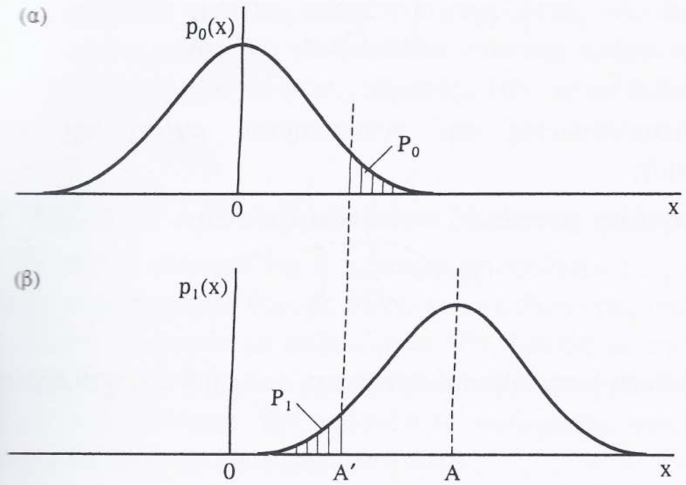


Σχήμα 9-26: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σπп) $p_0(x)$ και $p_1(x)$.

Στο σχήμα 9-26 είναι διαγραμμισμένες οι περιοχές των κατανομών στις οποίες εμφανίζεται σφάλμα αποδοχής και σφάλμα απόρριψης, όταν χρησιμοποιείται ορισμένο κατώφλι απόφασης A'.

Η πιθανότητα «σφάλμα αποδοχής» (σχ. 9-26α) υπολογίζεται από τη σχέση

$$p_0(x) = \int_{A'}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \tag{9.79}$$

και η πιθανότητα «σφάλμα απόρριψης» (σχ. 9-26β) από τη σχέση

$$p_1(x) = \int_{\infty}^{A'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-A)^2/2\sigma^2} dx \tag{9.80}$$

$$p_\sigma(x) = \int_{A/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \tag{9.83}$$

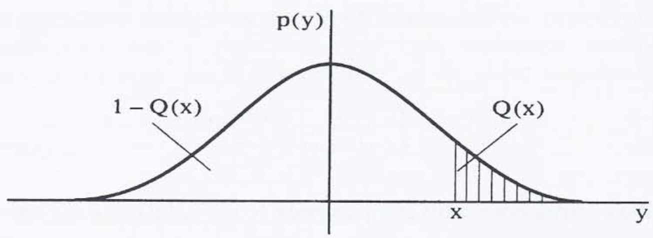
Χρησιμοποιώντας την τυποποιημένη σχέση της κανονικής κατανομής

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \tag{9.84}$$

που δίνει τη διαγραμμισμένη περιοχή στο σχ. 9-27, η (9.83) γίνεται με $y=x/\sigma$

$$p_\sigma = \int_{A/2\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-y^2/2} dy = Q[A/(2\sigma)] \tag{9.85}$$

Δηλ. η πιθανότητα σφάλματος εξαρτάται από την απόσταση A μεταξύ των δύο καταστάσεων 0,1 διαιρεμένη με το εύρος της σππ του θορύβου.



Σχήμα 9-27: Περιοχή Q(x) στην σπп της κανονικής κατανομής.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η μέση ισχύς του μονοπολικού παλμού είναι

$$S = \frac{1}{2}(0)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)A^2 = \frac{A^2}{2}$$

και του θορύβου N (εξ. 9.75), παίρνομε από την (9.85) για το μονοπολικό παλμό την ισοδύναμη σχέση

$$P_\sigma = Q\left(\sqrt{\frac{S}{2N}}\right) \tag{9.86}$$

Για πολικούς παλμούς ισχύει $S = (A/2)^2$, ώστε

$$P_\sigma = Q\left(\sqrt{\frac{S}{N}}\right) \tag{9.87}$$

Error Function

Η διαφάνεια αυτή έχει γραφεί έτσι ώστε να συσχετίζεται με το σχήμα της επόμενης διαφάνειας, για την μετάδοση του λογικού 1 με έναν θετικό παλμό και του λογικού 0 με έναν αρνητικό παλμό.

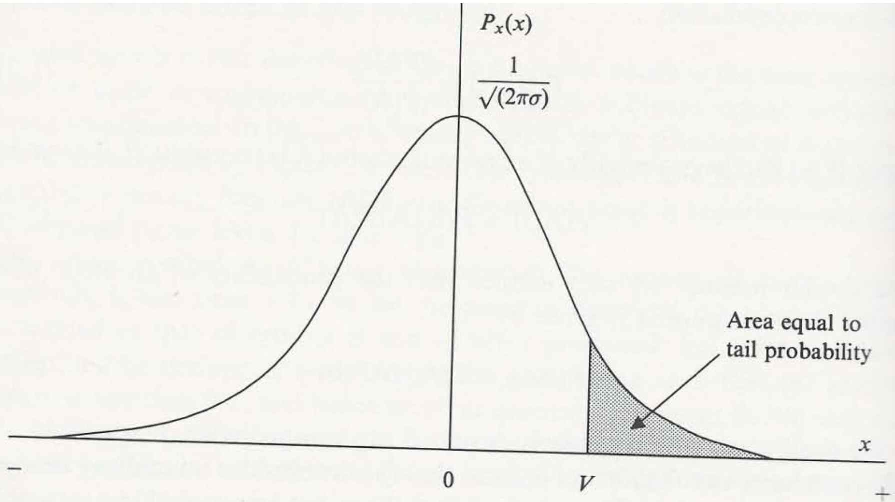


Figure 5.7 Gaussian PDF

The probability of an error is also known as **bit error rate** (BER) and, for example, a BER of 10^{-6} simply means that on average one bit will occur in every million transmitted. Where noise and symbol amplitudes are known, error probability may not be found directly from Eqn (5.28) because the integral is not in closed form. A number of methods may be used to perform numerical calculations relating to BER, noise and symbol amplitude but we shall confine ourselves here to use of the **error function**[5], or erf(x):

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \tag{5.29}$$

where:

$$x = \frac{V}{\sigma\sqrt{2}} \tag{5.30}$$

The above expression for error function is equivalent to the probability that x lies in the range $0 \leqslant x \leqslant \pm V$. Error probability equals the area under the curve for $x > V$. Now the area under the curve of the PDF for all x is of course 1. Hence the area under the curve to the right of V is given by:

$$P_\mathrm{e} = 0.5[1 - \mathrm{erf}(x)] \tag{5.31}$$

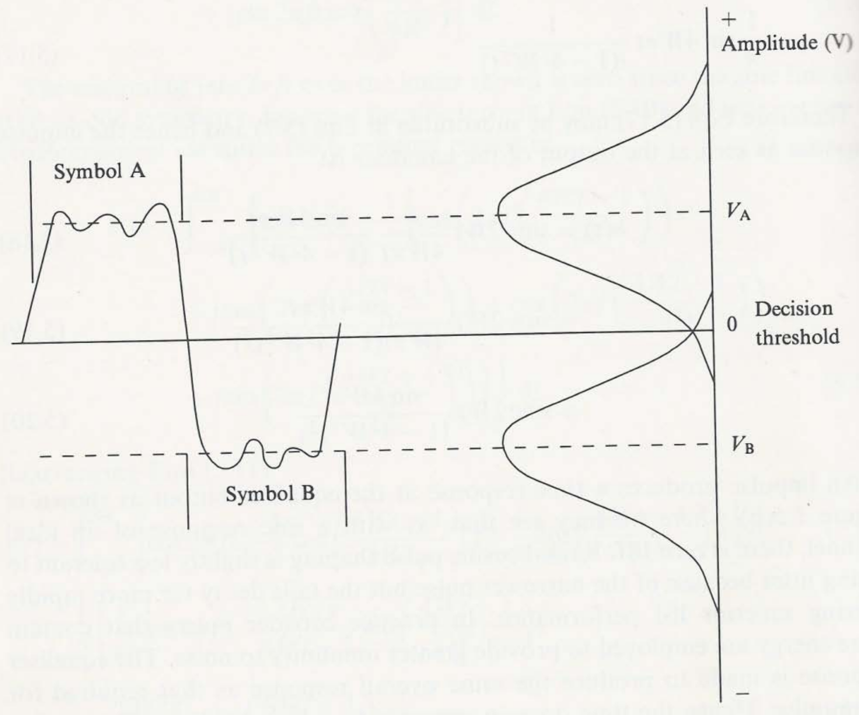
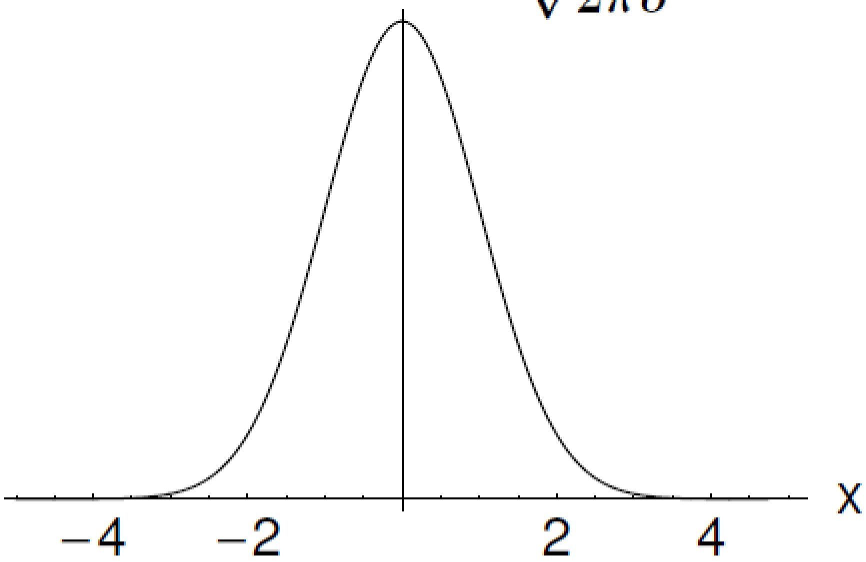
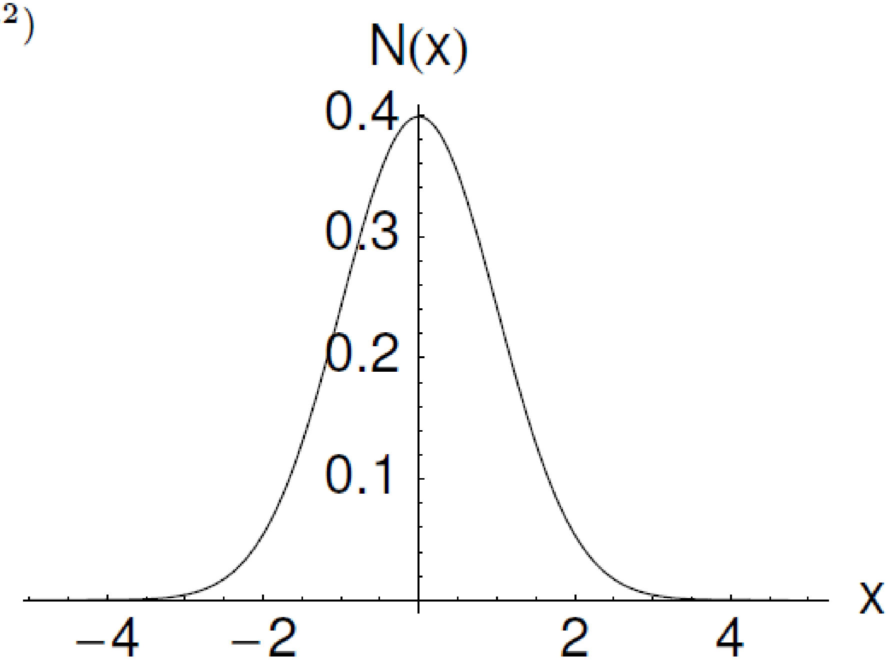


Figure 5.6 Effect of noise upon a binary signal

Gaussian – Normal

$$\mathrm{G(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$





$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} G(x) = 1 \qquad \int_{-x}^{x} G(x) = \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

$$t^2 = \frac{x^2}{2\sigma^2} \qquad dt = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\, dx \qquad \int_{-x}^{x} G(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-t^2}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2}\, dt = \operatorname{erf} x = \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

Error Functions (erf - erfc) and Q-Function

$$\mathbf{erfc}\ x = 1 - \mathbf{erf}\ x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\, dt \quad = 2Q(\sqrt{2}\ x)$$

$$Q(\alpha) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad Q(-\infty) = 1 \quad ; \quad Q(0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad Q(\infty) = 0 \quad ; \quad Q(-x) = 1 - Q(x)$$

$$Q(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Pr\{X > x\} = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Pr\{X > \mu + a\} = \Pr\{X < \mu - a\} = Q\left(\frac{a}{\sigma}\right)$$