

# Ευστάθεια Συστημάτων: Μέθοδος Lyapunov

Δρ. Μίχος Γρηγόριος

“Προηγμένος Έλεγχος Ηλεκτρικών Μηχανών”  
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

2025



UNIVERSITY OF  
**PATRAS**  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

# Μαθησιακοί Στόχοι

**Στόχος:** Δυνατότητα περιγραφής και χρήσης των μεθόδων Lyapunov για ανάλυση ευστάθειας συστημάτων.

Βιβλιογραφία:

- H. Khalil, Nonlinear Systems, 3rd edition. Pearson, 2002, (Note: mainly continuous-time)
- J. B. Rawlings and D. Q. Mayne, Model Predictive Control: Theory and Design. Nob Hill Publishing, 2009, p. 711, (see Appendix B — download at <https://engineering.ucsb.edu/~jbrow/mpc/web-appendices.pdf>)
- J. Slotine and W. Li, Applied nonlinear control. Pearson, 1988

# Άμεση Μέθοδος Lyapunov

## Theorem

Για το σύστημα της μορφής  $\dot{x} = f(x)$ , με  $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , αν υπάρχει συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  όπου

- $V(0) = 0$  και  $V(x) > 0$  για  $x \in \mathbb{R}^n / \{0\}$  (θετικά ορισμένη συνάρτηση)
- $\frac{dV}{dt} < 0$  για  $x \in \mathbb{R}^n / \{0\}$  (μονοτονικά φθίνουσα)

τότε το σημείο  $x = 0$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές στο  $X = \mathbb{R}^n$

Μεθοδολογία:

- Διαλέγω μια θετικά ορισμένη συνάρτηση  $V(x)$
- Βρίσκω **αν** και **που** ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος.

# Άμεση Μέθοδος Lyapunov

## Σημειώσεις

- Η μέθοδος δεν προσφέρει τρόπο εύρεσης  $V$  αλλά εξακρίβωσης ότι μια  $V$  είναι Lyapunov συνάρτηση. Σε γενικές γραμμές η εύρεση μια τέτοιας συνάρτησης είναι δύσκολη
- Η μέθοδος προσφέρει μια εκτίμηση του πεδίου έλξης της τροχιάς του συστήματος αλλά το πραγματικό πεδίο έλξης μπορεί να είναι μεγαλύτερο από την εκτίμηση.
- Διαφορετικές συναρτήσεις προσφέρουν διαφορετικές εκτιμήσεις του πεδίου έλξης, αλλά δεν υπάρχει (προς το παρόν) τρόπος για εύρεση της “καλύτερης”  $V$ .
- Στην πράξη, συνήθως η καλύτερη εκτίμηση παρέχεται από χρήση των συναρτήσεων που περιγράφουν την ενέργεια του συστήματος

# Άμεση Μέθοδος Lyapunov

Παράδειγμα 1:

Έστω το σύστημα της μορφής

$$\dot{x} = -x$$

με

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

- Ισχύει ότι  $V(0) = 0$
- Επίσης  $V(x) \geq 0, \forall x \neq 0$
- Μονοτονικά φθίνουσα;

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = -x^2 \leq 0$$

Συμπέρασμα: Ναι, και συνεπώς η  $V$  είναι Lyapunov συνάρτηση για το σύστημα  $\dot{x} = -x$  και το σημείο  $x=0$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές με πεδίο έλξης το  $X = \mathbb{R}$  (Γιατί;)

# Άμεση Μέθοδος Lyapunov

Παράδειγμα 2:

Έστω το σύστημα της μορφής

$$\dot{x} = -x + x^3$$

με

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

- Ισχύει ότι  $V(0) = 0$
- Επίσης  $V(x) \geq 0, \forall x \neq 0$
- Μονοτονικά φθίνουσα;

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = -x^2 + x^4$$

► Για να ισχύει  $\dot{V} \leq 0$  πρέπει  $-x^2 + x^4 \leq 0$  άρα  $|x| \leq 1$

Συμπέρασμα: Ασυμπτωτικά ευσταθές στο  $X = (1, 1)$ , τοπικά ευσταθές στο  $[-1, 1]$ .

## Άμεση Μέθοδος Lyapunov

Παράδειγμα 3:

Έστω το σύστημα της μορφής

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

με

$$V(x) = x^T P x$$

- Ισχύει ότι  $V(0) = 0$
- Επίσης  $V(x) \geq 0$ ,  $\forall x \neq 0$ , εφόσον  $P \succ 0$
- Μονοτονικά φθίνουσα;

$$\dot{V} = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T \left( P(A + BK) + (A + BK)^T P \right) x = -x^T Q x$$

όπου

$$P(A + BK) + (A + BK)^T P = -Q \quad (1)$$

Συμπέρασμα: Ασυμπτωτικά ευσταθές αν  $Q \succ 0$ , τοπικά ευσταθές αν  $Q \succeq 0$

## Έμμεσος Μέθοδος Lyapunov

Για γραμμικό σύστημα κλειστού βρόγχου και  $n$ -διαστάσεων, δηλ.  $x \in \mathbb{R}^n$ , με μορφή

$$\dot{x} = \Phi x, \quad \Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (2)$$

Σημειώσεις:

- Η συνάρτηση  $P\Phi + \Phi^T P = -Q$  ονομάζεται “Lyapunov ισότητα”
- Με κάποιο  $Q \succ 0$  (συνήθως  $Q = I_n$ ) λύνω ως προς  $P$ . Αν υπάρχει  $P \succ 0$  τότε το σημείο  $x = 0$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.
- Η τελευταία μεθοδολογία αναφέρεται ως **Έμμεση Μέθοδος Lyapunov**, επειδή αρκεί να βρούμε  $P, Q \succ 0$  που ικανοποιούν την ισότητα Lyapunov.

### Theorem

Ένας πίνακας  $\Phi$  είναι Hurwitz (δηλ. όλες οι ιδιοτιμές του είναι αρνητικές), αν και μόνο αν υπάρχουν συμμετρικοί, θετικά ορισμένοι πίνακες  $P, Q$  που ικανοποιούν την ισότητα Lyapunov.

# Ανάλυση ευστάθειας DC κινητήρα με ξένη διέγερση

Το απλοποιημένο μοντέλο κλειστού βρόγχου του συστήματος με απλό έλεγχο ανάδρασης, δίνεται από:

$$L_a \frac{di_a}{dt} = -(R_a + K_1)i_a - (K_c \bar{i}_f + K_2)\omega_r$$
$$J \frac{d\omega_r}{dt} = - \left( b + \frac{K_c^2 \bar{i}_f^2 + K_2}{R_a + K_1} \right) \omega_r - T_{\text{load}}$$

Σημείωση: έχουμε υποθέσει διαχωρισμό χρονικών σταθερών και συνεπώς στο παραπάνω μοντέλο έχουμε  $i_f = \bar{i}_f$ .

# Ανάλυση ευστάθειας DC κινητήρα με ξένη διέγερση

Παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι της μορφής

$$M\dot{x} = Ax + d$$

$$\text{όπου } M = \begin{bmatrix} L_a & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -(R_a + K_1) & -(K_c \bar{i}_f + K_2) \\ 0 & -\left(b + \frac{K_c^2 \bar{i}_f^2 + K_2}{R_a + K_1}\right) \end{bmatrix}$$

$$\text{και } d = \begin{bmatrix} 0 \\ T_{load} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_r \end{bmatrix}.$$

Μπορούμε απευθείας να συμπεράνουμε ότι ο πίνακας  $A$  έχει δύο αρνητικές ιδιοτιμές που ισούνται με τα στοιχεία που βρίσκονται στη διαγώνιο του.

# Ανάλυση ευστάθειας DC κινητήρα με ξένη διέγερση

Θέτουμε  $\bar{x} = -A^{-1}d$  και  $e = x - \bar{x}$ . Η παράγωγος του σφάλματος, δίνεται από

$$M\dot{e} = A(e + \bar{x}) + d = Ae + A(-A^{-1}d) + d = Ae$$

Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας  $A$  είναι Hurwitz, συνεπώς με εφαρμογή του θεωρήματος υπάρχουν συμμετρικοί πίνακες  $P, Q$  που ικανοποιούν την Lyapunov ισότητα. Επομένως, επιλέγοντας  $V(e) = e^T P e$  έχουμε

- $V(0) = 0$ ; Ναι
- $V(e) \neq 0$ , για  $e \neq 0$ ; Ναι
- $\dot{V}(e) < 0$ ; Ναι επειδή
$$\dot{V} = -e^T (PA + A^T P)e = -e^T Qe \leq -\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2$$

Συνεπώς  $e = (x - \bar{x}) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ .