

Ευστάθεια Συστημάτων: Ορισμός και Έννοιες

Δρ. Μίχος Γρηγόριος

“Προηγμένος Έλεγχος Ηλεκτρικών Μηχανών”
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

2025



UNIVERSITY OF
PATRAS
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Μαθησιακοί Στόχοι

Στόχος: Ορισμός ευστάθειας και βασικές έννοιες για γραμμικά και μη-γραμμικά συστήματα

Βιβλιογραφία:

- H. Khalil, Nonlinear Systems, 3rd edition. Pearson, 2002, (Note: mainly continuous-time)
- J. B. Rawlings and D. Q. Mayne, Model Predictive Control: Theory and Design. Nob Hill Publishing, 2009, p. 711, (see Appendix B — download at <https://engineering.ucsb.edu/~jbrow/mpc/web-appendices.pdf>)
- J. Slotine and W. Li, Applied nonlinear control. Pearson, 1988

Ευστάθεια Συστημάτων: Ορισμός και Έννοιες

Γενική μορφή μη μεταβαλλόμενου συστήματος (κλειστού βρόγχου)

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

- Σημείωση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

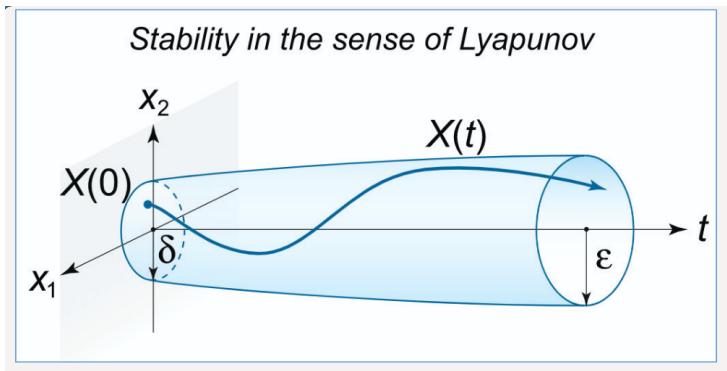
Ορολογίες:

- $|x|$ ορίζει μια γενική διανυσματική νόρμα (π.χ $\|x\|_2 = \sqrt{x^\top x}$)
- $\mathcal{B}$ είναι το (κλειστό) σετ μοναδιαίου κύκλου στο $\mathbb{R}^n$ (δηλ.
 $\mathcal{B} := \{x: |x| \leq 1\}$)
- $X \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένας κλειστός διανυσματικός χώρος για το x .

Υπόθεση:

- Η συνάρτηση είναι (Lipschitz) συνεχής στο X και $f(0) = 0$.

Ορισμός: Τοπική Ευστάθεια Lyapunov



Για ένα σύστημα της μορφής $\dot{x} = f(x)$, το σημείο $x = 0$ είναι **τοπικά ευσταθές** στο X , αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, όπου

$$x(0) \in \delta\mathcal{B} \cap X \Rightarrow |x(t)| \leq \epsilon, \forall t > 0. \quad (2)$$

Παράδειγμα

$$\dot{x} = -x + x^3 \quad (3)$$

- αν $|x| < 1$ τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$
- για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, τότε
 $|x(0)| \leq \delta(\varepsilon) = \min\{1, \varepsilon\} \Rightarrow |x(t)| \leq \varepsilon, \forall t > 0.$

Αστάθεια στο X

Ορισμός: Για το σύστημα $\dot{x} = f(x)$, το σημείο $x = 0$ είναι ασταθές στο X αν δεν είναι ευσταθές.

Παράδειγμα:

$$\dot{x} = x, \quad X = \mathbb{R} \quad (4)$$

- Η λύση της διαφορικής (τροχιά του συστήματος) δίνεται από $x(t) = x(0)e^t$. Συνεπώς

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(0)e^t = \infty, \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

- Δεν υπάρχει $x(0)$ όπου $|x(0)| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |x(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t > 0$

Ελκτικότητα Σημείου Ισορροπίας (Attractivity)

Ορισμός: Για το σύστημα $\dot{x} = f(x)$, το σημείο $x = 0$ είναι “ελκτικό” (attractive) στο χώρο X , εάν

$$|x(t)| \rightarrow 0, \text{ όσο } t \rightarrow \infty, \text{ για όλες τις αρχικές συνθήκες } x(0) \in X. \quad (6)$$

Παράδειγμα 1:

$$\dot{x} = -x \quad (7)$$

- Η τροχιά του συστήματος δίνεται από τη σχέση $x(t) = x(0)e^{-t}$, συνεπώς

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(0)e^{-t} = 0, \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

- Το σημείο $x = 0$ έλκει την τροχιά του συστήματος.

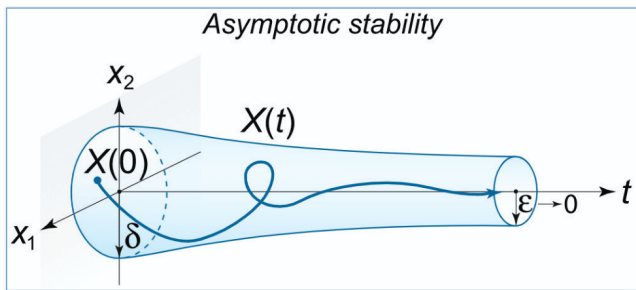
Ελκτικότητα Σημείου Ισορροπίας (Attractivity)

Παράδειγμα 2:

$$\dot{x} = -x^2 \quad (9)$$

- Η τροχιά του συστήματος δίνεται από τη σχέση $x(t) = \frac{x(0)}{1+x(0)t}$, συνεπώς
 - ▶ αν $x(0) > 0$, τότε $x(t) \rightarrow 0$ όσο $t \rightarrow \infty$
 - ▶ αν $x(0) < 0$, τότε $x(t) \rightarrow \infty$ όσο $t \rightarrow \infty$.
- Το σημείο $x = 0$ έλκει την τροχιά του συστήματος μόνο για θετική αρχική συνθήκη $x(0) > 0$.

Ορισμός: Ασυμπτωτική Ευστάθεια

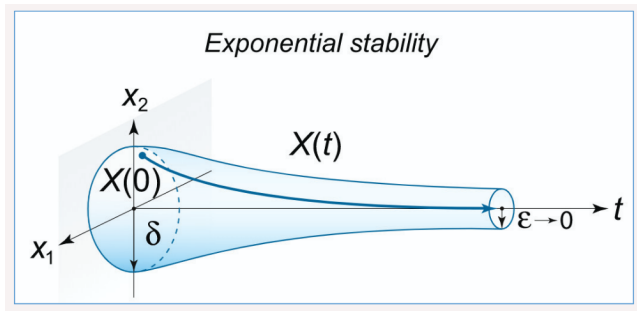


Για ένα σύστημα της μορφής $\dot{x} = f(x)$, το σημείο $x = 0$ είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές (ΑΕ)** με ελκτικό πεδίο X , αν είναι τοπικά ευσταθές και στο X και η τροχιά του συστήματος έλκεται στο $x = 0$ για οποιοδήποτε $x(0) \in X$.

Παράδειγμα: Το σύστημα $\dot{x} = -x + x^3$ με $X = \mathbb{R}$ είναι

- τοπικά ευσταθές στο X (για $\varepsilon > 0$, $\delta(\varepsilon) = \min\{1, \varepsilon\}$)
- Δεν έλκεται η τροχιά στο $X = \mathbb{R}$ αλλά στο $[0, \infty)$
- Συνεπώς είναι ΑΕ με ελκτικό πεδίο $[0, \infty)$

Ορισμός: Εκθετική Ευστάθεια



Για ένα σύστημα της μορφής $\dot{x} = f(x)$, το σημείο $x = 0$ είναι **εκθετικά ευσταθές (ΕΕ)** με ελκτικό πεδίο X , αν υπάρχει $\rho, \gamma > 0$ όπου

$$|x(t)| \leq \rho x(0) e^{-\gamma t}, \quad \forall t > 0 \text{ και } \forall x(0) \in X. \quad (10)$$

Παράδειγμα: Το σύστημα $\dot{x} = -x$ με $X = \mathbb{R}$ είναι ΕΕ με $\gamma = \rho = 1$

Σχέσεις μεταξύ των εννοιών

- Εκθετική ευστάθεια $\Rightarrow$ Ασυμπτωτική Ευστάθεια $\Rightarrow$ Τοπική ευστάθεια
- Ελκτικότητα $\neq$ Ευστάθεια : το σημείο $x = 0$ μπορεί να ελκύει την τροχιά του συστήματος αλλά να μην είναι ευσταθές π.χ. homoclinic orbit
(https://youtu.be/HS_2v_UX4hM?si=VRTtViQFbRLdgMx6)
- Τι ισχύει για τα γραμμικά, χρονικά μη μεταβαλλόμενα συστήματα $\dot{x} = (A + BK)x$ με $\lambda(A + BK) < 0$;
 - ▶ $x = 0$ είναι ευσταθές για όλο το $\mathbb{R}^n$
 - ▶ $x = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές με πεδίο ελκτικότητας το $\mathbb{R}^n$
 - ▶ $x = 0$ είναι εκθετικά ευσταθές με πεδίο ελκτικότητας το $\mathbb{R}^n$
 - ▶ Εκθετική ευστάθεια $\Leftrightarrow$ Ασυμπτωτική Ευστάθεια $\Leftrightarrow$ Τοπική ευστάθεια

Γιατί;