



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Ρομποτικά Συστήματα

Ενότητα 11: On the Coordinated Control of Robotic
Vehicles

Αντώνιος Τζές – Ευάγγελος Δερματάς
Σχολή Πολυτεχνική
Τμήμα ΗΜ&ΤΥ

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι η παρουσίαση και εξοικείωση με τα ακόλουθα στοιχεία ρομποτικών συστημάτων:
- On the Coordinated Control of Robotic Vehicles



Περιεχόμενα ενότητας

- On the Coordinated Control of Robotic Vehicles



Ορισμός

- Consensus= Convergence to a common value
- Our goal: Applications in cooperative control of multi-agent systems



Background- Problem Statement

- Digraph= Directed Graph = pair (N, \mathcal{E}) where:
$$\begin{cases} N = \text{set of Nodes} \\ \mathcal{E} \in N^2 = \text{set of ordered pairs of Nodes} \end{cases}$$
- Undirected graph = Same as graph but,
 $\{\mathcal{E} \in N^2 = \text{set of **un**ordered pairs of Nodes}$
- Digraph= Sequence of ordered edges
 $(u_{i1}, u_{i2}), (u_{i2}, u_{i3}), \dots, \text{ where } u_{ij} \in N$



Background- Problem Statement

- An undirected digraph is strongly connected if \in directed path from every node to every other node
- Directed tree \triangleq Digraph where every node except for the root has exactly one parent
- Spanning tree \triangleq Directed tree formed by graph edges that connect all the nodes of the graph
- A digraph has a spanning tree if \in a node having a directed path to all other nodes



Background- Problem Statement

- Adjacency matrix $A = [a_{ij}]$ of a weighted digraph is defined as:

$$a_{ij} = 0, a_{ij} > 0, \text{ if } (j, i) \in \mathcal{E}, i \neq j$$

- Laplacian matrix $L = [\ell_{ij}]$ of a weighted digraph is defined as:

$$\ell_{ij} = \sum_j a_{ij}, \ell_{ij} = -a_{ij}, i \neq j$$



Matrix Theory

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ are $n \times n$ matrices
- Given $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, the digraph of A , denoted $\Gamma(A)$, is the digraph of n -vertices $u_i, i \in I: \exists$ a directed edge in $\Gamma(A)$ from u_j to u_i iff $a_{ij} \neq 0$
- In graph theory matrix A -positive if all entities are nonnegative (positive) vectors
- Similarly vector-positive if all entities are nonnegative (positive) elements



Matrix Theory

- If A 's all row sums are +1, then A is a (row) stochastic matrix
- A stochastic matrix P is indecomposable and aperiodic (SIA) if $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = \mathcal{J}v^T$,

where $\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$ and v some column vector



Matrix Theory

- Perron-Frobenius Theorem:

➤ If A nonnegative is irreducible \Leftrightarrow digraph of A is strongly connected, then $\rho(A)$ is a simple eigenvalue of A associated with a positive eigenvector, where $\rho(\cdot) \triangleq$ spectral radius of a matrix

➤ If a nonnegative A is primitive $\triangleq A$ is irreducible and $\rho(A)$ is a unique eigenvalue with maximum modulus then $\lim_{k \rightarrow \infty} [\rho(A)^{-1} A^k] \rightarrow \omega v^T$, where ω and v are left and right positive eigenvectors associated with $\rho(A)$ satisfying $\omega v^T = 1$



Consensus Protocols

- A continuous-time consensus protocol is summarized as:

$$\dot{x}_i(t) = - \sum_{j \in \mathcal{J}_i(t)} \alpha_{ij}(t) (x_i(t) - x_j(t)), \alpha_{ij}(t) > 0$$

where:

$\mathcal{J}_i(t)$ represents a set of agents whose information is available to agent i at time t

- The continuous-time consensus linear protocol can be written as:

$$\dot{x} = -\mathcal{L}x, \text{ where } \mathcal{L} \text{ the Laplacian}$$



Consensus Protocols (More info)

- Wei Ren, Randal W. Beard, Ella M. Atkins, “A Survey of Consensus Problems in Multi-agent Coordination”, in *2005 American Control Conference*, June 8-10, 2005. Portland, OR, USA



Virtual Leaders, Artificial Potentials and Coordinated Control

- Schooling Maneuver

Steady group translation (center of mass of group translates)

- Flocking Maneuver

Motion where agents circle a stationary point such that the center of mass is stationary

- Aggregation

Gather a group of randomly scattered robots in the

 environment and form the robot clusters

Virtual Leaders, Artificial Potentials and Coordinated Control

- Foraging

Robot collects objects and delivers them at some pre-specified home location

- Clustering and Sorting

Nest building behavior of termites

- Exploration

Dispersion, robot distribute themselves to maximize the rate at which the environment is

explored



Virtual Leaders, Artificial Potentials and Coordinated Control (More info)

- Naomi Ehrich Leonard and Edward Fiorelli, “Virtual Leaders, Artificial Potentials and Coordinated Control of Groups”, *in proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida, USA, December 2001



Using phase-transition techniques in self-driven particles

- Position of the particle:

$$x^i(k + 1) = x^i(k) + u^i(k)\Delta t,$$

- The angle of the particle is then:

$$\theta^i(k + 1) = \frac{1}{1+N^i(k)} \left(\theta^i(k) + \sum_{j \in S^i(k)} \theta^j(k) \right) + \xi^i(k),$$

where:

$x^i(k)$ =position, $\theta^i(k)$ =orientation

$S^i(k)$ =set of neighbors of individual i at time k

$\xi^i(k)$ =random variable with uniform distribution in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



Using phase-transition techniques in self-driven particles (more info)

- Tamas Vicsek, Andras Czirok, Eshel Ben-Jacob, Inon Cohen, and Ofer Shochet, “NOVEL TYPE OF PHASE TRANSITION IN A SYSTEM OF SELF-DRIVEN PARTICLES”, in *Physics Review Letter*, Vol. 75, No 6, pp. 1226-1229, August 7, 1995



Stability Analysis of Swarms

- Robot Model

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cos \theta \\ \dot{y} = u \sin \theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \left| \begin{array}{l} \dot{u} = \frac{1}{m} F \\ \dot{\omega} = \frac{1}{J} \tau \end{array} \right.$$

- Let a point

$$z = \begin{bmatrix} x + d \cos \theta \\ y + d \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\ddot{z} = \begin{bmatrix} -u\omega \sin \theta & -d\omega^2 \cos \theta \\ u\omega \cos \theta & -d\omega^2 \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \cos \theta & -\frac{d}{J} \sin \theta \\ \frac{1}{m} \sin \theta & \frac{d}{J} \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ \tau \end{bmatrix}$$



Stability Analysis of Swarms

• If $\begin{bmatrix} F \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \cos \theta & -\frac{d}{J} \sin \theta \\ \frac{1}{m} \sin \theta & \frac{d}{J} \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} \left[u - \begin{bmatrix} -u\omega \sin \theta & -d\omega^2 \cos \theta \\ u\omega \cos \theta & -d\omega^2 \sin \theta \end{bmatrix} \right]$, then

\Downarrow
 $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \ddot{z} = u$

• $\det \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \cos \theta & -\frac{d}{J} \sin \theta \\ \frac{1}{m} \sin \theta & \frac{d}{J} \cos \theta \end{bmatrix} = \frac{d}{mJ}$

• Let $J = \dot{z}$, then $\left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = J \\ \dot{J} = u \\ \dot{\theta} = -\frac{1}{d}J_1 \sin \theta + \frac{1}{d}J_2 \cos \theta \\ \theta \triangleq \text{unobservable states, when } J = 0 \hookrightarrow \dot{\theta} = 0 \\ \text{(zero dynamics are marginally stable)} \end{array} \right\}$



Stability Analysis of Swarms

- Full Linearization:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \cos \theta \\ \dot{y} &= u \sin \theta\end{aligned}$$

$$\dot{u} = \frac{1}{m} \xi \quad \leftarrow \text{integrator @ the force input}$$

$$\dot{\xi} = u_1$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J} u_2$$

$$u_1 = \dot{F}$$

$$u_2 = \tau$$

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \dot{z} = \begin{bmatrix} u \cos \theta \\ u \sin \theta \end{bmatrix}, \ddot{z} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \xi \cos \theta & -u \omega \sin \theta \\ \frac{1}{m} \xi \sin \theta & u \omega \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$\ddot{z} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{m} \xi \omega \sin \theta & -u \omega^2 \cos \theta \\ \frac{2}{m} \xi \omega \cos \theta & -u \omega^2 \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \cos \theta & -\frac{u}{J} \sin \theta \\ \frac{1}{m} \sin \theta & \frac{u}{J} \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$



Stability Analysis of Swarms

$$\bullet \text{ If } \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \cos \theta & -\frac{u}{J} \sin \theta \\ \frac{1}{m} \sin \theta & \frac{u}{J} \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} \left[v - \begin{bmatrix} -\frac{2}{m} \xi \omega \sin \theta & -u \omega^2 \cos \theta \\ \frac{2}{m} \xi \omega \cos \theta & -u \omega^2 \sin \theta \end{bmatrix} \right]$$

$$\ddot{z} = v = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \cos \theta & -\frac{u}{J} \sin \theta \\ \frac{1}{m} \sin \theta & \frac{u}{J} \cos \theta \end{bmatrix} = \frac{u}{mJ} \neq 0, \text{ if } u \neq 0$$

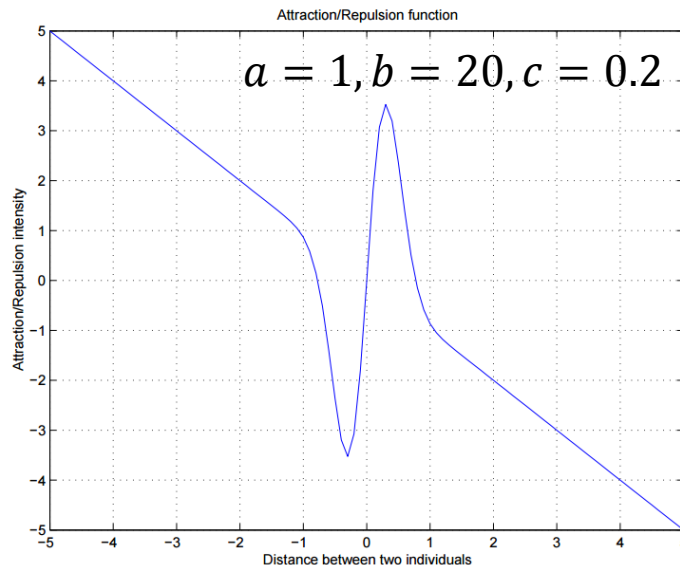


Swarm model-Synchronous-No time delays

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1, j \neq i}^M g(x^i - x^j), i = 1, \dots, M$$

where $g(\cdot)$ = attraction and repulsion between members

$$g(y) = -y \left[a - b \exp\left(-\frac{\|y\|^2}{c}\right) \right], \quad a, b, c > 0, b > a, \|y\| = \sqrt{y^T y}$$



Πηγή: Gazi, Veyssel. "Stability Analysis of Swarms." Electronic Thesis or Dissertation. Ohio State University, 2002. *OhioLINK Electronic Theses and Dissertations Center.*, URL: https://etd.ohiolink.edu/ap/10?0::NO:10:P10_ACCESSION_NUM:osu1029812963

$g(y)$ - attractive for large $\|y\|$
- repulsive for small $\|y\|$

Εικόνα 1: The attraction/repulsion function $g(\cdot)$



Swarm model-Synchronous-No time delays

$$y = \left\{ y = 0, \text{ or } \|y\| = \sqrt{c \ln \left(\frac{b}{a} \right)} = \delta : g(y) = 0 \right\}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i \text{ is stationary for all } t$$

Proof:

$$\dot{\bar{x}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, j \neq i}^M (x^i - x^j) \left[\alpha - b \exp \left(-\frac{\|x^i - x^j\|}{c} \right) \right] = 0$$

A swarm member is a free agent if it does not have any neighbors in its repulsion range, or $\|x^i - x^j\| > \delta, \forall j \in S, j \neq i, S = \{1, \dots, M\}$



Swarm model-Synchronous-No time delays

Set $e^i = x^i - \bar{x}$,

if i is a free agent and $\|e^i(t)\| = \|x^i(t) - \bar{x}\| > \delta$, then at time t its motion is in a direction of decrease of $\|e^i(t)\|$

▷Proof:

$$\sum_{j=1}^M x^j = M\bar{x} \quad \hookrightarrow \quad \sum_{j=1}^M (x^i - x^j) = M(x^i - \bar{x}) = Me^i$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= - \sum_{j=1, j \neq i}^M (x^i - x^j) \left[\alpha + b \exp\left(-\frac{\|x^i - x^j\|^2}{c}\right) \right] \\ &= -\alpha Me^i + b \sum_{j=1, j \neq i}^M \exp\left(-\frac{\|x^i - x^j\|^2}{c}\right) (x^i - x^j) \end{aligned}$$

Since $\dot{\bar{x}} = 0 \hookrightarrow \dot{e}^i = \dot{x}^i$

Let $V_i = \frac{1}{2} e^{iT} e^i$ (Lyapunov function candidate)



Swarm model-Synchronous-No time delays

$$\begin{aligned}
 V_i &= \dot{e}^{iT} e^i = -\alpha M \|e^i\|^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^M b \exp\left(-\frac{\|x^i - x^j\|^2}{c}\right) (x^i - x^j)^T e^i \\
 &\leq -\alpha M \|e^i\|^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^M \underbrace{b \exp\left(-\frac{\|x^i - x^j\|^2}{c}\right) \|x^i - x^j\|}_{\text{Decreasing function of the distance with the}} \|e^i\|
 \end{aligned}$$

Decreasing function of the distance with the maximum $\delta \exp\left(-\frac{\delta^2}{c}\right)$ @ $\|x^i - x^j\| = \delta$

$$\begin{aligned}
 &\leq -\alpha M \|e^i\|^2 + b(M-1)\delta \exp\left(-\frac{\delta^2}{c}\right) \|e^i\| \\
 &= -\alpha \|e^i\|^2 - (M-1) \left[\alpha \|e^i\| - b\delta \exp\left(-\frac{\delta^2}{c}\right) \right] \|e^i\|,
 \end{aligned}$$

and if $\|e^i\| \geq \frac{b\delta}{\alpha} \exp\left(-\frac{\delta^2}{c}\right) = 1$

$$\leq -\alpha \|e^i\|^2 = -2\alpha V_i$$



↪ This proof does not imply that x^i will converge to \bar{x} for all i

Swarm model-Synchronous-No time delays

- Theorem 1: As time converges all members of the swarm converge to

$$B_\epsilon(\bar{x}) = \{x: \|x - \bar{x}\| \leq \epsilon\},$$

$$\text{where } \epsilon = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{c}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{at} \quad \bar{t} = \max_{i \in S} \left\{ -\frac{1}{2\alpha} \ln \left(\frac{\epsilon^2}{2V_i(0)} \right) \right\}$$

▷Proof:

$$V_i(t) \leq V_i(0)e^{-2\alpha t}$$

$$\dot{V}_i = -\alpha M \|e^i\|^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^M b \exp\left(-\frac{\|x^i - x^j\|^2}{c}\right) (x^i - x^j)^T e^i$$

$$\text{If } \|e^i\| > \frac{b}{\alpha M} \sum_{j=1, j \neq i}^M \exp\left(-\frac{\|x^i - x^j\|^2}{c}\right) \|x^i - x^j\| \quad \hookrightarrow \dot{V}_i < 0$$

↓

$$\frac{\theta}{\theta_y} \left(y \exp\left(-\frac{y^2}{c}\right) \right) = \exp\left(-\frac{y^2}{c}\right) - \frac{2y^2}{c} \exp\left(-\frac{y^2}{c}\right) = 0 \quad \text{or} \quad @ \quad \|x^i - x^j\| = \sqrt{\frac{c}{2}}$$



Swarm model-Synchronous-No time delays

Maximum occurs when the members are at a distance $\sqrt{\frac{c}{2}}$ from each other or $\dot{V}_i < 0$

as long as $\|e^i\| > \frac{b(M-1)}{\alpha M} \sqrt{\frac{c}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$

Conservative bond since we used $(x^i - x^j)^T e^i \leq \|x^i - x^j\| \|e^i\|$ and assumed that $\exp\left(-\frac{\|x^i - x^j\|^2}{c}\right) \|x^i - x^j\|$ are at their peak values $\forall j$ and i

New question: Will the swarm members stop their motion or will they start an oscillatory motion?



Swarm model-Synchronous-No time delays

- Let $x = [x^{iT}, \dots, x^{MT}]^T$ and $\Omega_e = \{x: \dot{x} = 0\}$
- Theorem 2: Considering the aforementioned swarm with attraction/repulsion function $g(\cdot)$, as $t \rightarrow \infty$, we have $x(t) \rightarrow \Omega_e$

▷Proof: Generalized Lyapunov Function

$$J(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, j \neq i}^M \left[\alpha \|x^i - x^j\|^2 + bc \exp\left(-\frac{\|x^i - x^j\|^2}{c}\right) \right]$$

$$\begin{aligned} \nabla_{x^i} J(x) &= \sum_{j=1, j \neq i}^M \left[\alpha(x^i - x^j) - b(x^i - x^j) \exp\left(-\frac{\|x^i - x^j\|^2}{c}\right) \right] \\ &= \sum_{j=1, j \neq i}^M (x^i - x^j) \left[\alpha - b \exp\left(-\frac{\|x^i - x^j\|^2}{c}\right) \right] \\ &= \sum_{j=1, j \neq i}^M g(x^i - x^j) = -\dot{x}^i \end{aligned}$$



Swarm model-Synchronous-No time delays

$$\dot{J}(x) = [\nabla_x J(x)]^T \dot{x} = \sum_{i=1}^M \left[[\nabla_{x^i} J(x)]^T \right] \dot{x}^i = \sum_{i=1}^M [-\dot{x}^i]^T \dot{x}^i = \sum_{i=1}^M \|\dot{x}^i\|^2 \leq 0$$

$$\Omega = \{x: \dot{J}(x) = 0\} = \{x: \dot{x} = 0\} = \Omega_e \text{ or distributed nature}$$

$$J_i(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^M \left[\alpha \|x^i - x^j\|^2 + bc \exp\left(-\frac{\|x^i - x^j\|^2}{c}\right) \right]$$

$$\dot{x}^i = -\nabla_{x^i} J_i(x) = -\nabla_{x^i} J(x), \text{ where } J(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M J_i(x)$$



Attraction/Repulsion Functions

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1, j \neq i}^M g(x^i - x^j), \quad i = 1, \dots, M$$

$$\#g(y) = -y [g_\alpha(\|y\|) - g_r(\|y\|)], \quad \begin{cases} g_\alpha: \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+, \text{ long range } \ell_\alpha \\ g_r: \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+, \text{ long range } \ell_r \end{cases}$$

$$\#g_\alpha(\delta) = g_r(\delta), \quad \begin{cases} \forall \|y\| > \delta, g_\alpha(\|y\|) > g_r(\|y\|) \\ \forall \|y\| < \delta, g_\alpha(\|y\|) < g_r(\|y\|) \end{cases}$$

$$\#g(y) = -g(-y)$$

$$\# \begin{cases} \exists J_\alpha: \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+, \nabla_y J_\alpha(\|y\|) = yg_\alpha(\|y\|) \\ \exists J_r: \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+, \nabla_y J_r(\|y\|) = yg_r(\|y\|) \end{cases}$$

J_α : potential field of attraction

J_r : potential field of repulsion



Attraction/Repulsion Functions

$$i.e. \quad g_a(\|y\|) = \alpha, \quad g_r(\|y\|) = b \exp\left(-\frac{\|y\|^2}{c}\right),$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= - \sum_{j=1, j \neq i}^M [g_a(\|x^i - x^j\|) - g_r(\|x^i - x^j\|)] (x^i - x^j) = \\ &= - \sum_{j=1, j \neq i}^M [\nabla_{x^i} J_a(x)(\|x^i - x^j\|) - \nabla_{x^i} J_r(x)(\|x^i - x^j\|)] \end{aligned}$$

min of $J_a(\|x^i - x^j\|)$ occurs at $\|x^i - x^j\|=0$

min of $-J_r(\|x^i - x^j\|)$ occurs at $\|x^i - x^j\| \rightarrow \infty$

min of $J_a(\|x^i - x^j\|) - J_r(\|x^i - x^j\|)$ occurs at $\|x^i - x^j\|=\delta$



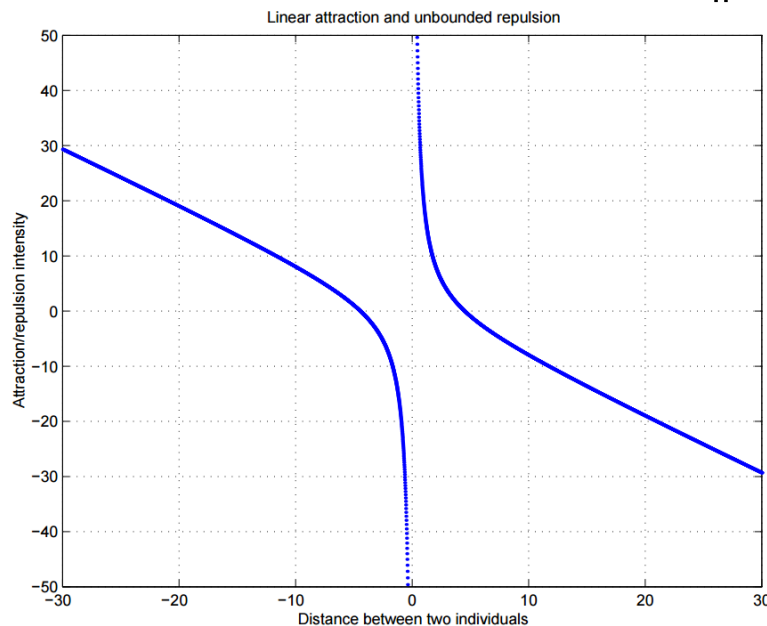
Attraction/Repulsion Functions

- If more than two individuals exist

$\min J_a(\|x^i - x^j\|) - J_r(\|x^i - x^j\|)$ does not necessarily occur @ $\|x^i - x^j\| = \delta$

- Unbounded repulsion + Linear attraction

$$g_a(\|x^i - x^j\|) \geq \alpha \quad g_r \leq \frac{b}{\|x^i - x^j\|^2}$$



Πηγή: Gazi, Veysel. "Stability Analysis of Swarms." Electronic Thesis or Dissertation. Ohio State University, 2002. *OhioLINK Electronic Theses and Dissertations Center.*, URL: https://etd.ohiolink.edu/ap/10?0::NO:10:P10_ACCESSION_NUM:osu1029812963

*Extension: +almost constant attraction
 $g_a(\|x^i - x^j\|) \rightarrow 0$ as $\|x^i - x^j\| \rightarrow \infty$

i.e. $g_a(\|x^i - x^j\|) \geq \frac{a}{\|x^i - x^j\|}$



Εικόνα 2: A $g(\cdot)$ function with linear attraction and unbounded repulsion

Attraction/Repulsion Functions - Extensions

$$\dot{x}^i = - \sum_{j=1, j \neq i}^M g^{ij}(x^i - x^j)$$

$$\# g^{ij}(x^i - x^j) = -g^{ji}(x^j - x^i)$$

$$\text{if } (x^i - x^j) = (x^k - x^\ell) \not\Rightarrow g^{ji}(x^j - x^i) = g^{k\ell}(x^k - x^\ell)$$

$$a_m = \min_{1 \leq i, j \leq M} \{a_{ij}\}$$

$$b_m = \max_{1 \leq i, j \leq M} \{b_{ij}\}$$



Adding Point-Mass Dynamics


$$\dot{x}^i = u^i$$

$$\dot{u}^i = \frac{1}{m_i} \left[\sum_{j=1, j \neq i}^M g(x^i - x^j) - a_i \right], \quad u^{iT} a_i > 0 \text{ if } u^i \neq 0$$

Define: $J'(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M m_i \|u^i\|^2 + J(x)$

$$\begin{aligned} J'(x) &= \sum_{i=1}^M m_i \dot{u}^{iT} u^i + \sum_{i=1}^M [\nabla_{x^i} J(x)]^T \dot{x}^i = \sum_{i=1}^M [m_i \dot{u}^i + \nabla_{x^i} J(x)]^T u^i = \\ &= - \sum_{i=1}^M u^{iT} a_i \quad (\text{Since } \nabla_{x^i} J(x) = -\dot{x}^i = -u^i) \end{aligned}$$

or a point mass control system with a control input:


$$u^i = -\nabla_{x^i} J(x) - a_i = \sum_{j=1, j \neq i}^M g(x^i - x^j) - a_i \Rightarrow \begin{cases} \text{as } t \rightarrow \infty \\ u^i \rightarrow 0 \end{cases}$$

More info

Gazi, Veysel. "Stability Analysis of Swarms." Electronic Thesis or Dissertation. Ohio State University, 2002. *OhioLINK Electronic Theses and Dissertations Center.*, URL: https://etd.ohiolink.edu/ap/10?0::NO:10:P10_ACCESSION_NUM:osu1029812963

Παράδειγμα

- Εφαρμογή σε εργασία Robot Swarms στα πλαίσια του μαθήματος ρομποτικά συστήματα από τον Ευστάθιο Κοντουρά, Ιούλιος 2013

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών &
Τεχνολογίας Υπολογιστών

Ρομποτικά Συστήματα
Άσκηση 1

Κοντουράς Ευστάθιος
ΑΜ: 7017

Μελέτη ευστάθειας σμήνους ρομποτικών οχημάτων με συνάρτηση ελκυσμού - απώθησης.

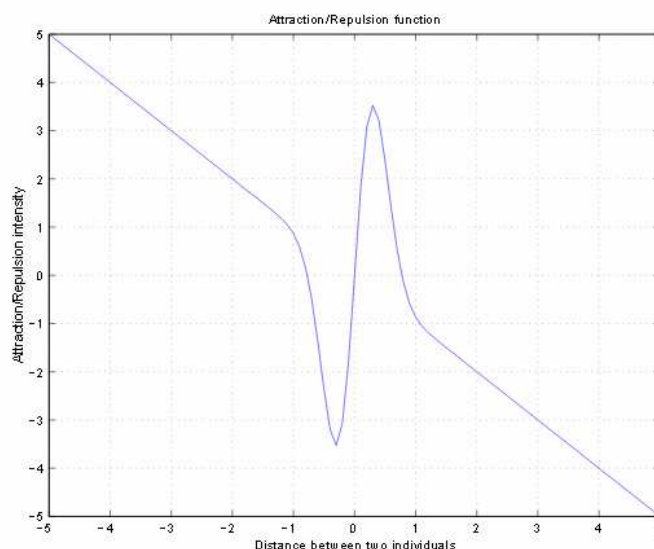
Δίνονται $N = 8$ δικτυωμένα ρομποτικά οχήματα στον τρισδιάστατο διανυσματικό χώρο \mathcal{R}^3 , ο οποίος περιορίζεται από έναν κύβο διαστάσεων $100 \times 100 \times 100$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε τον κύβο κεντραρισμένο στην αρχή $O(0,0,0)$ του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Η δυναμική συμπεριφορά του κάθε οχήματος περιγράφεται από ένα σύστημα συνεχούς χρόνου της μορφής:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^N g(x_i - x_j), \text{ με } i = 1, 2, \dots, N,$$

όπου το διάνυσμα κατάστασης $x_i \in \mathcal{R}^3$ αντιστοιχεί στις καρτεσιανές συντεταγμένες του i -οστού οχήματος και η συνάρτηση $g : \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^3$ δίνεται από τη σχέση:

$$g(y) = -y \left[a - b \exp\left(-\frac{\|y\|^2}{c}\right) \right],$$

όπου $a, b, c > 0$ σταθερές ποσότητες με $b > a$. και το σύμβολο $\| \cdot \|$ αντιπροσωπεύει την ευκλείδεια ή τετραγωνική νόρμα. Η συνάρτηση g καλείται συνάρτηση ελκυσμού - απώθησης (attractive - repulsive function) και στην περίπτωση της μίας διάστασης και για τις δοθείσες τιμές των a, b, c έχει τη μορφή που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1.1: Attractive - repulsive function για παραμέτρους $a = 1$, $b = 20$, $c = 0.2$.

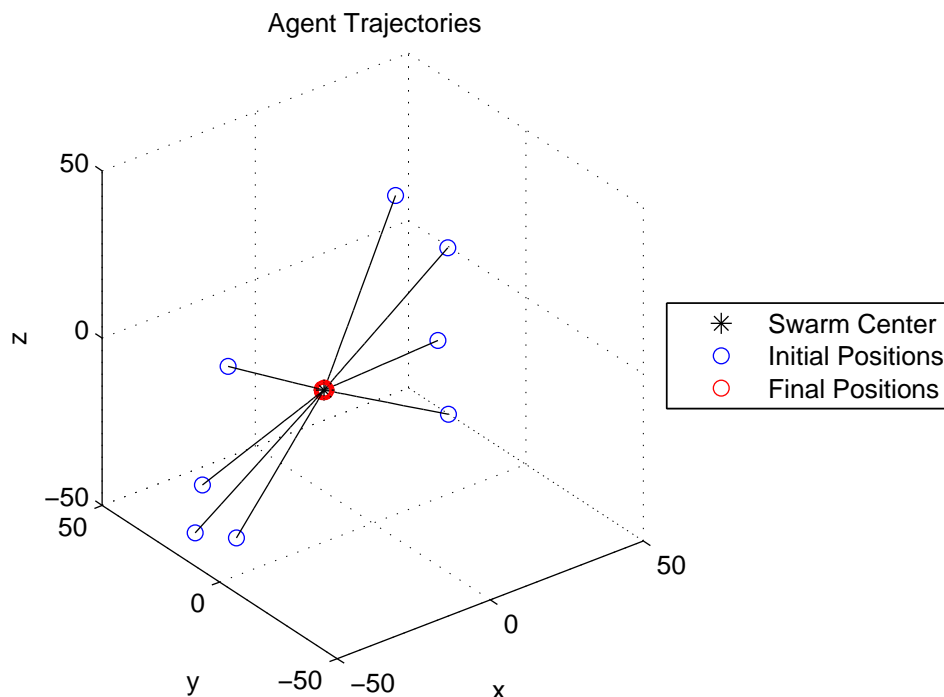
Υποθέτουμε ότι τα οχήματα εκκινούν από τυχαίες θέσεις στον τρισδιάστατο χώρο και ορίζουμε το «κέντρο» του σμήνους ως:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i .$$

Σύμφωνα με το λήμμα 1 του διδακτορικού του Gazi το «κέντρο» του σμήνους παραμένει σταθερό με το χρόνο, συνεπώς μπορούμε να το υπολογίσουμε απευθείας από τις αρχικές θέσεις των οχημάτων.

Ερώτημα 1: Προσομοίωση τροχιάς σμήνους.

Τρέχοντας τον κώδικα σε MatLab λαμβάνουμε τις εξής τροχιές:



Σχήμα 1: Τροχιές ρομποτικών οχημάτων

Παρατηρούμε ότι όλα τα επιμέρους οχήματα συγκλίνουν στο «κέντρο» του σμήνους.

Ερώτημα 2: Σύγκλιση σμήνους εντός σφαίρας.

Γνωρίζουμε από τα θεωρητικά αποτελέσματα του διδακτορικού του Gazi ότι οι συζευγμένες δυναμικές εξισώσεις εξασφαλίζουν σύγκλιση των οχημάτων εντός μίας σφαίρας σε πεπερασμένο χρόνο. Το θεώρημα 1 του διδακτορικού δίνει μία εκτίμηση τόσο της σφαίρας αυτής όσο και του χρόνου σύγκλισης. Για τη σφαίρα έχουμε:

$$B_e = \{x \in \mathfrak{R}^3 : \|x - \bar{x}\| \leq \varepsilon\},$$

όπου το κέντρο αυτής είναι το «κέντρο» του σμήνους \bar{x} και η ακτίνα της ε δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{c}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right). \quad (1)$$

Αντικαθιστούμε σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης τις παραμέτρους $a = 20$, $b = 1$, $c = 0.2$ στη σχέση (1) και λαμβάνουμε $\varepsilon \cong 3.8$. Ένα άνω φράγμα του χρόνου σύγκλισης δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{t} = \max_{i \in S} \left\{ -\frac{1}{2a} \ln\left(\frac{\varepsilon^2}{2V_i(0)}\right) \right\},$$

όπου $i \in S \Leftrightarrow i = 1, 2, \dots, N$ και η συνάρτηση $V(x)$, $V : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^+$ είναι μία συνάρτηση Lyapunov για το i -οστό όχημα, η οποία διαλέγεται ως:

$$V(x(t)) = \frac{1}{2} \|e_i(t)\|^2,$$

όπου $e_i(t) = x_i(t) - \bar{x}$ και $V_i(0) = V_i(x(0)) = \frac{1}{2} \|e_i(0)\|^2$.

Τρέξαμε την προσομοίωση για χρόνο $t_f < \bar{t}$. Κατά την τελική χρονική στιγμή t_f , η μέγιστη απόσταση των οχημάτων από το «κέντρο» του σμήνους προσδιορίστηκε ίση με $d_{\max} = 0.5390$. Παρατηρούμε ότι για $t_f < \bar{t}$ έχουμε $d_{\max} < \varepsilon$, συνεπώς:

- πράγματι οι θεωρητικές τιμές του χρόνου εισόδου στη σφαίρα B_e και της ακτίνας αυτής αποτελούν άνω φράγματα.
- συμπεραίνουμε ότι η σύγκλιση εντός της σφαίρας B_e πραγματοποιείται σε πεπερασμένο χρόνο.

Από την προσομοίωση και για τις τυχαίες αρχικές συνθήκες που προέκυψαν προσδιορίσαμε το «κέντρο» του σμήνους:

$$x_c = [-8.1613 \quad -10.1551 \quad -11.9805]^T,$$

καθώς και το άνω φράγμα στο χρόνο σύγκλισης:

$$\bar{t} = 2.9630 < t_f = 2.7630.$$

Ερώτημα 3: Σύγκλιση σμήνους σε αμετάβλητο σύνολο.

Σύμφωνα με το θεώρημα 2 του διδακτορικού του Gazi καθώς ο χρόνος $t \rightarrow \infty$ το διάνυσμα κατάστασης κάθε οχήματος συγκλίνει σε ένα σύνολο Ω_e . Στο ίδιο θεώρημα αποδεικνύεται ότι

$$\Omega_e = \{x \in \mathfrak{R}^{3 \times N} : \dot{x}(t)|_{t \rightarrow \infty} = 0\},$$

Δηλαδή το σύνολο Ω_e είναι αμετάβλητο. Με x συμβολίζουμε το επαυξημένο διάνυσμα κατάστασης, το οποίο περιέχει όλα τα επιμέρους διανύσματα κατάστασης x_i , $\forall i \in S$, δηλαδή το διάνυσμα x γράφεται:

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_i \quad \cdots \quad x_N]^T, \quad x \in \mathfrak{R}^{3 \times N},$$

όπου:

$$x_1 = [x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13}]^T, \quad x_2 = [x_{21} \quad x_{22} \quad x_{23}]^T, \quad \dots$$

$$\dots, \quad x_i = [x_{i1} \quad x_{i2} \quad x_{i3}]^T, \quad x_N = [x_{N1} \quad x_{N2} \quad x_{N3}]^T.$$

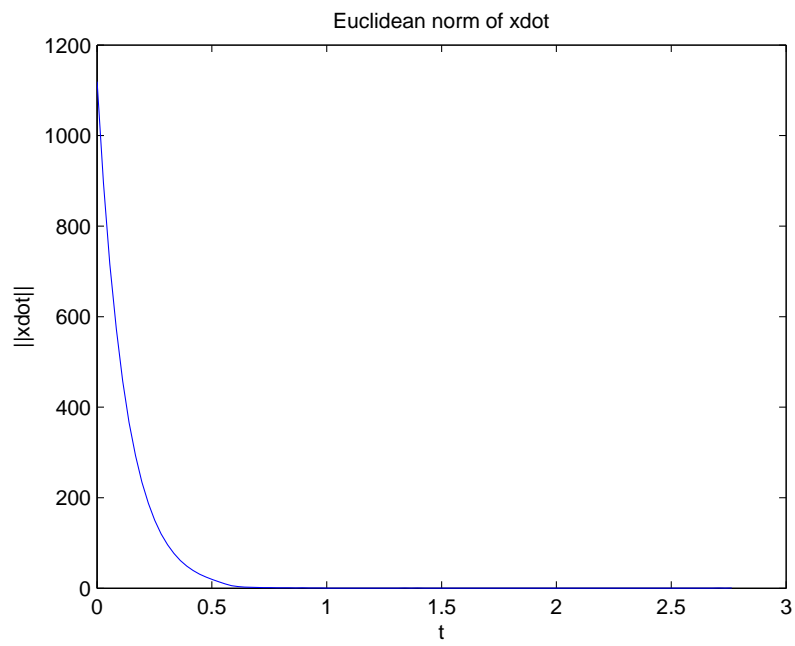
Για να εξετάσουμε τη σύγκλιση στο αμετάβλητο σύνολο Ω_e ακολουθούμε το εξής σκεπτικό:

- Όταν $\dot{x}(t)|_{t \rightarrow \infty} = 0$ τότε τα οχήματα βρίσκονται εντός του Ω_e .
- Συνεπώς όταν $\dot{x}(t)|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ τότε $x(t)|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \Omega_e$.

Άρα, για να αποδείξουμε μέσω προσομοίωσης τη σύγκλιση στο Ω_e , αρκεί να εξετάσουμε την εξάρτηση του $\dot{x}(t)$ από τον χρόνο. Ένας εύκολος τρόπος να προσδιορίζουμε αν πράγματι ισχύει η σχέση $\dot{x}(t)|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ είναι μέσω της (ευκλείδειας) νόρμας του $\dot{x}(t)$. Πράγματι, ισχύει ότι:

$$\dot{x}(t)|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \text{ αν και μόνον αν } \|\dot{x}(t)\| \rightarrow 0 \text{ καθώς } t \rightarrow \infty.$$

Τρέξαμε την προσομοίωση για χρόνο $t_f = 20$ (sec) και για το $\|\dot{x}(t)\|$ λάβαμε τη γραφική παράσταση που ακολουθεί. Λαμβάνοντας υπόψη το σχήμα (2) και τον παραπάνω συλλογισμό αποδεικνύουμε στηριζόμενοι σε προσομοίωση τη σύγκλιση σε πεπερασμένο χρόνο στο σύνολο Ω_e .



Σχήμα 2: Σύγκλιση του διανύσματος κατάστασης στο αμετάβλητο σύνολο Ω_e .

Παράρτημα: Κώδικας σε MatLab

Script προσομοίωσης

```
%% Exercise 1.
clear all;
close all;
clc;

%% Initializations.
% Position matrix has the form: x1  y1  z1
%                               x2  y2  z2
%                               ...  ...  ...

N = 8;

pos = zeros(N, 3);

for i = 1:1:N
    for j = 1:1:3
        pos(i,j) = rand(1) * 100 - 50;
    end
end

% Swarm center.
xc = sum(pos(:,1))/N;
yc = sum(pos(:,2))/N;
zc = sum(pos(:,3))/N;
plot3(xc, yc, zc, 'k*', 'markersize', 8)
hold on

% Function parameters.
a = 1;
b = 20;
c = 0.2;

% Maximum final time.
Vmat = zeros(1,N);
tmat = zeros(1,N);

for i = 1:1:N
    ei = normf([xc, yc, zc] - [pos(i,1), pos(i,2), pos(i,3)]);
    Vmat(i) = 0.5 * ei^2;
end

e = (b/a)*sqrt(c/2)*exp(-0.5);

for i = 1:1:N
    ti = -(1/(2*a))*log(e^2/(2*Vmat(i)));
    tmat(i) = ti;
end

max_t = max(tmat);

% Simulation runs for less than max_t in order to prove upper bound.
x0 = reshape(pos, N*3, 1);
t0 = 0;
```

```

tf = max_t - 0.2;

tspan = linspace(t0,tf,100);

%% Solving ode45.
options = odeset();
[t_return, x_return] = ode45(@(t,x) decoupling(t, x, N, a, b, c), ...
                             tspan, x0, options);

x = reshape(x_return, numel(t_return), N, 3);

%% Plot positions and trajectories.
% Initial positions.
plot3(x(1,:,1), x(1,:,2), x(1,:,3), 'bo');

% Final positions.
plot3(x(end,:,1), x(end,:,2), x(end,:,3), 'ro');

% Trajectories.
for i = 1:1:N
    plot3(x(:,i,1), x(:,i,2), x(:,i,3), '-k')
end

title('Agent Trajectories');
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
legend('Swarm Center', 'Initial Positions', 'Final Positions', ...
       'location', 'eastoutside');
grid on
axis([-50 50 -50 50 -50 50]);

%% Maximum final distance.
distance = zeros(N,1);

for i = 1:1:N
    distance(i) = normf([xc, yc, zc] - [x(end, i, 1), ...
                                       x(end, i, 2), x(end, i, 3)]);
end

max_distance = max(distance);

%% Check invariant set.
xdotNorm = zeros(numel(t_return), 1);
time_instances = numel(t_return);

for i = 1:1:time_instances
    xdot = decoupling(t_return(i), reshape(x(i,:,:), N*3, 1), ...
                     N, a, b, c);
    xdotNorm(i) = normf(xdot);
end

figure()
plot(t_return, xdotNorm)
xlabel('t');
ylabel('||xdot||');
title('Euclidean norm of xdot')

```

Υλοποιήσεις συναρτήσεων

```
%% Euclidean norm.
function n = normf(y)

sum = 0;

for i = 1:1:numel(y)
    sum = sum + y(i)^2;
end

n = sqrt(sum);

end

%% Decoupling equations.
function xdot = decoupling(t, x, N, a, b, c)

xdot = zeros(N, 3);
x = reshape(x, N, 3);

for i = 1:1:N

    sum = 0;

    for j = 1:1:N
        if(i ~= j)

            y = x(i,:) - x(j,:);

            n = norm(y);

            sum = sum + ( -y*(a - b * exp(-(n)^2 / c)) );

        end
    end

    xdot(i,:) = sum;

end

xdot = reshape(xdot, N*3, 1);

end
```

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0



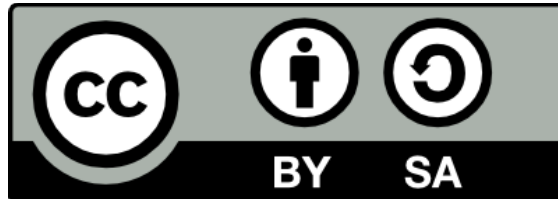
Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Αντώνιος Τζές, Ευάγγελος Δερματάς,
«Ρομποτικά Συστήματα. On the Coordinated Control of Robotic Vehicles».
Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/courses/EE804/index.php>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Σύμφωνα με αυτήν την άδεια ο δικαιούχος σας δίνει το δικαίωμα να:

Μοιραστείτε — αντιγράψετε και αναδιανέμετε το υλικό

Προσαρμόστε — αναμείξτε, τροποποιήστε και δημιουργήστε πάνω στο υλικό για κάθε σκοπό

Υπό τους ακόλουθους όρους:

Αναφορά Δημιουργού — Θα πρέπει να καταχωρίσετε αναφορά στο δημιουργό , με σύνδεσμο της άδειας

Παρόμοια Διανομή — Αν αναμείξετε, τροποποιήσετε, ή δημιουργήσετε πάνω στο υλικό, πρέπει να διανείμετε τις δικές σας συνεισφορές υπό την ίδια άδεια όπως και το πρωτότυπο

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/4)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

Εικόνα 1: The attraction/repulsion function $g(\cdot)$, Gazi Veysel. "Stability Analysis of Swarms." Electronic Thesis or Dissertation. Ohio State University, 2002. OhioLINK Electronic Theses and Dissertations Center., URL:

https://etd.ohiolink.edu/ap/10?0::NO:10:P10_ACCESSION_NUM:osu1029812963

Εικόνα 2: A $g(\cdot)$ function with linear attraction and unbounded repulsion, Gazi Veysel. "Stability Analysis of Swarms." Electronic Thesis or Dissertation. Ohio State University, 2002. *OhioLINK Electronic Theses and Dissertations Center.*, URL:

https://etd.ohiolink.edu/ap/10?0::NO:10:P10_ACCESSION_NUM:osu1029812963

