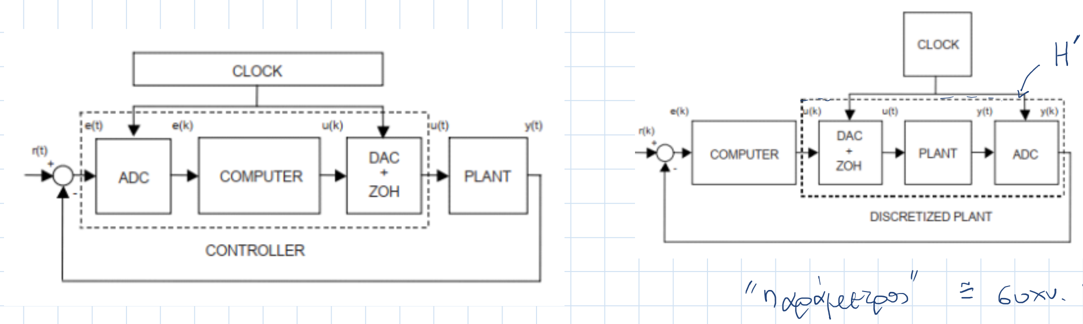
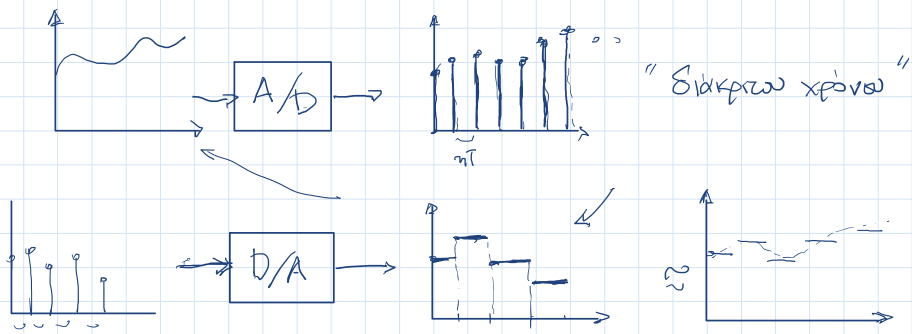
ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ - ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Συστήματα "Δειγματοληπτικών Δεδομένων"



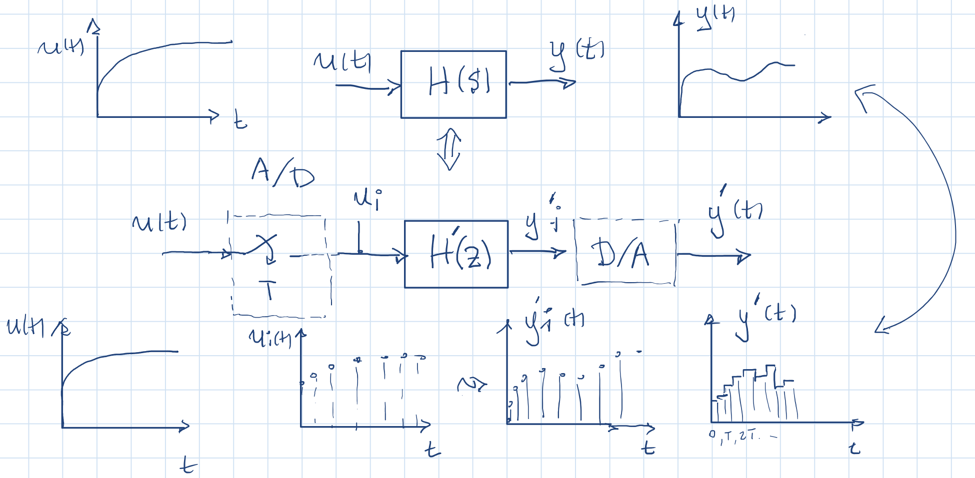
"παράμετρος" ≅ συχν. δειγματοληψίας

– "bandwidth" του συστήματος καθορίζει την



"διάκριτου χρόνου"

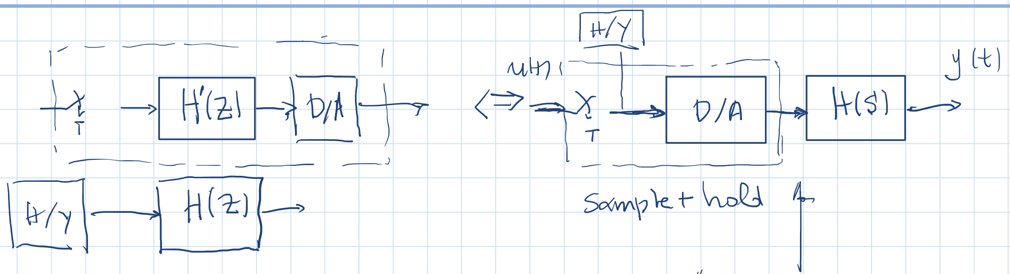
– Πρόβλημα της Διακριτοποίησης Συνεχούς Χρόνου Συστήματος



"Ισοδύναμη σχέση I/O"

$(T \to 0 \Rightarrow y'(t) \approx y(t))$

(Διατύπωση): $\boxed{\text{Πως επιλέγω το } H'(z) \text{ και D/A έτσι ώστε } y'(t) \approx y(t)}$



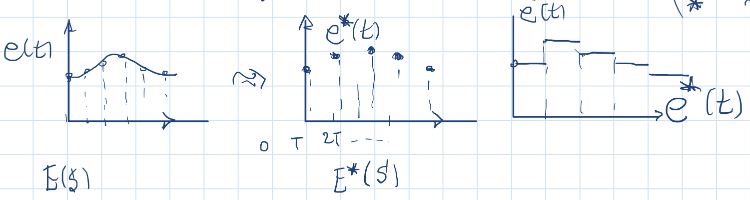
"Συστήματα δειγματοληπτικών

"σύστημα δειγματοληπτικών δεδομένων" κλειστού βρόχου

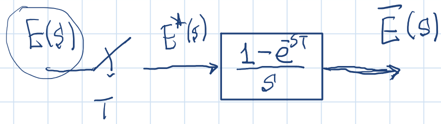
? Σ.Μ. (παλμική) ~ $H(z)$

- Ιδανικός Δειγματολήπτης

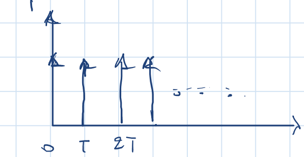
(* ~ δειγματοληψία)



$$e^*(t) = \mathcal{L}^{-1}\{E^*(s)\}$$



$\delta_T(t)$ ("τραίνο κρουστικών δ.")



$$e^*(t) = e(0)\delta(t) + e(T)\delta(t-T) + e(2T)\delta(t-2T) + \cdots$$

$$\left(t = nT \Rightarrow e(nT) = e(nT^+) \right)$$

$$\delta_T(t) = \delta(t) + \delta(t-T) + \cdots$$

ΜL $\Rightarrow$ $\boxed{E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\, e^{-nTs}}$ ~ "άρρητη" συνάρτηση $\neq$ πηλίκο πολυωνύμων

$\Rightarrow$ $\boxed{\not\exists \text{ Σ.Μ. "ιδαν. δειγματολήπτη"}}$

Π.χ. $e(t) = u(t)$ (μοναδ. βηματική)

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\, e^{-nTs} = e(0) + e(T)e^{-Ts} + e(2T)e^{-2Ts} + \cdots$$

$$= 1 + 1\cdot e^{-Ts} + 1\cdot e^{-2Ts} + \cdots$$

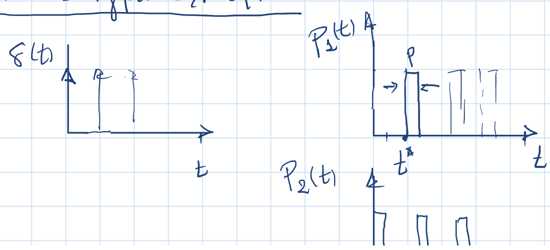
για $|e^{-sT}| < 1 \Rightarrow$ συγκλίνει $\Rightarrow E^*(s) = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}$

Για να γίνει Ρητή συνάρτηση:

$$E(z) \equiv E^*(s)\Big|_{z=e^{sT}}$$

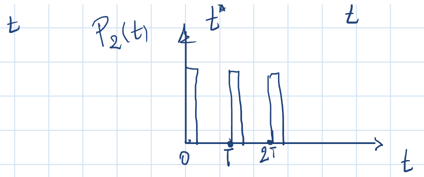
$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-nTs} \Rightarrow \boxed{E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\, z^{-n}}$$ "Ρητή" συνάρτηση

- Πρακτική Δειγματοληψία



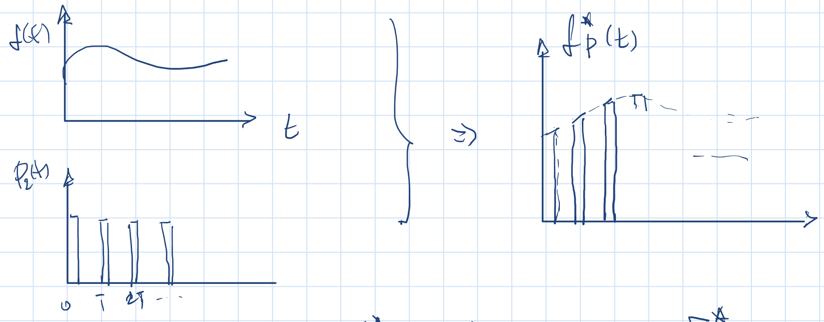
$$p_1(t) = u(t-t^*) - u(t-t^*-p)$$

$$p_2(t) = \sum^{\infty} \left\{ u(t-nT) - u(t-nT-p) \right\}$$



$$p_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ u(t-nT) - u(t-nT-p) \right\}$$

$$\boxed{p << T}$$



$$f_p^*(t) = f(t)\, p_2(t) \Rightarrow F_p^*(s) = \mathcal{L}\left\{ f_p^*(t) \right\} = \mathcal{L}\left\{ f(t) \cdot p_2(t) \right\}$$

$$\boxed{F_p^*(s) = \frac{1-e^{-ps}}{s} F^*(s)}$$

– ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΥΠΟΣΤΕΙ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

$$x^*(t) \overset{\text{ορ}}{=} x(t)\, \delta_T(t) \Rightarrow X^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\, e^{-nTs}$$

→ <u>2 τύποι υπολογισμού</u>

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s + jn\omega_s) + \frac{x(0)}{2} \qquad (\text{δύσχρηστα})$$

-(Μέθοδος Ολοκληρωτικών Υπολοίπων)

$$X^*(s) = \sum_{1}^{m} \left[\mathrm{Res}\ X(\lambda) \frac{1}{1-e^{-T(s-\lambda)}} \right] \Bigg|_{\text{πόλους της } X(s)}$$

∘ Residues k_i : (<u>απλοί πόλοι</u>)

$$k_i = \lim_{\lambda \to \lambda_i} \left[(\lambda-\lambda_i) \frac{X(\lambda)}{1-e^{-T(s-\lambda)}} \right]$$

∘ Residues k_i : (<u>πολλαπλότητας m</u>)

$$k_i = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{\lambda \to \lambda_i} \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} \left[(\lambda-\lambda_i) \frac{X(\lambda)}{1-e^{-T(s-\lambda)}} \right]$$

<u>Παράδειγμα</u>: $E(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$,

$$E^*(s) = \sum \left[\mathrm{Res}\ E(\lambda) \frac{1}{1-e^{-T(s-\lambda)}} \right] \Bigg|_{\text{πόλους } E(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda+2)(1-e^{-T(s-\lambda)})} \Bigg|_{\lambda=-1} + \frac{1}{(\lambda+1)(1-e^{-T(s-\lambda)})} \Bigg|_{\lambda=-2}$$

$$= \frac{1}{\dots} - \frac{1}{\dots}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-T(s+1)}} - \frac{1}{1-e^{-T(s+2)}}$$

- $e(t) = \sin\beta t$
- $e(t) = 1 - e^{-t}$

- Ιδιότητα των σημάτων $X^*(s)$

$X^*(s)$ = περιοδικό σήμα, με περίοδο $j\omega_s$ $\quad \left(\omega_s = \frac{2\pi}{T}\right)$

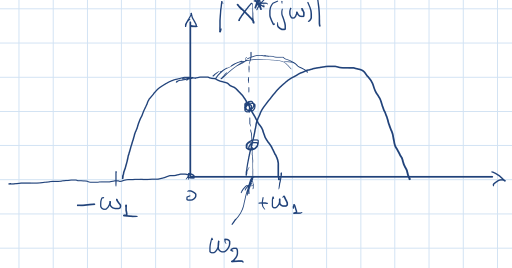
Απόδ. $E^*(s + jm\omega_s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) e^{-nT(s + jm\omega_s)}$; $\quad \left(e^{jnm\omega_s T} = e^{-jnm2\pi} = 1\right)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) e^{-nTs} = E^*(s)$$

□ Αν η $E(s)$ έχει $s = s_1 \Rightarrow E^*(s)$ έχει πόλους $s = s_1 + jm\omega_s$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Εξομάλυνση ("Aliasing")



- $\omega = \omega_2 \Rightarrow |X^*(j\omega_2)| + |X^* j(\omega_s - \omega_2)|$

$| \; n\omega_s \pm \omega_2$

π.χ. $\quad x(kT) = \sin(\omega_2 kT + \theta)$

$y(kT) = \sin[(\omega_2 + n\omega_s)kT + \theta]$

$= \sin(\omega_2 kT) + 2\pi k.n + \theta)$

$= \sin(\omega_2 kT + \theta)$

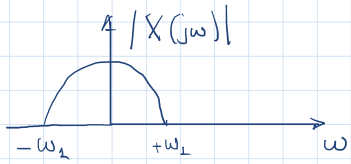
$\Rightarrow x(kT) \equiv y(kT)$

ΘΕΩΡΗΜΑ SHANNON

$e(t) \quad \sim \quad f_0 \text{ Hz} \quad \approx \quad \frac{1}{2f_0}$

ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

$x(t) \Rightarrow$



"φάσμα $x(t)$"

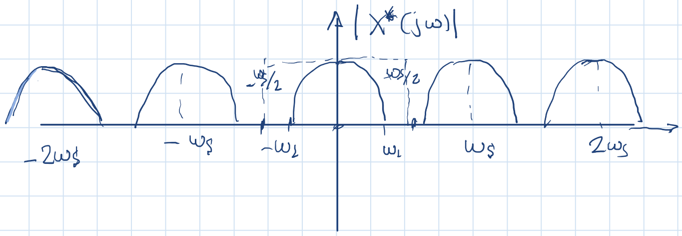
$x(t) \xrightarrow{} \times \xrightarrow{x^*(t)}$ $\quad X^*(s) = \mathcal{L}[x^*(t)] \quad |X^*(j\omega)| = ?$

$\left(\omega_s = \frac{2\pi}{\ }\right)$

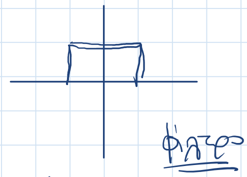
$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\omega + jn\omega_s) \qquad \left(\omega_s = \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$= \dots + \frac{1}{T}X(j(\omega-\omega_s)) + \frac{1}{T}X(j\omega) + \frac{1}{T}X(j(\omega+\omega_s)) + \dots$$

□ $\boxed{\omega_s > 2\omega_1}$

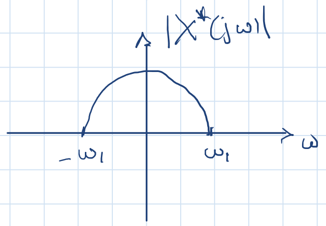


⇒

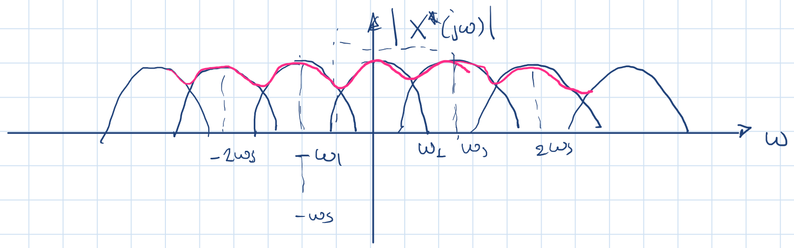


φίλτρο

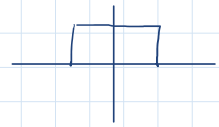
"ανακατασκευαστής"
D/A

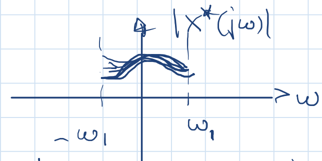


□ $\boxed{\omega_s < 2\omega_1}$



+

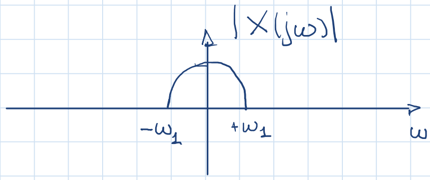




- "Εξομάλυνση" ⇝ Εμφανίζονται $> \frac{1}{2}\omega_s$ στο σήμα $\left(0, \frac{\omega_s}{2}\right)$
- D/A ≡ ανακατασκευαστής ≡ φίλτρο

□ Ανακατασκευαστής

Έστω $x(t)$:



$$x(t) \xrightarrow{\;T\;} x^*(t)$$

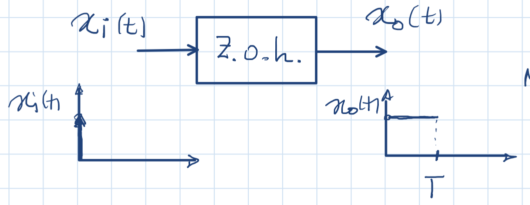
Θ/ : $x(t) \approx x(nT) + \frac{x'(nT)}{1!}(t-nT) + \frac{x''(nT)}{2!}(t-nT)^2 + \dots$ (σ. Taylor)

"προσεγγίσεις": $x'(nT) \approx \frac{1}{T}\left[x(nT) - x[(n-1)T]\right]$

$$x''(nT) \approx \frac{1}{T}\left[x'(nT) - x'[(n-1)T]\right] = \dots = \frac{1}{T^2}\left[x(nT) - 2x[(n-1)T] + x[(n-2)T]\right]$$

ΜΗΔΕΝΙΚΟΣ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΗΣ

$$x_h(t) \approx x(nT) \quad , \quad nT \le t \le (n+1)T$$



$$x_o(t) = u(t) - u(t-T)$$

$$\xrightarrow{ML} X_o(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s}$$

$$X_i(s) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{1-e^{-sT}}{s}}$$

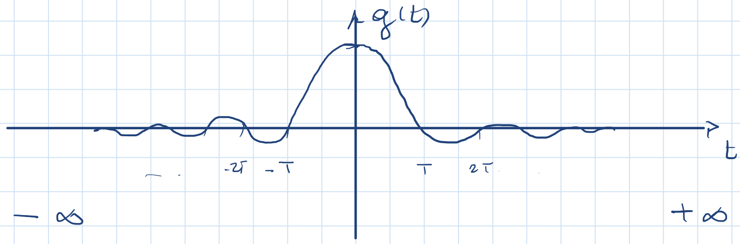
- Ανακατασκευαστής 1ης Τάξης : $x_h(t) \cong x(nT) + \frac{x'(nT)}{1!}(t-nT)$ ~

□ Ιδανικό φίλτρο Χαμηλοδιαβατό ~ "Μή Υλοποιήσιμο"

$$G(j\omega) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2}\omega_s \le \omega \le \frac{1}{2}\omega_s \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{MF^{-1}} g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \cdots\cdots = \frac{1}{\pi t} \sin \frac{\omega_s t}{2}$$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{1}{T} \frac{\sin\left(\frac{\omega_s t}{2}\right)}{\frac{\omega_s t}{2}}$$



απόκριση $-\infty \to +\infty$

$\exists$ −//− $t < 0$ άρα

πριν εφαρμοσθεί είσοδο

υπάρχει απόκριση

Άσκηση: $X(s) = \frac{10s+4}{s^3+6s^2+5s}$ ~ $X^*(s) = ?$

α) $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10s+4}{s^3+6s^2+5s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10s+4}{s(s+1)(s+5)}\right\}$

$$X(s) = \frac{10s+4}{s(s+1)(s+5)} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{s+5}$$

$$\alpha_1 = \lim_{s\to 0} X(s)\cdot s = \lim_{s\to 0} \frac{10s+4}{\cancel{s}(s+1)(s+5)}\cdot \cancel{s} = \frac{4}{5}$$

$$\alpha_2 = \qquad = \frac{3}{2}$$

$$\alpha_3 = \qquad = -\frac{23}{10}$$

Άρα, $x(t) = \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{23}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}$

$$= \frac{4}{5} + \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{23}{10}e^{-5t}$$

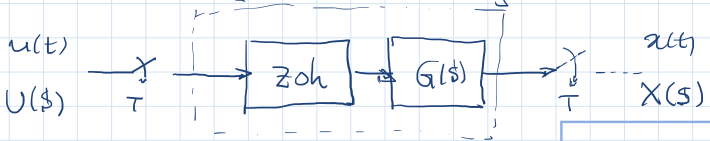
$$x^*(t) = x(t)\,\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{23}{10}e^{-5t}\right)\delta_T(t)$$

$$\Rightarrow X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{2}e^{-kT} - \frac{23}{10}e^{-5kT}\right)\left(e^{sT}\right)^k \ldots$$

$$X(z) \overset{\text{ορ.}}{=} X^*(s)\Big|_{z=e^{sT}} = \ldots\ldots$$

<u>Άσκηση</u>: Υπολογισμός Μ.Ζ. συναρτήσεων με τον όρο $\frac{1-e^{-sT}}{s}$

$$X(s) = \left[\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right] \sim X(z) = ?$$



$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{G_{ho}(s)\,G(s)\right\} = \boxed{\mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right\} = \left(1-z^{-1}\right)\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}}$$

<u>Απόδειξη</u>:

Θέτω $G_1(s) \triangleq \frac{G(s)}{s}$

$$G'(s) = \left(1-e^{-sT}\right)G_1(s) \equiv G_1(s) - e^{-sT}G_1(s)$$

Θέτω $X_1(s) = e^{-sT}G_1(s)$

$$\overset{ML^{-1}}{\Rightarrow} x_1(t) = \int_0^t g_0(t-\tau)\,g_1(\tau)\,d\tau \qquad \left(g_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-sT}\right\} = \delta(t-T)\right)$$

$$g_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G_1(s)\right\}$$

Άρα, $x_1(t) = \int_0^T \delta(t-T)\,g_1(\tau)\,d\tau = g_1(t-T)$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\left\{x_1(t)\right\} = \mathcal{Z}\left\{g_1(t-T)\right\} = z^{-1}G_1(z)$$

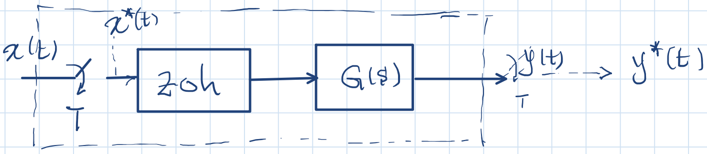
Τότε, $G'(z) = \mathcal{Z}\left\{G_1(s) - e^{-sT}G_1(s)\right\} = \mathcal{Z}\left\{g_1(t)\right\} - \mathcal{Z}\left\{x_1(t)\right\}$

$$= G_1(z) - z^{-1}G_1(z)$$

Άρα, $\boxed{G'(z) = \left(1-z^{-1}\right)G_1(z)}$

Άρα, $\boxed{G'(z) = (1-z^{-1})\,G_1(z)}$

Άσκηση: $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$



$$G(z) = \,??$$

α) Μέσω Z (ιδιότητες)

$$G(z) = (1-z^{-1})\,Z\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\} = (1-z^{-1})\,Z\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{G(z) = \frac{(T-1+e^{-T})z^{-1} + (1-e^{-T}-Te^{-T})z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})}}$$

β) Απλά κλάσματα

$$G(s) = (1-e^{-sT})\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right)$$

$$\xRightarrow{ML^{-1}} g(t) = (t-1+e^{-t})\,u(t) - ($$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)\,z^{-k} = \dots$$

γ) Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα:

$$G(z) = (1-z^{-1})\,Z\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\}$$

Θέτω $X(s) = \dfrac{1}{s^2(s+1)} \rightarrow X(z) = ?$

↳ 1 διπλός πόλος $s=0$

1 απλός " $s=-1$

$$X(z) = \sum \mathrm{Res}\, \frac{X(s)z}{z-e^{-sT}}\Bigg|_{\substack{\text{πόλους}\\ X(s)}} = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left[\cancel{s^2}\,\frac{1}{\cancel{s^2}(s+1)}\,\frac{z}{z-e^{-sT}}\right] +$$

$$+\lim_{s\to -1}\left[(s+1)\,\frac{1}{s^2(s+1)}\,\frac{z}{z-e^{-sT}}\right]$$

$$= \dots$$