



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Ρομποτικά Συστήματα

Ενότητα 12: Information Flow and Cooperative
Control of Vehicle Formations

Αντώνιος Τζές – Ευάγγελος Δερματάς

Σχολή Πολυτεχνική

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι η παρουσίαση και εξοικείωση με τα ακόλουθα στοιχεία ρομποτικών συστημάτων:
- Information Flow and Cooperative Control of Vehicle Formations



Περιεχόμενα ενότητας

- Information Flow and Cooperative Control of Vehicle Formations



Introduction – Graph Theory

- \mathcal{V} = set of vertices of directed graph \mathcal{G}
- $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}^2$ set of arcs, where $a = (\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$
 $\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \text{tail}(a) \quad \text{head}(a) \end{array} \quad \text{tail}(a) \neq \text{head}(a)$
- *in(out)* degree of a vertex a , denoted by $d_i(a)$ ($d_o(a)$) = # of arcs with a as its *head(tail)*
- A path on \mathcal{G} of length N from a_0 to a_N is an ordered set of distinct vertices $\{a_0, \dots, a_N\}$ such that $(a_{i-1}, a_i) \in \mathcal{A}, \forall i \in [1, N]$



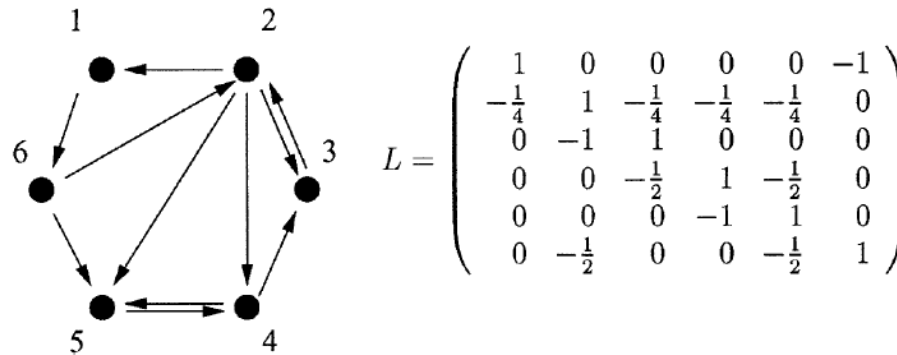
Introduction – Graph Theory

- Strongly connected graph: A path exists from every vertex to every vertex
- Disconnected graph: Disjoint subsets of vertices exist that cannot be joined by any path
- N –cycle on \mathcal{G} is a path except for which ($a_0 = a_N$)
- A cyclic graph is one with no cycles
- K –periodic graph when all cycle lengths have a common divisor $k > 1$



Introduction – Graph Theory

- Assumption: The vertices of $\mathcal{G} = a_i$
- Normalized Adjacency Matrix $G(\mathcal{G})$ is a square matrix of size $|\mathcal{V}|$, $G_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_o(a_i)}, & \text{if } (a_i, a_j) \in \mathcal{G} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$
- Laplacian $L = I - G$



Πηγή: J. Alexander Fax and Richard M. Murray, "Information Flow and Cooperative Control of Vehicle Formations", in *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, VOL. 49, NO. 9, pp 1465 – 1476, SEPTEMBER 2004, doi: [10.1109/TAC.2004.834433](https://doi.org/10.1109/TAC.2004.834433)

Εικόνα 1: Sample Graph and Laplacian



Introduction – Graph Theory

- Equal weight on arcs
- G is nonnegative
- Row-sum of $L = 0$

Permutation matrix

G is irreducible if $\nexists P : PGP^T$ is block triangular

Strong connectivity (reducible $G \rightarrow$ multiple competing leaders)

G^T is irreducible $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ - strongly connected $(I_n + \mathcal{A})^{n-1} > 0$

\mathcal{G} - aperiodic $\Leftrightarrow G$ is primitive

$\mathcal{G} - K$ periodic $\Leftrightarrow G$ cyclic of index K

$\rho(G)$ – special radius of $G = \max_i (|\lambda_i(G)|)$



Introduction – Graph Theory


- Theorem 1: Perron – Frobenius

Let A nonnegative irreducible matrix. Then:

1. $\rho(A) > 0$
2. $\rho(A)$ is a simple eigenvalue of A
3. A has a positive eigenvector x corresponding to $\rho(A)$

If A is also primitive \hookrightarrow all eigenvalues of A other than $\rho(A)$ have modulus $< \rho(A)$

- Theorem 2: If A nonnegative, irreducible, cyclic index of k , then A has k eigenvalues of modulus

 $\rho(A)$, equal to $\lambda_i = \rho(A)e^{\frac{2\pi j}{k}i}$, $i = 0, \dots, k - 1$

Introduction – Graph Theory

- Any eigenvalue λ of L corresponds to eigenvalue $1 - \lambda$ of G
- Proposition 1: $0 \in \text{eig}(L)$, with eigenvector $\mathbf{1}^T$
- Proposition 2: $\text{eig}(L)$ lie in a disk of radius 1 centered at $(1 + 0j)$
- Proposition 3: If \mathcal{G} is strongly connected then 0 is a simple eigenvalue of L . Additionally, if \mathcal{G} is aperiodic, all non-zero eigenvalues lie in the interior of the Perron disk
- Proposition 4: If \mathcal{G} is undirected $\Leftrightarrow \text{eig}(L)$ are real



Kronecker Algebra

$$\dot{x}_i = Ax_i$$

$$\dot{x} = (I_N \otimes A)x$$

$$A_{m \times n}, B_{p \times q}, \text{ then } A \otimes B_{mp \times nq} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}B & \dots & \alpha_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}B & \dots & \alpha_{mn}B \end{bmatrix}$$

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$$

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

$$(A \otimes B)^{-T} = A^{-T} \otimes B^{-T}$$

$$A_{n \times n}, B_{p \times p} \hookrightarrow |\det(A \otimes B)| = |\det(A)|^p |\det(B)|^n$$

If $A_{r \times s}, B_{N \times N}$

$$(I_N \otimes A)(B \otimes I_s) = (B \otimes I_r)(I_N \otimes A) = B \otimes A$$



Vehicle's Dynamics

- $\dot{x}_i = P_A x_i + P_B u_i, x_i \in \mathbb{R}^n, u_i \in \mathbb{R}^m, i = [1, N]$

(Identical linear dynamics)

- Measurements for each vehicle:

$$\begin{cases} y_i = P_C x_i, y_i \in \mathbb{R}^k \\ z_{ij} = P_{C_2} (x_i - x_j), z_{ij} \in \mathbb{R}^\ell, j \in \mathcal{J}_i, \mathcal{J}_i \subset [1, N] \setminus \{i\} \neq \emptyset \end{cases}$$

- Assumption:

$$z_i = \frac{1}{|\mathcal{J}_i|} \sum_{j \in \mathcal{J}_i} z_{ij}, |\mathcal{J}_i| = \text{cardinality of set } \mathcal{J}_i$$



Vehicle's Dynamics

- Control Law:

$$\dot{u}_i = K_A u_i + K_{B_1} y_i + K_{B_2} z_i$$

$$u_i = K_C u_i + K_{D_1} y_i + K_{D_2} z_i$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = I_N \otimes (P_A + P_B K_{D_1} P_{C_1}) + (I_N \otimes P_B K_{D_2} P_{C_2})(L \otimes I_n)$$

$$A_{12} = I_N \otimes P_B K_C$$

$$A_{21} = I_N \otimes K_{B_1} P_{C_1} + (I_N \otimes P_B K_{D_2} P_{C_2})(L \otimes I_n)$$

$$A_{22} = I_N \otimes K_A$$

- $L: \begin{cases} L_{ii} = 1 \\ L_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{|J_i|}, j \in J_i \\ 0, j \notin J_i \end{cases} \end{cases} = \text{Laplacian of graph}$



Vehicle's Dynamics

- Theorem 3: A local controller stabilizes the formation dynamics iff it simultaneously stabilizes the set of N -systems:

$$\dot{x}_i = P_A x_i + P_B u_i$$

$$y_i = P_{C_1} x_i$$

$$z_i = \lambda_i P_{C_2} x_i, \quad \lambda_i = \text{eigenvalues of } L$$

U is unitary: $UU^T = U^T U = I$

$U = T^{-1} L T$ = upper triangular with eigenvalues of L along the diagonal

T -Schur transformation of L

$T \otimes I_n$ transforms $L \otimes I_n$ into $U \otimes I_n$



Vehicle's Dynamics

- Let $\tilde{x} = (T \otimes I_n)x$
 $\tilde{u} = (T \otimes I_n)u$

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= (\dots)(U \otimes I_n) \\ A_{12} &= (\dots)(U \otimes I_n) \\ A_{21} &= (\dots)(U \otimes I_n) \\ A_{22} &= (\dots)(U \otimes I_n) \end{aligned} \right\} \text{block diagonal of block upper-triangular}$$

- For $U \otimes I_n$, the diagonal blocks are $\lambda_i I_n$

↪ The N -diagonal subsystems

$$\dot{\tilde{x}}_i = \left(P_A + P_B K_{D_1} P_{C_1} + \lambda_i P_B K_{D_2} P_{C_2} \right) \tilde{x}_i + P_B K_C \tilde{u}_i$$

$$\dot{\tilde{u}}_i = \left(K_{B_1} P_{C_1} + \lambda_i K_{B_2} P_{C_2} \right) \tilde{x} + K_A \tilde{u}$$



Vehicle's Dynamics

- λ_i may be complex \hookrightarrow complex-valued
- Zero eigenvalue \hookrightarrow Unobservability of absolute motion of the formation in the measurements z_i
- Assume P_{C_1} –empty

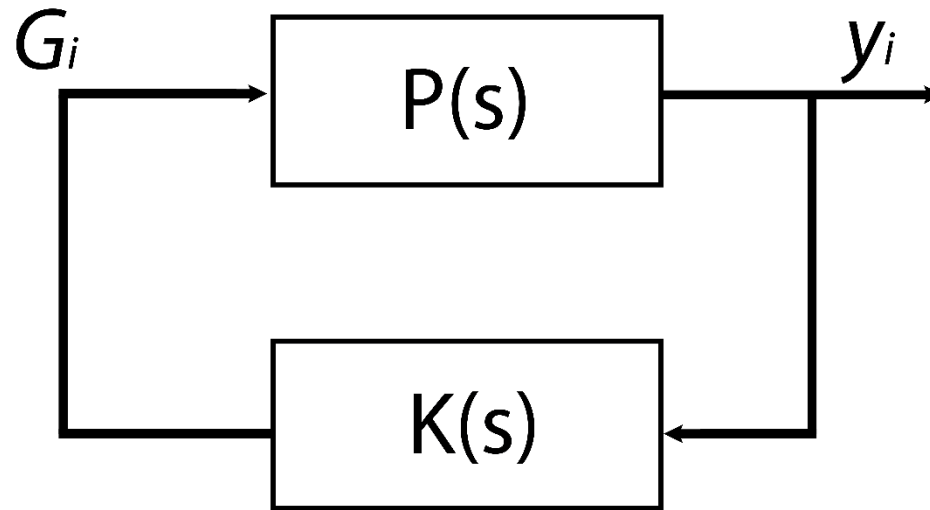
P_A –no eigenvalues in \mathbb{C}^+ (open RHP)

K –controller is stable

If K stabilizes the individual system for all λ_i other than the zero-eigenvalue (relative formation dynamics)



Vehicle's Dynamics



- Theorem 4: P : SISO

K stabilizes relative formation dynamics
iff the net encirclement of $-\lambda_i^{-1}$ by the
Nyquist plot of $-K(s)P(s)$ is \emptyset , $\forall \lambda_i \neq 0$



Vehicle's Dynamics

Proof: Nyquist criterion: Stability is equivalent to # of counterclockwise encirclements of $-1 + j0$ by $\lambda_i P(j\omega)K(j\omega) = \text{RHP-poles of } P(s) = \emptyset$

P :MIMO Let $\lambda_i = 1 + \mu_i \quad |\mu_i| \leq M, \forall \lambda_i \neq 0$

Close the loop around the unity block and have $\mu_i I$ as an uncertainty

Let $C(s) = P(s)K(s)(I - P(s)K(s))^{-1}$ be stable

• Theorem 5: K stabilizes the relative formation dynamics of MIMO- P if $\rho(C(j\omega)) < M^{-1}, \forall \omega \in (-\infty, \infty)$



More info

J. Alexander Fax and Richard M. Murray, “Information Flow and Cooperative Control of Vehicle Formations”, in *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, VOL. 49, NO. 9, pp 1465 – 1476, SEPTEMBER 2004, doi: [10.1109/TAC.2004.834433](https://doi.org/10.1109/TAC.2004.834433)

Παράδειγμα

- Εφαρμογή σε εργασία Robot Swarms στα πλαίσια του μαθήματος ρομποτικά συστήματα από τον Ευστάθιο Κοντουρά, Ιούλιος 2013 (Για λόγους ορθής απόδοσης των credits η εργασία παρουσιάζεται αυτούσια και όχι αποσπασματικά)

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών &
Τεχνολογίας Υπολογιστών

Ρομποτικά Συστήματα
Άσκηση 2

Κοντουράς Ευστάθιος
ΑΜ: 7017

Συνεργατικός έλεγχος σχηματισμού κινούμενων ρομποτικών οχημάτων παρουσία επικοινωνιακών περιορισμών.

Δεδομένα:

Δίνονται $N = 8$ δικτυωμένα ρομποτικά οχήματα καθένα εκ των οποίων περιγράφεται ως ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα συνεχούς χρόνου τρίτης τάξης. Όλα τα οχήματα κινούνται στον τρισδιάστατο χώρο που ορίζεται από έναν κύβο διαστάσεων $100 \times 100 \times 100$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι ο κύβος είναι κεντραρισμένος ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0,0)$ του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Το δυναμικό μοντέλο για το i -οστό όχημα δίνεται ως εξής:

$$\dot{x}_i = u_i, \quad (1)$$

όπου $\dot{x}_i = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^3$ και $u_i = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^3$, $i = 1, 2, \dots, N$ είναι τα διανύσματα κα-

τάστασης και εισόδου αντίστοιχα. Οι μεταβλητές κατάστασης x_1, x_2, x_3 αντιπροσωπεύουν τις χωρικές συντεταγμένες κάθε ρομποτικού οχήματος.

Υλοποίηση επικοινωνιακού γράφου.

Αρχικά κατασκευάζουμε ένα συμμετρικό πίνακα $R \in \mathcal{R}^{N \times N}$ με τυχαία στοιχεία $R(i, j) \in [0, 1]$ αν $i \neq j$ και $R(i, j) = 0$ αν $i = j$. Στη συνέχεια, προσδιορίζουμε τον πίνακα $G \in \mathcal{R}^{N \times N}$ (adjacency matrix) σύμφωνα με τον εξής κανόνα:

$$G(i, j) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu & 0.5 \leq R(i, j) \leq 1 \\ 0 & \alpha\nu & 0 \leq R(i, j) < 0.5 \end{cases}.$$

Μπορούμε πλέον να προσδιορίσουμε τον πίνακα $D \in \mathcal{R}^{N \times N}$ (degree matrix), καθώς σύμφωνα με τη θεωρία γράφων ισχύει:

$$D = \text{diag} \left(\sum_{j=1}^{j=N} G(1, j), \sum_{j=1}^{j=N} G(2, j), \dots, \sum_{j=1}^{j=N} G(N, j) \right).$$

Δηλαδή, ο πίνακας D είναι διαγώνιος και η τιμή του στοιχείου $D(i, i)$ υποδηλώνει τον αριθμό των οχημάτων με τα οποία επικοινωνεί το όχημα i .

Τέλος προσδιορίζουμε τον πίνακα $L \in \mathcal{R}^{N \times N}$ (laplasian matrix) σύμφωνα με τη σχέση:

$$L = D - G,$$

ενώ οι ιδιοτιμές του πίνακα L προσδιορίζονται μέσω της συνάρτησης `eig()` στο MatLab. Βάσει της εκφώνησης, υποθέτουμε ότι ο επικοινωνιακός γράφος παραμένει αναλλοίωτος με το πέρασμα του χρόνου ανεξάρτητα από την κίνηση των οχημάτων και τις μεταξύ τους χωρικές αποστάσεις.

Δυναμικό σύστημα ενός ρομποτικού οχήματος.

Προσαρμόζουμε τη δομή του δυναμικού συστήματος στη μορφή:

$$\dot{x}_i = P_A x_i + P_B u_i. \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τις (1) και (2) διαπιστώνουμε ότι:

$$P_A = O_{3 \times 3} \text{ και } P_B = I_{3 \times 3},$$

με τα O και I να συμβολίζουν τον μηδενικό και τον μοναδιαίο πίνακα αντίστοιχα. Σύμφωνα με τη θεωρία του άρθρου των Fax και Murray κάθε όχημα λαμβάνει τις μετρήσεις:

$$y_i = P_{C1} x_i \text{ και } z_{i,j} = P_{C2} (x_i - x_j) \text{ με } j \in \mathfrak{I}_i, \quad (3)$$

όπου \mathfrak{I}_i συμβολίζει το σύνολο των οχημάτων με τα οποία επικοινωνεί το όχημα i . Επισημαίνουμε ότι καθώς ο επικοινωνιακός γράφος δε μεταβάλλεται ισχύει ότι $\mathfrak{I}_i \neq \emptyset$, άρα η ικανοποιείται η σχετική απαίτηση του άρθρου. Ενδιαφερόμαστε για τη μελέτη της ευστάθειας του δικτυωμένου ρομποτικού συστήματος. Βάσει του θεωρήματος 3 η μελέτη της ευστάθειας του συστήματος που ορίζουν οι (2) και (3) για κάθε $i = 1, 2, \dots, N$ ανάγεται στη μελέτη της ευστάθειας του συστήματος:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= P_A x_i + P_B u_i \\ y_i &= P_{C1} x_i \\ z_i &= \lambda_i P_{C2} x_i, \end{aligned}$$

για κάθε $i = 1, 2, \dots, N$, όπου λ_i είναι η i -οστή ιδιοτιμή του πίνακα L . Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι μετράμε ή εκτιμούμε όλες τις καταστατικές μεταβλητές, δηλαδή $P_{C1} = P_{C2} = I_{3 \times 3}$.

Σχεδιασμός δυναμικού ελεγκτή.

Στόχος μας είναι ο σχεδιασμός ενός και μόνο δυναμικού ελεγκτή, ο οποίος να εξασφαλίζει ευστάθεια του συνολικού δικτυωμένου ρομποτικού συστήματος. Επιθυμούμε καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο οι τροχιές των επιμέρους οχημάτων να συγκλίνουν στην αρχή των αξόνων $O(0,0,0)$.

Σύμφωνα με τη θεωρία του άρθρου των Fax και Murray ο δυναμικός ελεγκτής έχει εξισώσεις:

$$u_i = K_C v_i + K_{D1} y_i + K_{D2} z_i \text{ με } \dot{v}_i = K_A v_i + K_{B1} y_i + K_{B2} z_i,$$

όπου: $K_{C1}, K_{D1}, K_{D2}, K_A, K_{B1}, K_{B2} \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ είναι οι ζητούμενοι πίνακες κερδών του δυναμικού ελεγκτή.

Σύμφωνα με το θεώρημα 3 η ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $O(0,0,0)$ ως προς το ρομποτικό σύστημα των N δικτυωμένων οχημάτων επιτυγχάνεται με χρήση ενός και μόνο μη κεντρικοποιημένου δυναμικού ελεγκτή, αρκεί αυτός να εξασφαλίζει ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου $O(0,0,0)$ ταυτόχρονα για όλα τα υποσυστήματα που περιγράφουν τη δυναμική συμπεριφορά των επιμέρους οχημάτων.

Λόγω του δυναμικού ελεγκτή το σύστημα που περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά του οχήματος i επαυξάνεται ως εξής:

$$\dot{x}_i = P_A x_i + P_B u_i \Rightarrow \dot{x}_i = (P_A + P_B K_{D1} P_{C1} + P_B K_{D2} P_{C2} \lambda_i) x_i + P_B K_C v_i$$

$$\dot{v}_i = K_A v_i + K_{B1} y_i + K_{B2} z_i \Rightarrow \dot{v}_i = (K_{B1} P_{C1} + K_{B2} P_{C2} \lambda_i) x_i + K_A v_i.$$

Έτσι το σύστημα γράφεται σε μητρική μορφή ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{v}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_A + P_B K_{D1} P_{C1} + P_B K_{D2} P_{C2} \lambda_i & P_B K_C \\ K_{B1} P_{C1} + K_{B2} P_{C2} \lambda_i & K_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ v_i \end{bmatrix} \Leftrightarrow \dot{\xi}_i = M_i \xi_i.$$

Παρατηρούμε ότι το $x_e = 0$ είναι προφανώς σημείο ισορροπίας του συστήματος. Προκειμένου να ικανοποιήσουμε την προδιαγραφή της ασυμπτωτικής ευστάθειας στηριζόμεστε στο κλασικό θεώρημα ευστάθειας Lyapunov και απαιτούμε:

$$M_i^T P + P M_i < 0, \forall i = 1, 2, \dots, N \text{ και } -P < 0. \quad (4)$$

Συνεπώς το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό μίας κοινή τετραγωνική συνάρτησης Lyapunov $V(\xi) = \xi^T P \xi$, όπου $P \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$, η οποία προσφέρει και τη δυνατότητα εκτίμησης της κοινής περιοχής ελκτικότητας γύρω από το $x_e = 0$ όλων των δικτυωμένων ρομποτικών οχημάτων. Οι επικοινωνιακοί πε-

ριορισμοί του γράφου διασύνδεσης υπεισέρχονται μέσω των ιδιοτιμών του πίνακα L .

Η σχέση (4) αποτελεί ένα μη-κυρτό και μη-γραμμικό σύστημα μητρικών ανισοτήτων ως προς το P και τα K_{C1} , K_{D1} , K_{D2} , K_A , K_{B1} , K_{B2} . Μπορούμε, ωστόσο με έναν απλό μαθηματικό χειρισμό να μετατρέψουμε τη σχέση (4) σε ένα κυρτό γραμμικό σύστημα μητρικών ανισοτήτων το οποίο επιδέχεται εύκολα λύση μέσω του λογισμικού MatLab.

Ο πίνακας M_i γράφεται:

$$M_i = \begin{bmatrix} P_A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{D1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{C1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{3 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{B1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{C1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} P_B \lambda_i & P_B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{D2} & 0 \\ 0 & K_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{C2} & 0 \\ 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{3 \times 3} \lambda_i & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{B2} & 0 \\ 0 & K_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{C2} & 0 \\ 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ M_i = A_1 + B_1 K_1 C_1 + B_2 K_2 C_2 + B_3 K_3 C_3 + B_4 K_4 C_4,$$

$$\text{όπου: } A_1 = \begin{bmatrix} P_A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} P_B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} K_{D1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} P_{C1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{3 \times 3} & 0 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} K_{B1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} P_{C1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_3 = \begin{bmatrix} P_B \lambda_i & P_B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_3 = \begin{bmatrix} K_{D2} & 0 \\ 0 & K_C \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} P_{C2} & 0 \\ 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{3 \times 3} \lambda_i & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad K_4 = \begin{bmatrix} K_{B2} & 0 \\ 0 & K_A \end{bmatrix}, \quad C_4 = \begin{bmatrix} P_{C2} & 0 \\ 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}.$$

Η σχέση (4) γράφεται:

$$(A_1 + B_1 K_1 C_1 + B_2 K_2 C_2 + B_3 K_3 C_3 + B_4 K_4 C_4)^T P + \\ + P(A_1 + B_1 K_1 C_1 + B_2 K_2 C_2 + B_3 K_3 C_3 + B_4 K_4 C_4) < 0 \Rightarrow$$

$$P^{-1}[(A_1 + B_1 K_1 C_1 + B_2 K_2 C_2 + B_3 K_3 C_3 + B_4 K_4 C_4)^T P + \\ + P(A_1 + B_1 K_1 C_1 + B_2 K_2 C_2 + B_3 K_3 C_3 + B_4 K_4 C_4)] P^{-1} < 0 \Rightarrow$$

$$P^{-1} A_1^T + P^{-1} C_1^T K_1^T B_1^T + P^{-1} C_2^T K_2^T B_2^T + P^{-1} C_3^T K_3^T B_3^T + P^{-1} C_4^T K_4^T B_4^T + \\ + A_1 P^{-1} + B_1 K_1 C_1 P^{-1} + B_2 K_2 C_2 P^{-1} + B_3 K_3 C_3 P^{-1} + B_4 K_4 C_4 P^{-1} < 0. \quad (5)$$

Θέτουμε στη σχέση (5)

$$Y_1 = K_1 C_1 P^{-1}, Y_2 = K_2 C_2 P^{-1}, Y_3 = K_3 C_3 P^{-1}, Y_4 = K_4 C_4 P^{-1}, Q = P^{-1} \quad (6)$$

και έχουμε:

$$A_1 Q + Q A_1^T + B_1 Y_1 + B_2 Y_2 + B_3 Y_3 + B_4 Y_4 + Y_1^T B_1^T + Y_2^T B_2^T + Y_3^T B_3^T + Y_4^T B_4^T < 0 \\ -Q < 0.$$

Παρατηρούμε ότι καταλήξαμε σε ένα κυρτό γραμμικό πρόβλημα μητρικών ανισοτήτων (LMI) το οποίο και μπορούμε να επιλύσουμε ως προς Q, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 . Αναγκαία και ικανή συνθήκη για τον προσδιορισμό των πινάκων K_1, K_2, K_3, K_4 μέσω της σχέσης (6), είναι οι πίνακες C_1, C_2, C_3, C_4 να είναι μη ιδιάζοντες, δηλαδή αντιστρέψιμοι. Ωστόσο, αν στα LMI's του MatLab παραμετροποιήσουμε πλήρως τους πίνακες Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 είναι πιθανό οι πίνακες K_1, K_2, K_3, K_4 να εμφανίσουν στις θέσεις των μηδενικών μπλοκ μη μηδενικά στοιχεία. Πραγματοποιούμε, επομένως τον εξής απλό χειρισμό:

- Παρατηρούμε ότι οι πίνακες K_1, K_2, K_3, K_4 είναι διαγώνιοι κατά μπλοκ και ότι ο πίνακας P είναι συμμετρικός και αντιστρέψιμος, άρα και ο P^{-1} θα είναι συμμετρικός.
- Οι πίνακες Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 προκύπτουν σαν γινόμενο ενός πίνακα κέρδους K_i , ενός πίνακα C_i και ενός πίνακα $Q, i = 1,2,3,4$.
- Αν ο πίνακας Q υποθεθεί διαγώνιος κατά μπλοκ τότε γίνεται ειδική περίπτωση συμμετρικού πίνακα χωρίς να παραβιάζονται οι αρχικές μας απαιτήσεις.
- Αν απαιτήσουμε οι πίνακες Y_i, C_i, Q να είναι όλοι διαγώνιοι κατά μπλοκ τότε σίγουρα οι πίνακες K_i θα επιστραφούν ως διαγώνιοι κατά μπλοκ, $i = 1,2,3,4$ (συνθήκη ικανή, αλλά όχι αναγκαία).

Έτσι, τα ζητούμενα κέρδη $K_{C1}, K_{D1}, K_{D2}, K_A, K_{B1}, K_{B2}$ του δυναμικού ελεγκτή προσδιορίζονται εύκολα λαμβάνοντας υπόψη την εσωτερική δομή των $K_i, i = 1,2,3,4$.

Παρατηρούμε ότι με τους προτεινόμενους πίνακες ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις που θέσαμε πλην μίας. Οι πίνακες C_1 και C_2 είναι μη αντιστρέψιμοι. Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε έντεχνα το πρόβλημα αυτό αν θεωρήσουμε τους ακόλουθους πίνακες:

$$C_1 = \begin{bmatrix} P_{C1} & 0 \\ 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} P_{C1} & 0 \\ 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

όπου το μοναδιαίο κάτω δεξιά μπλοκ δεν επηρεάζει σε τίποτα την κατασκευή του πίνακα M_i , αντιμετωπίζει όμως το πρόβλημα της δομικής μη αντιστροφικότητας των πινάκων C_1 και C_2 .

Αποτελέσματα Προσομοιώσεων.

Ο πίνακας R (random matrix) προέκυψε:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0.9462 & 0.0569 & 0.3738 & 0.9622 & 0.1519 & 0.0110 & 0.4963 \\ 0.9462 & 0 & 0.4503 & 0.5816 & 0.1858 & 0.3971 & 0.5733 & 0.6423 \\ 0.0569 & 0.4503 & 0 & 0.1161 & 0.1930 & 0.3747 & 0.7897 & 0.2213 \\ 0.3738 & 0.5816 & 0.1161 & 0 & 0.3416 & 0.1311 & 0.2354 & 0.8371 \\ 0.9622 & 0.1858 & 0.1930 & 0.3416 & 0 & 0.4350 & 0.4480 & 0.9711 \\ 0.1519 & 0.3971 & 0.3747 & 0.1311 & 0.4350 & 0 & 0.5694 & 0.8464 \\ 0.0110 & 0.5733 & 0.7897 & 0.22354 & 0.4480 & 0.5694 & 0 & 0.5060 \\ 0.4963 & 0.6423 & 0.2213 & 0.8371 & 0.9711 & 0.8464 & 0.5060 & 0 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια προσδιορίζουμε τον πίνακα G (adjacency matrix) μέσω του κανόνα που δίνεται στην εκφώνηση και έχουμε:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας D (degree matrix) προκύπτει από την αντίστοιχη θεωρητική σχέση και είναι:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Τέλος, προσδιορίζουμε τον πίνακα $L = D - A$ (Laplacian matrix), οπότε:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής και κάθε στήλης του πίνακα L ισούται με το μηδέν, γεγονός που οφείλεται στο ότι ο επικοινωνιακός γράφος είναι μη κατευθυντικός. Προχωρούμε στην επίλυση των LMΓ's και προσδιορίζουμε τα κέρδη του δυναμικού ελεγκτή:

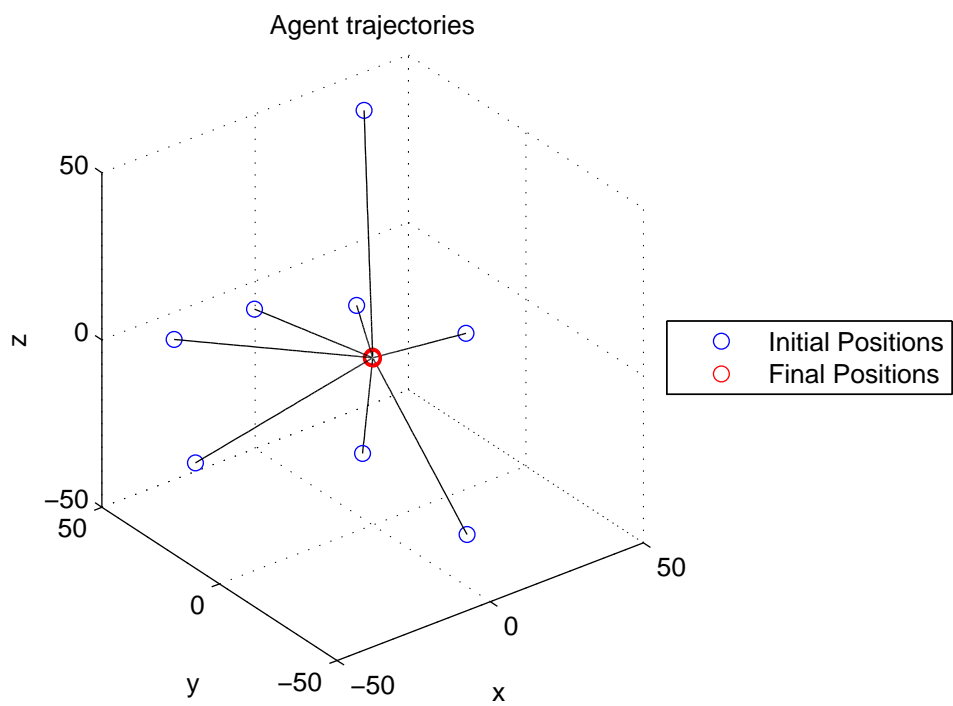
$$K_A = \begin{bmatrix} -0.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5000 \end{bmatrix}, \quad K_{D1} = \begin{bmatrix} -0.5000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5000 \end{bmatrix},$$

$$K_{D2} = 10^{-19} \begin{bmatrix} -0.1937 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1937 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1937 \end{bmatrix},$$

$$K_{B1} = K_{B2} = K_C = O_{3 \times 3}.$$

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες που σχετίζονται με τη δυναμική φόση του ελεγκτή είναι μηδενικοί. Αυτό σημαίνει ότι το για το δοθέν δυναμικό μοντέλο το σημείο ισορροπίας $x_e = 0$ μπορεί να καταστεί ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές με χρήση ενός στατικού και μόνο ελεγκτή.

Τέλος, παραθέτουμε τις αρχικές και τελικές θέσεις των οχημάτων, καθώς και την τροχιά που διαγράφουν στον τρισδιάστατο χώρο. Υποθέτουμε ότι η αρχική διάταξη των οχημάτων στο χώρο είναι τυχαία. Η προσομοίωση τρέχει για χρονικό διάστημα $t = 20$ (sec). Όπως ήταν αναμενόμενο, οι τροχιές των οχημάτων συγκλίνουν στην αρχή των αξόνων.



Σχήμα 1: Προσομοίωση κίνησης δικτυωμένου ρομποτικού συστήματος.

Παράρτημα: Κώδικας σε MatLab

Script προσομοίωσης.

```
% Exercise 2.

% Generate matrices R (random), G (adjacency), D (degree), L (lapla
% cian)
clear all
close all
clc

N = 8;

R = generateR(N);
G = generateG(R, N);
D = generateD(G, N);
L = D - G;
eigL = eig(L);

% Initialize known matrices (Pa, Pb, Pc1, Pc2) -> system matrices.
dim = 3;

Pa = zeros(dim);
Pb = eye(dim);
Pc1 = eye(dim);
Pc2 = eye(dim);

Z = zeros(dim);
I = eye(dim);

% Define known matrices.
A1 = [ Pa Z;
      Z Z ];

B1 = [ Pb Z;
      Z Z ];

B2 = [ Z Z;
      I Z ];

C1 = [ Pc1 Z;
      Z I ];

C2 = [ Pc1 Z;
      Z I ];

C3 = [ Pc2 Z;
      Z I ];

C4 = [ Pc2 Z;
      Z I ];

B3 = zeros(2*dim, 2*dim, N);
B4 = zeros(2*dim, 2*dim, N);

for i = 1:1:N
```

```

        B3(:, :, i) = [ Pb*eigL(i) Pb;
                      Z         Z ];
    end

    for i = 1:1:N
        B4(:, :, i) = [     Z     Z;
                        I*eigL(i) I ];
    end

%% Define LMIs.
setlmis([])

% Declare LMI variables.
Q = lmivar(1, [dim 1;dim 1]);
Y1 = lmivar(1, [dim 1;dim 1]);
Y2 = lmivar(1, [dim 1;dim 1]);
Y3 = lmivar(1, [dim 1;dim 1]);
Y4 = lmivar(1, [dim 1;dim 1]);

% Define LMI.
for i =1:1:N
    lmiterm([i 1 1 Q], A1, 1);
    lmiterm([i 1 1 Q], 1, A1');

    lmiterm([i 1 1 Y1], B1, 1);
    lmiterm([i 1 1 Y2], B2, 1);
    lmiterm([i 1 1 Y3], B3(:, :, i), 1);
    lmiterm([i 1 1 Y4], B4(:, :, i), 1);

    lmiterm([i 1 1 -Y1], 1, B1');
    lmiterm([i 1 1 -Y2], 1, B2');
    lmiterm([i 1 1 -Y3], 1, B3(:, :, i)');
    lmiterm([i 1 1 -Y4], 1, B4(:, :, i)');
end

lmiterm([N + 1 1 1 Q], -1, 1);

%% Obtain LMI solutions.
lmsys = getlmis;
[tmin, xfeas] = feasp(lmsys);
q = tmin;

Q = dec2mat(lmsys, xfeas, Q);
Y1 = dec2mat(lmsys, xfeas, Y1);
Y2 = dec2mat(lmsys, xfeas, Y2);
Y3 = dec2mat(lmsys, xfeas, Y3);
Y4 = dec2mat(lmsys, xfeas, Y4);

K1 = Y1/Q/C1;
K2 = Y2/Q/C2;
K3 = Y3/Q/C3;
K4 = Y4/Q/C4;

%% Obtain controller matrices.
Ka = K4((dim+1):(2*dim), (dim+1):(2*dim));
Kb1 = K2(1:dim, 1:dim);
Kb2 = K4(1:dim, 1:dim);
Kc = K3((dim+1):(2*dim), (dim+1):(2*dim));

```

```

Kd1 = K1(1:dim,1:dim);
Kd2 = K3(1:dim,1:dim);

% Plot agent trajectories in 3-D space.

% Random initial values
tf      = 20;
x0      = zeros(N,2*dim); % Contains initial values for dy
x0(:,1:dim) = 100*rand(N,dim) - 50; % namic controller as well.

tspan = linspace(0,tf,100);

% Solving ode45.
options = odeset();
[t,x] = ode45(@(t,x) joinedSystems(t, x, N, dim, Pa, Pb, Pc1, ...
Pc2, Ka, Kb1, Kb2, Kc, Kd1, Kd2, eigL), tspan, ...
reshape(x0, numel(x0), 1), options);

x = reshape(x, numel(t), N, 2*dim);

% Plot trajectories.
plot3(x(1,:,1),x(1,:,2),x(1,:,3),'bo');
hold on
plot3(x(end,:,1),x(end,:,2),x(end,:,3),'ro');
plot3(x(:,:,1),x(:,:,2),x(:,:,3),'k-');

title('Agent Trajectories')
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
legend('Initial Positions', 'Final Positions', ...
'location', 'eastoutside')
grid on
axis([-50 50 -50 50 -50 50])

```

Υλοποιήσεις συναρτήσεων.

```

%% Generate random symmetric matrix R.
function R = generateR(N)

R = zeros(N);

for i = 1:1:N
    for j = 1:1:N
        if i ~= j
            temp = rand();
            R(i,j) = temp;
            R(j,i) = temp;
        else
            R(i,j) = 0;
        end
    end
end

end

%% Generate adjacency matrix G.
function G = generateG(R, N)

```

```

G = zeros(N);

for i = 1:1:N
    for j = 1:1:N
        if R(i,j) >= 0.5
            G(i,j) = 1;
        else
            G(i,j) = 0;
        end
    end
end

end

%% Generate degree matrix D.
function D = generatedD(G, N)

D = zeros(N);

for i = 1:1:N
    sum_i = sum(G(i,:)) ;
    D(i,i) = sum_i;
end

end

%% This function is used as an argument for ode45.

% This function is necessary for decoupling the state space model
into a system of ordinary differential equations.
function xdot = joinedSystems(t, x, N, dim, Pa, Pb, Pc1, Pc2, Ka, ...
    Kb1, Kb2, Kc, Kd1, Kd2, eigL)

% Build matrix A = diag(As1, As2, ... AsN). Asi is associated with
% the i-th subsystem.
for i = 1:1:N
    first_el = (i-1)*2*dim + 1;
    last_el = i*2*dim;

    A(first_el:last_el, first_el:last_el) = ...

    [ Pa + Pb*Kd1*Pc1 + Pb*Kd2*Pc2*eigL(i)      Pb*Kc;
      Kb1*Pc1 + Kb2*Pc2*eigL(i)                  Ka ];
end

% Define differential equations system.
xdot = A*x;

end

```


Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0



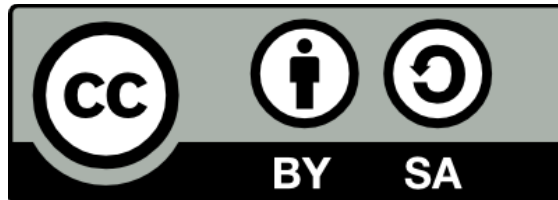
Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Αντώνιος Τζές, Ευάγγελος Δερματάς, «Ρομποτικά Συστήματα. Information Flow and Cooperative Control of Vehicle Formations». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/courses/EE804/index.php>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Σύμφωνα με αυτήν την άδεια ο δικαιούχος σας δίνει το δικαίωμα να:

Μοιραστείτε — αντιγράψετε και αναδιανέμετε το υλικό

Προσαρμόστε — αναμείξτε, τροποποιήστε και δημιουργήστε πάνω στο υλικό για κάθε σκοπό

Υπό τους ακόλουθους όρους:

Αναφορά Δημιουργού — Θα πρέπει να καταχωρίσετε αναφορά στο δημιουργό , με σύνδεσμο της άδειας

Παρόμοια Διανομή — Αν αναμείξετε, τροποποιήσετε, ή δημιουργήσετε πάνω στο υλικό, πρέπει να διανείμετε τις δικές σας συνεισφορές υπό την ίδια άδεια όπως και το πρωτότυπο

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/4)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

Εικόνα 1: The attraction/repulsion function $g(\cdot)$, Gazi Veysel. "Stability Analysis of Swarms." Electronic Thesis or Dissertation. Ohio State University, 2002. OhioLINK Electronic Theses and Dissertations Center., URL:

https://etd.ohiolink.edu/ap/10?0::NO:10:P10_ACCESSION_NUM:osu1029812963

Εικόνα 2: A $g(\cdot)$ function with linear attraction and unbounded repulsion, Gazi Veysel. "Stability Analysis of Swarms." Electronic Thesis or Dissertation. Ohio State University, 2002. *OhioLINK Electronic Theses and Dissertations Center.*, URL:

https://etd.ohiolink.edu/ap/10?0::NO:10:P10_ACCESSION_NUM:osu1029812963

