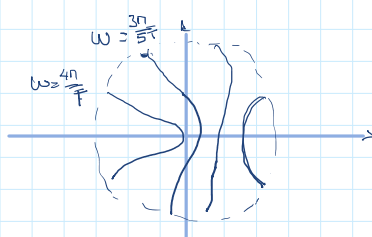
Τότε, $0 \leq \omega_d \leq \frac{\pi}{T} \Rightarrow 0 \leq \underline{\omega_d} \leq \frac{\pi}{T\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad 0 \leq \underline{\zeta} \leq 1$

- $\zeta = 0$, $\omega_0 = \text{σταθερό} \Rightarrow e^{\pm j\omega_0 T} = \text{κάνει στο μοναδιαίο κύκλο}$

- $\zeta = 1$, $\omega_0 = \text{σταθερό} \Rightarrow e^{-\omega_0 T} = \in \text{Re } z$



$\Rightarrow$



συμπέρασμα με
σταθερό ω_0