

Απόρροια
του θεωρήματος
Shannon-Hartley
 $C = W \log_2(1 + \text{SNR})$

Φασματική Αποδοτικότητα (Spectral efficiency)

- Παλμός/σύμβολο διάρκειας T , $W_{\min}=1/T$ (Hz)
- 1 σύμβολο το μεταδίδουμε με K bits = $\log_2 M$ (M-ary coding)
- $R \equiv R_b = K/T \Rightarrow N_{BW} = R/W = (K/T)/W = K/(T \cdot W)$ (φασματική απόδοση) $\Rightarrow$ Απουσία θορύβου **θεωρητικά** δεν έχει όριο (διαμόρφωση;;;)
- Παρουσία AWGN, $\max R_b = C = W \log_2(1 + \text{SNR})$ (Shannon-Hartley)

$$\max N_{BW} = C / W = \log_2(1 + \text{SNR})$$

- Για γραμμική αύξηση της φασματικής απόδοσης, πρέπει να επιτύχουμε εκθετική αύξηση του SNR (στην είσοδο του δέκτη):
 $C/W = \log_2(1 + \text{SNR}) \Rightarrow 2^{C/W} = 1 + \text{SNR}$ ή $\text{SNR} = 2^{C/W} - 1$
- $C/W = \log_{10}(1 + \text{SNR}) / \log_{10}(2) \Rightarrow C/W \cong 3,322 \cdot (10/10) \log_{10}(\text{SNR})$

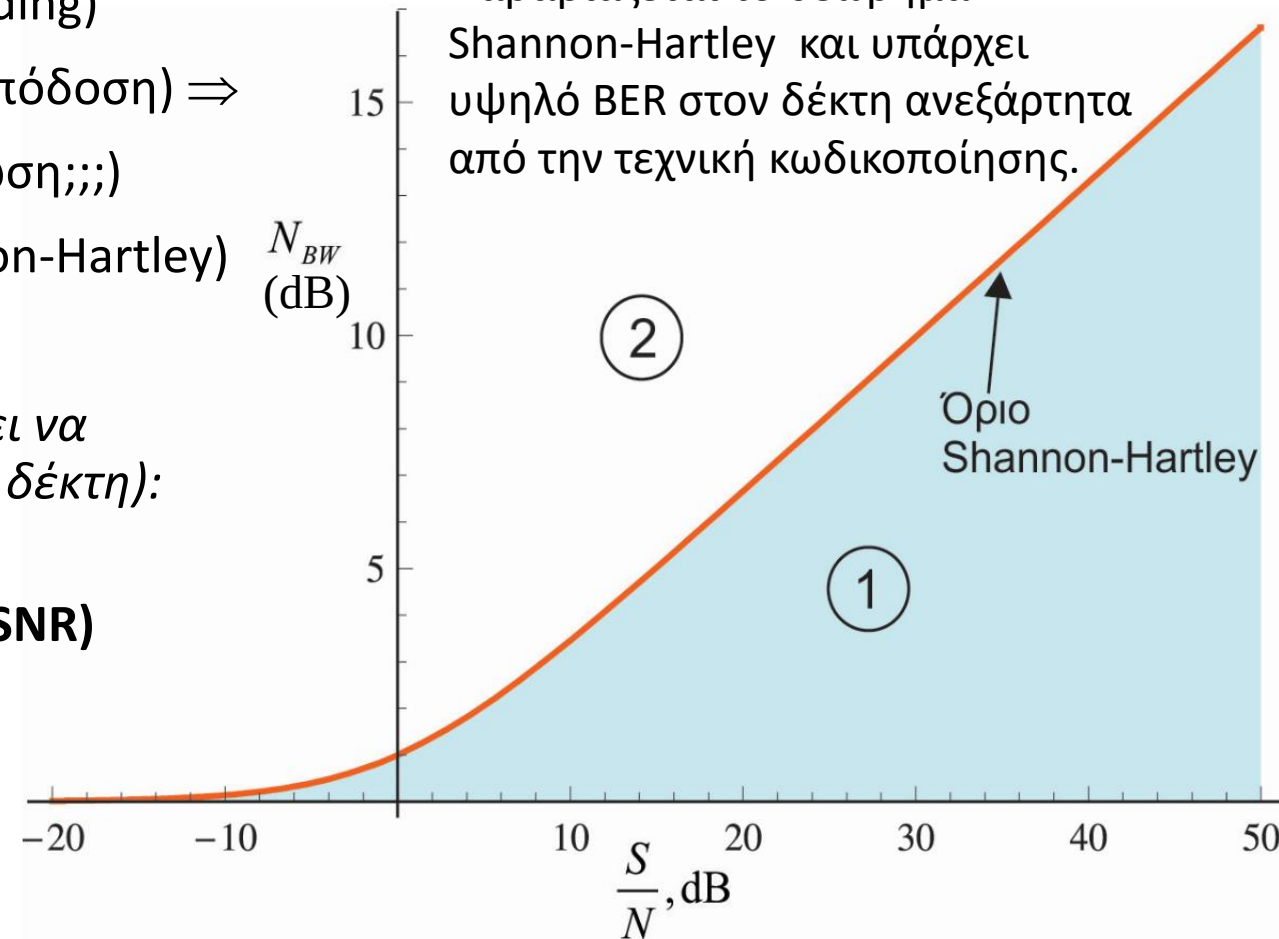
$$\Rightarrow \max N_{BW} = C/W = 0,3322(\text{SNR})_{\text{db}}$$

όπου για **SNR = 0 dB**, **C = W**, $\max N_{BW} = 1$

Παράδειγμα: Σήμα ομιλίας μεταδίδεται με 64 Kbps σε κανάλι AWGN εύρους ζώνης 48 KHz. Το ελάχιστο SNR είναι
 $\text{SNR} = 2^{(64/48)} - 1 = 1,52 \Rightarrow (\text{SNR})_{\text{dB}} = 10 \log(1,52) \cong 1,8 \text{ dB}$

Περιοχή (2):

Παραβιάζεται το θεώρημα Shannon-Hartley και υπάρχει υψηλό BER στον δέκτη ανεξάρτητα από την τεχνική κωδικοποίησης.



Περιοχή (1): Ισχύει το θεώρημα Shannon-Hartley και έχουμε αυθαίρετα χαμηλό BER στον δέκτη.

Bit Rate vs Symbol Rate (Baud Rate)

SNR vs E_b/N_0

Αν η (χρονική) διάρκεια των bits (1 ή 0) είναι T_b τότε Data rate, **$R_b = 1/T_b$ (bps)**.

Ένα σύμβολο μπορεί να αντιστοιχεί σε 1 bit (binary symbol) ή σε σύνολο από n bits

ή σε σύνολο M ξεχωριστών επιπέδων τάσεως (Volts).

Αν η (χρονική) διάρκεια των συμβόλων είναι T_s τότε Symbol rate ή Baud rate **$R_s = 1 / T_s$ (baud ή symbols/s)**.

Αν $M=2^n$, τότε **$R_b = R_s \log_2 M = R_s n$ (bps)**

SNR ή $(10\log\text{SNR})\text{db}$ εκφράζει την λόγο της ισχύος του χρήσιμου Σήματος προς την ισχύ του θορύβου.

Σε ψηφιακά συστήματα πιο χρήσιμος είναι ο λόγος **E_b/N_0**

R_b = bit rate (in bits per second)

S = total signal power (watts)

E_b = energy per bit (in joules/bit)

N = total noise power (over entire bandwidth **B** in Hz)

N_0 = noise spectral density (**$N = N_0 \cdot B$** where **B** = bandwidth)

$$\frac{S}{R_b} = E_b \qquad \frac{E_b}{N} = \frac{S}{R_b \cdot N} \qquad \text{SNR} = \frac{R_b E_b}{N_0 B}$$

Αύξηση $R_b \Rightarrow$ αύξηση SNR αλλά και του θορύβου N που μπορεί να ελαττώσει τον SNR

Φασμασματική απόδοση (N_{BW}) συναρτήσει του E_b/N_0

- Η λαμβανομένη ισχύς (λευκού) θορύβου είναι άμεση συνάρτηση του εύρους ζώνης μετάδοσης. Αν π.χ. έχουμε εύρος ζώνης W , η ισχύς του θορύβου είναι $N_0 W$.

- Αν η ισχύς του πληροφοριακού σήματος είναι $P_s = E_b R$, τότε

$$SNR = P_s / (N_0 W) = E_b R / (N_0 W)$$

- $N_{BW} = R/W \leq \log_2(1+SNR) \Rightarrow$

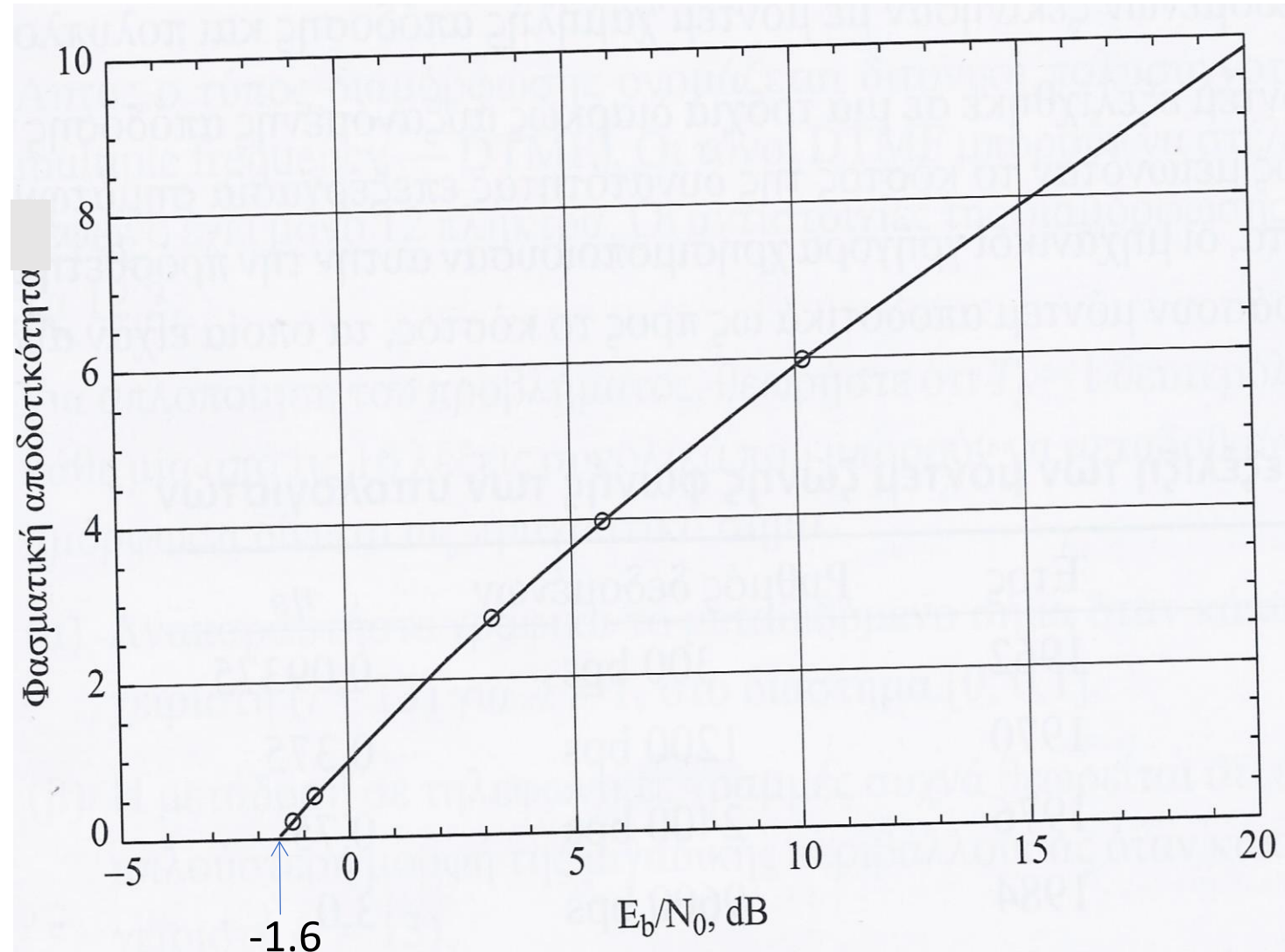
$$N_{BW} \leq \log_2(1+E_b R / (N_0 W)) \Rightarrow$$

$$N_{BW} \leq \log_2(1 + (E_b/N_0)N_{BW}) \Rightarrow$$

$$2^{N_{BW}} \leq 1 + (E_b/N_0)N_{BW} \Rightarrow$$

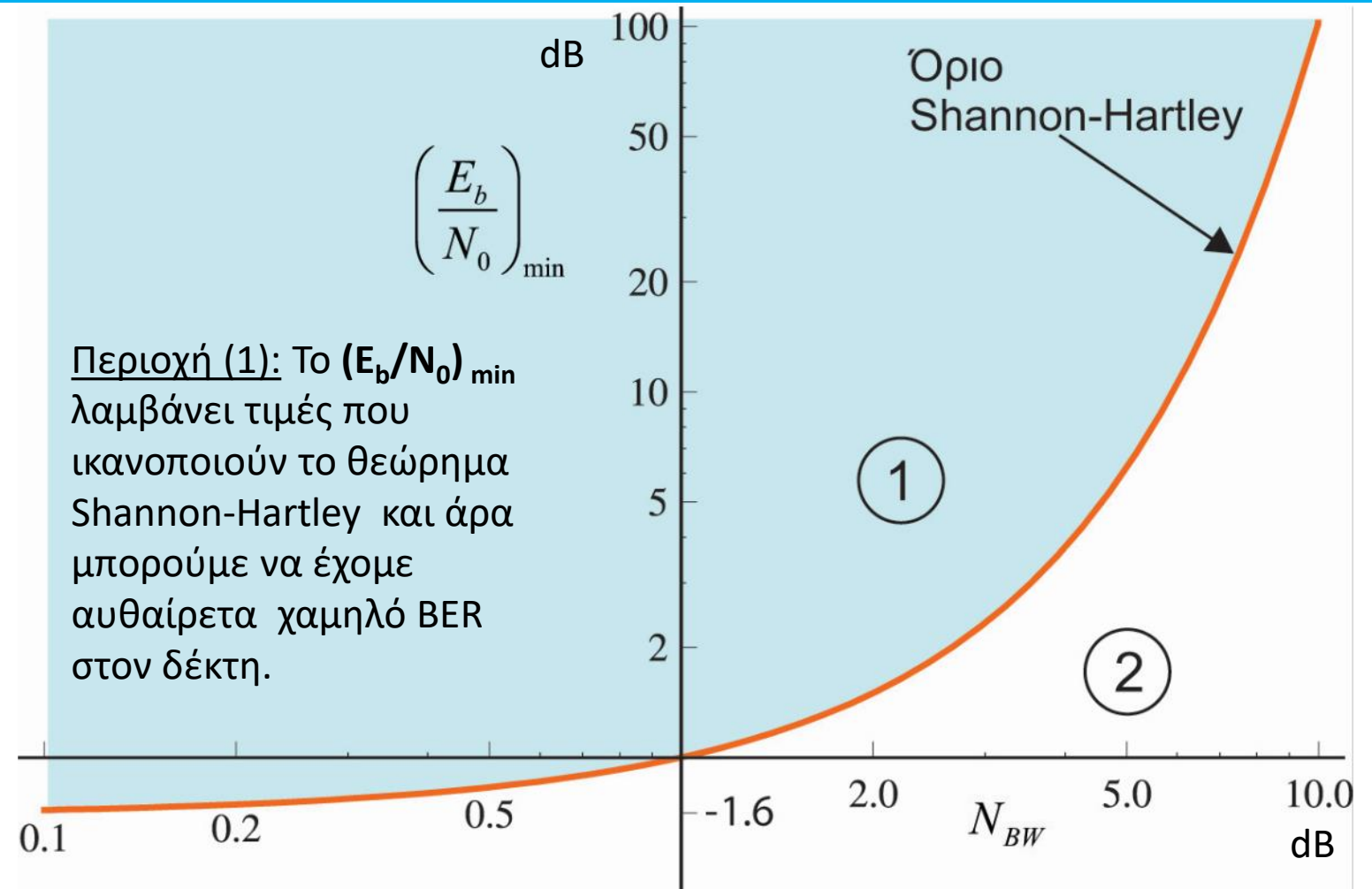
$$(E_b/N_0)_{\min} = (2^{N_{BW}} - 1) / N_{BW}$$

Για να πετύχουμε φασματική απόδοση N_{BW} απαιτείται μια τιμή “energy per bit to noise power spectral density ratio” (normalized SNR) τουλάχιστον $(E_b/N_0)_{\min}$.



$(E_b/N_0)_{\min}$ συναρτήσει της φασματικής απόδοσης N_{BW}

Διάγραμμα $(E_b/N_0)_{\min}$ σε dB ως προς την φασματική απόδοση επίσης σε dB



$$N_{BW} = \log_2(1 + (E_b/N_0) N_{BW}) \Leftrightarrow$$

$$2^{N_{BW}} = 1 + (E_b/N_0) N_{BW} \Leftrightarrow$$

$$(E_b/N_0) = (2^{N_{BW}} - 1) / N_{BW} \Leftrightarrow (E_b/N_0)_{\min} =$$

$$\lim(2^{N_{BW}} - 1) / N_{BW} \text{ (όταν } N_{BW} \rightarrow 0) \Leftrightarrow$$

$$(E_b/N_0)_{\min} = \ln(2) = 0.693 \Leftrightarrow$$

$$(E_b/N_0)_{\min} = -1.5917 \text{ dB}$$

$$\text{ή } (E_b/N_0)_{\min} \cong -1.6 \text{ dB}$$

Δηλ. υπάρχει κάτω όριο για $(E_b/N_0)_{\min}$ στην τιμή 0.69 ή -1.6 dB. Κάτω από αυτό το όριο, δεν μπορούμε να εγγυηθούμε χαμηλό BER (ακόμη και με ιδιαίτερα πολύπλοκη τεχνική κωδικοποίησης).