

Μετασχηματισμός Clarke-Park

Δρ. Μίχος Γρηγόριος

“Προηγμένος Έλεγχος Ηλεκτρικών Μηχανών”
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

2025



UNIVERSITY OF
PATRAS
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Στόχος: Εξοικείωση με μετασχηματισμό Clarke-Park για σχεδιασμό ελέγχου AC μηχανών

Βιβλιογραφία:

- Αλεξανδρίδης Α., Μητρονίκας Ε., Σημειώσεις στο μάθημα “ Προηγμένος Έλεγχος Ηλεκτρικών Μηχανών”
- Παράρτημα 1: Μαλατέστας, 2014, Ηλεκτρική Κίνηση, Εκδόσεις Τζιόλα

Μετασχηματισμός Clarke

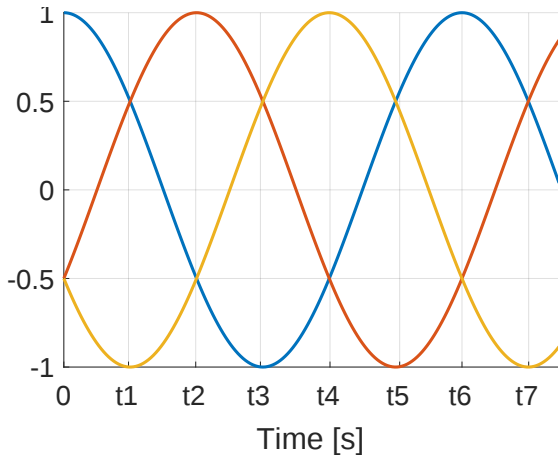


Figure: Εναλλασσόμενα ημιτονοειδή σήματα με διαφορά γωνίας $\frac{2}{3}\pi$

Μετασχηματισμός Clarke

Αν πάρουμε ως άξονα αναφοράς το σημείο $t = 0$,

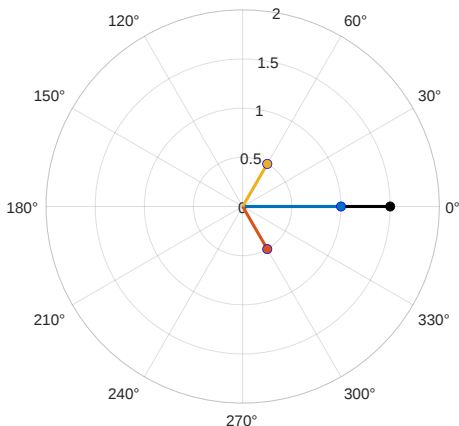


Figure: Απεικόνιση φάσεων a, b, c σε πολικό σύστημα αξόνων. Το μαύρο διάνυσμα απεικονίζει το άθροισμα των διανυσμάτων των φάσεων

Μετασχηματισμός Clarke

Το άθροισμα των διανυσμάτων υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}a + b + c &= 1 + 0.5 \cos(60^\circ) + 0.5 \cos(60^\circ) \\&= 1 + 0.25 + 0.25 \\&= 1.5 \\&= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Σε κάθε χρονική στιγμή, το άθροισμα των διανυσμάτων των τριών φάσεων υπολογίζει ένα διάνυσμα με μέγεθος $\frac{3}{2}$ και γωνία ϕ .

Μετασχηματισμός Clarke

Χρονική στιγμή t_1 :

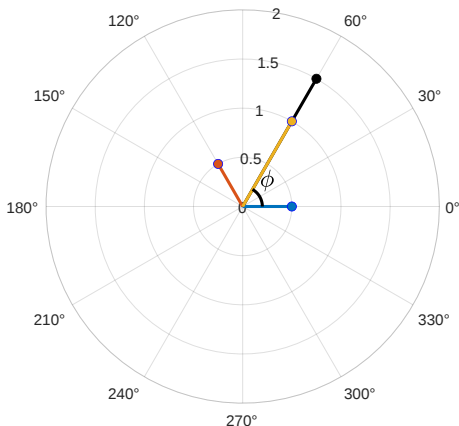


Figure: Απεικόνιση φάσεων a, b, c σε πολικό σύστημα αξόνων. Το μαύρο διάνυσμα απεικονίζει το άθροισμα των διανυσμάτων των φάσεων

Μετασχηματισμός Clarke

Χρονική στιγμή t_2 :

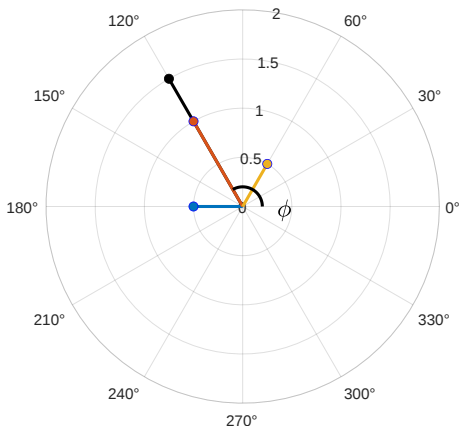


Figure: Απεικόνιση φάσεων a, b, c σε πολικό σύστημα αξόνων. Το μαύρο διάνυσμα απεικονίζει το άθροισμα των διανυσμάτων των φάσεων

Μετασχηματισμός Clarke

Χρονική στιγμή t_3 :

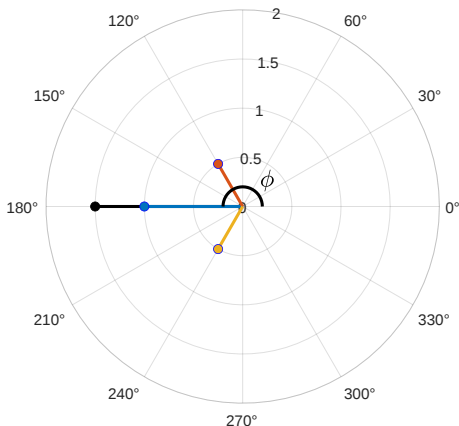


Figure: Απεικόνιση φάσεων a, b, c σε πολικό σύστημα αξόνων. Το μαύρο διάνυσμα απεικονίζει το άθροισμα των διανυσμάτων των φάσεων

Μετασχηματισμός Clarke

Χρονική στιγμή t_4 :

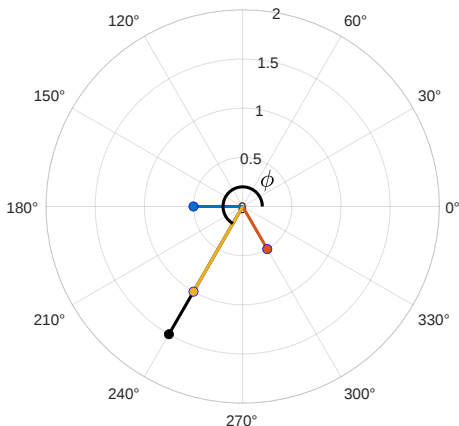
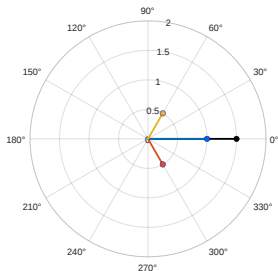


Figure: Απεικόνιση φάσεων a, b, c σε πολικό σύστημα αξόνων. Το μαύρο διάνυσμα απεικονίζει το άθροισμα των διανυσμάτων των φάσεων

Μετασχηματισμός Clarke

Συνεπώς στον άξονα αναφοράς



$$R = r_a e^{j0} + r_b e^{j\frac{2\pi}{3}} + r_c e^{j\frac{4\pi}{3}}$$

$$= r_a + r_b \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + r_c \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + j \left(r_b \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + r_c \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right)$$

$$= r_a - \frac{r_b}{2} - \frac{r_c}{2} + j \left(r_b \frac{\sqrt{3}}{2} - r_c \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Μετασχηματισμός Clarke

$$R = \begin{bmatrix} r_\alpha \\ r_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_a \\ r_b \\ r_c \end{bmatrix} \quad (1)$$

Ωστόσο, ο παραπάνω πίνακας μετασχηματισμού δεν είναι τετραγωνικός και άρα είναι μη αντιστρέψιμος. Μετά απο αλγεβρικούς μετασχηματισμούς, καταλήγουμε στο μετασχηματισμό Clarke

$$\begin{bmatrix} r_\alpha \\ r_\beta \\ r_\gamma \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} r_a \\ r_b \\ r_c \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_a \\ r_b \\ r_c \end{bmatrix} \quad (2)$$

Μετασχηματισμός Clarke

Όπου ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίνεται από τη σχέση

$$\begin{bmatrix} r_a \\ r_b \\ r_c \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} r_\alpha \\ r_\beta \\ r_\gamma \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_\alpha \\ r_\beta \\ r_\gamma \end{bmatrix} \quad (3)$$

Μετασχηματισμός Park

Παρότι αρκούν τα σήματα r_α, r_β για να περιγράψουμε τη συμπεριφορά του αρχικού τριφασικού συστήματος, τα σήματα που προκύπτουν είναι ακόμα ημιτονοειδή. Για να διευκολύνουμε την ανάλυση του τριφασικού συστήματος, μοντελοποιούμε το σύστημα σε ένα συνεχώς περιστρεφόμενο σύστημα αξόνων, με γωνιακή περιστροφική ταχύτητα $\omega = 2\pi f_0$, όπου f_0 η συχνότητα του συστήματος.

Μετασχηματισμός Park

Για να καταλήξουμε στο μετασχηματισμό Park, υπολογίζουμε

$$R_{dq} = R_{\alpha\beta} e^{j\delta}, \quad \delta = \omega t \quad (4)$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} R_{dq} &= (r_\alpha + jr_\beta)(\cos \delta - j \sin \delta) \\ &= (r_\alpha \cos \delta + r_\beta \sin \delta) + j(-r_\alpha \sin \delta + r_\beta \cos \delta) \end{aligned}$$

και

$$R_{dq} = \begin{bmatrix} r_d \\ r_q \\ 0 \end{bmatrix} = T_{dq} \begin{bmatrix} r_\alpha \\ r_\beta \\ r_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_\alpha \\ r_\beta \\ r_\gamma \end{bmatrix} \quad (5)$$

Μετασχηματισμός Clarke-Park

Τελικά, για να πάμε από το a-b-c στο σύστημα d-q υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Clarke-Park

$$\begin{bmatrix} r_d \\ r_q \\ 0 \end{bmatrix} = T_{dq} M \begin{bmatrix} r_a \\ r_b \\ r_c \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos \delta & \cos(\delta - 120^\circ) & \cos(\delta + 120^\circ) \\ -\sin \delta & -\sin(\delta - 120^\circ) & -\sin(\delta + 120^\circ) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_a \\ r_b \\ r_c \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμός Clarke-Park

Συμπεράσματα

- Ο μετασχηματισμός Clarke-Park μεταφέρει το ημιτονοειδές τριφασικό σύστημα σε ένα συνεχώς περιστρεφόμενο πλαίσιο αξόνων
- Τα σήματα στο d-q σύστημα είναι συνεχής μορφής (DC)
- Ωστόσο χρειαζόμαστε ακριβή μέτρηση της συχνότητας του δικτύου
- Το σύστημα που προκύπτει έχει υψηλή σύζευξη μεταξύ των εξισώσεων καταστάσεων