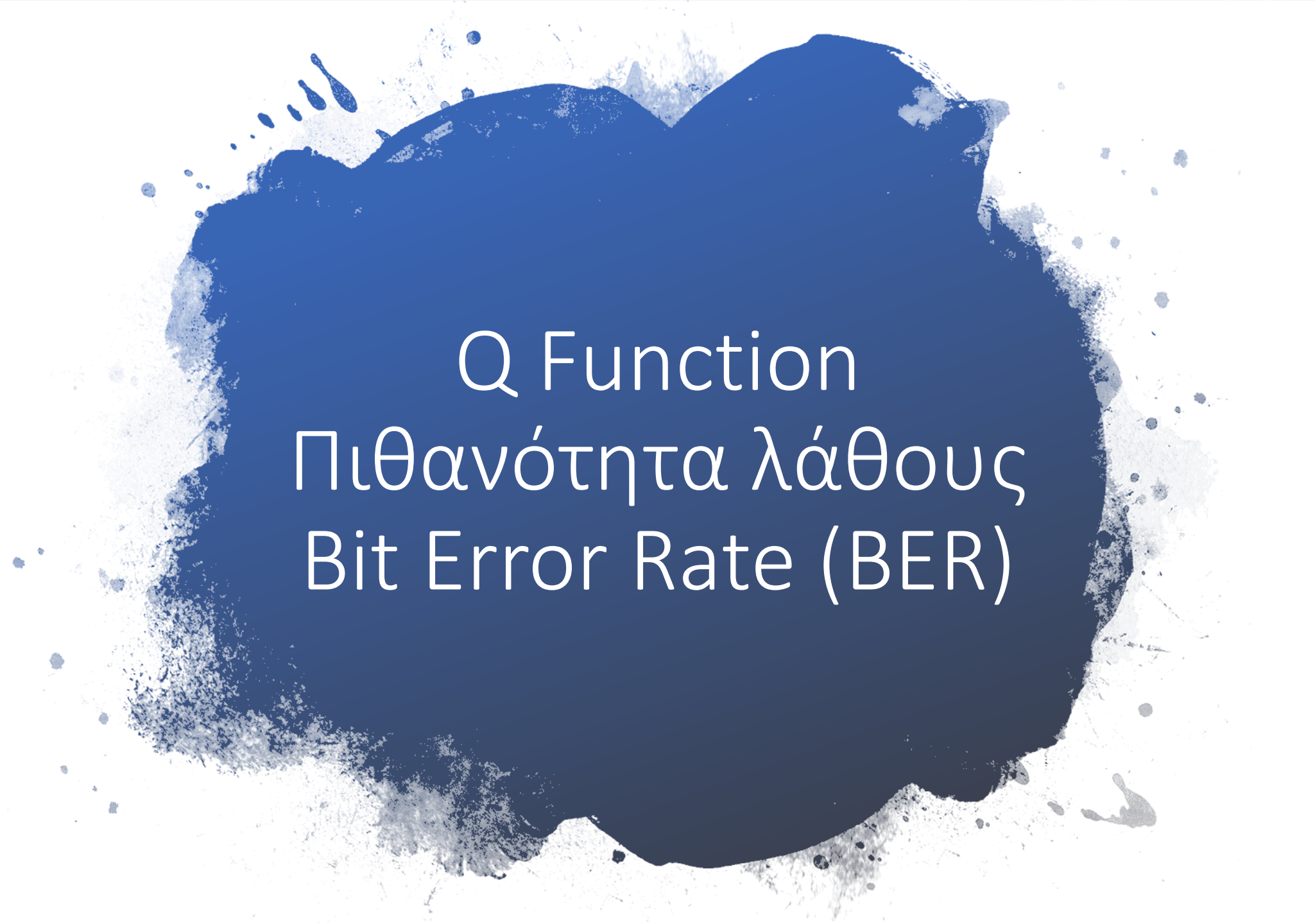




Q Function

Πιθανότητα λάθους

Bit Error Rate (BER)

ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

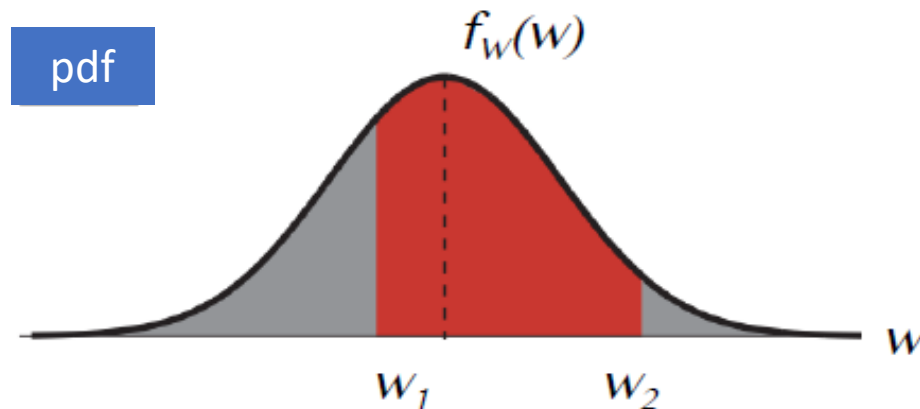
-
probability
density
function
(pdf)

Πείραμα

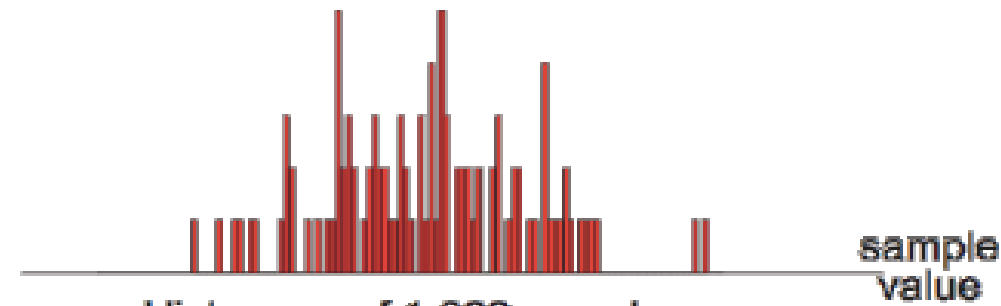
Δημιουργήστε ιστογράμματα των τυχαίων τιμών ενός πειράματος κάνοντας ανεξάρτητες επαναλήψεις με αυξανόμενο αριθμό τιμών κάθε φορά.

Τα ιστογράμματα θα συγκλίνουν σε σχήμα όπως το τελευταίο, παραπλεύρως. Αν κανονικοποιήσουμε το σχήμα ώστε το εμβαδόν του να είναι μονάδα, τότε στο περίγραμμο έχουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (**pdf**).

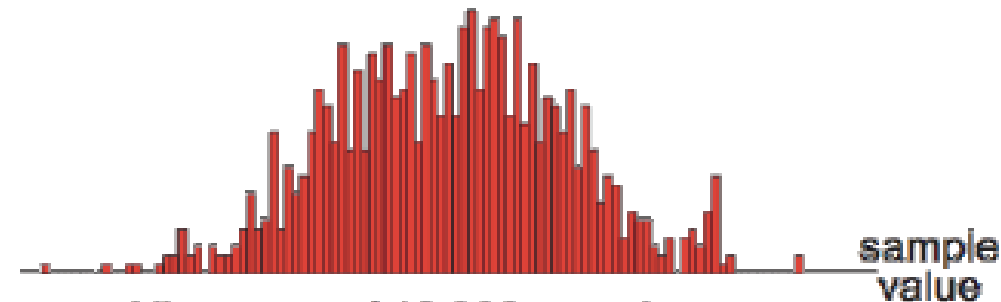
$$p(w_1 < W < w_2) = \int_{w_1}^{w_2} f_W(w) dw$$



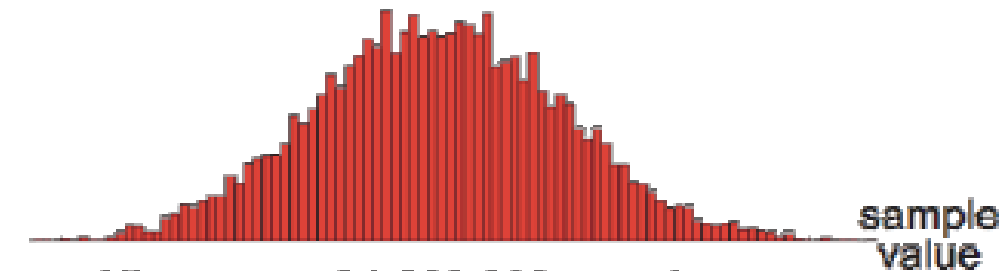
Histogram of 100 samples



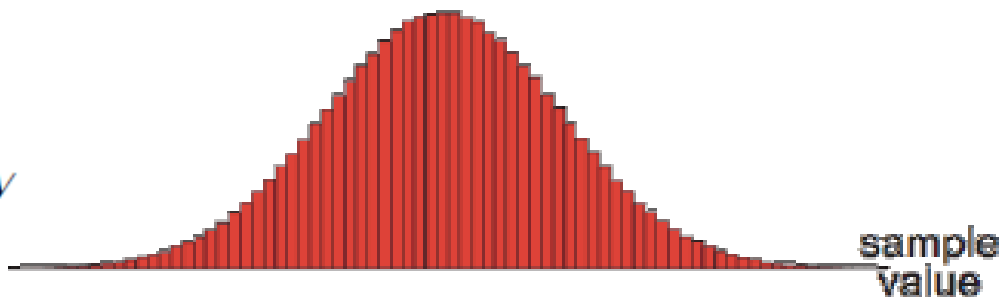
Histogram of 1,000 samples



Histogram of 10,000 samples



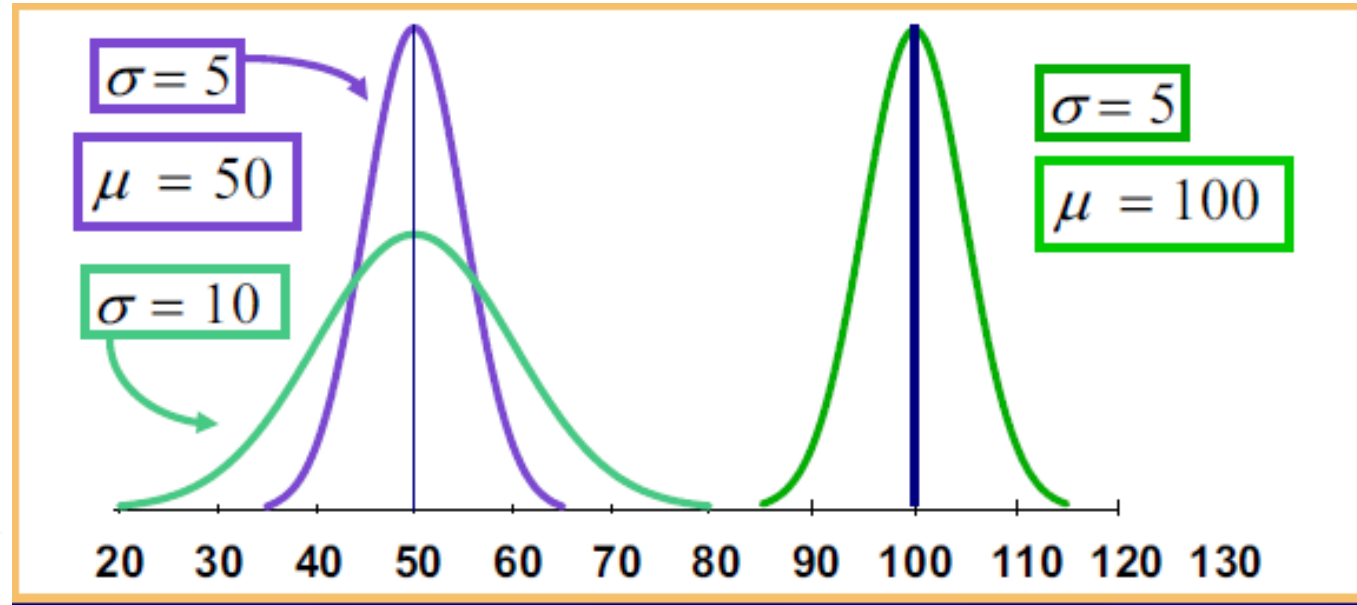
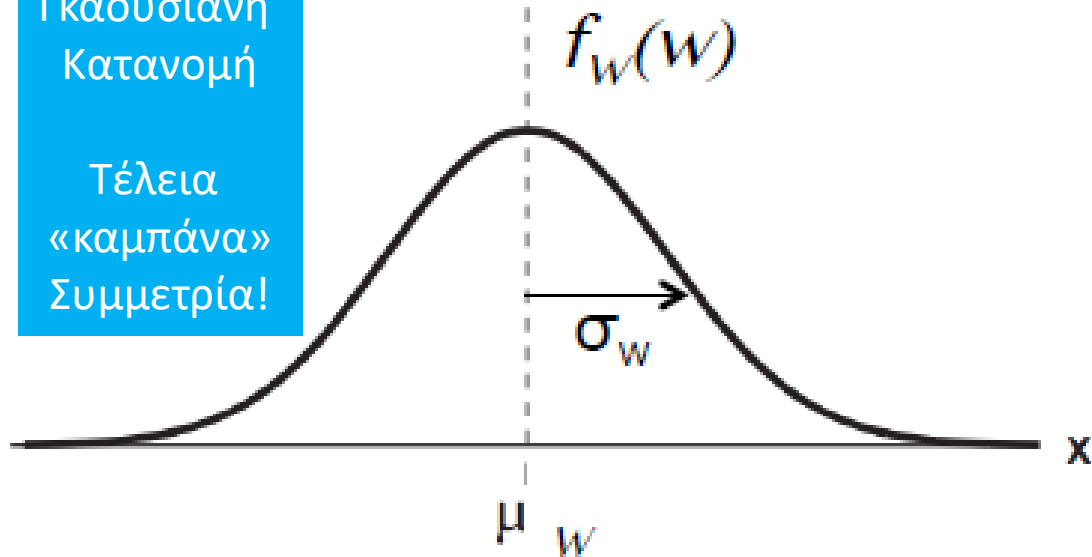
Histogram of 1,000,000 samples



Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ. W

Γκαουσιανή
Κατανομή

Τέλεια
«καμπάνα»
Συμμετρία!



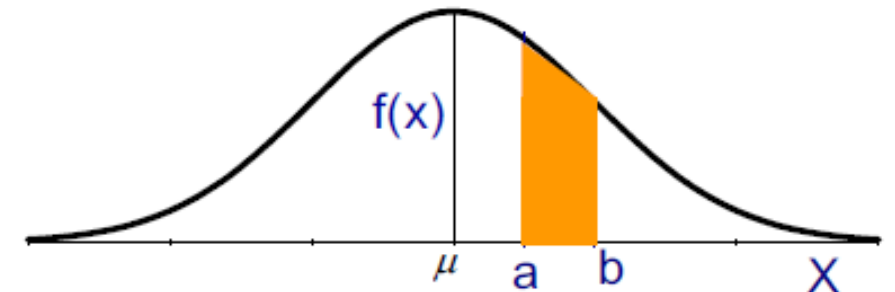
Μέση τιμή μ

$$\mu_W = \int_{-\infty}^{\infty} w f_W(w) dw$$

Διασπορά σ^2

$$E[(W - \mu_W)^2] = \sigma_W^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (w - \mu_W)^2 f_W(w) dw$$

Τυπική απόκλιση $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$



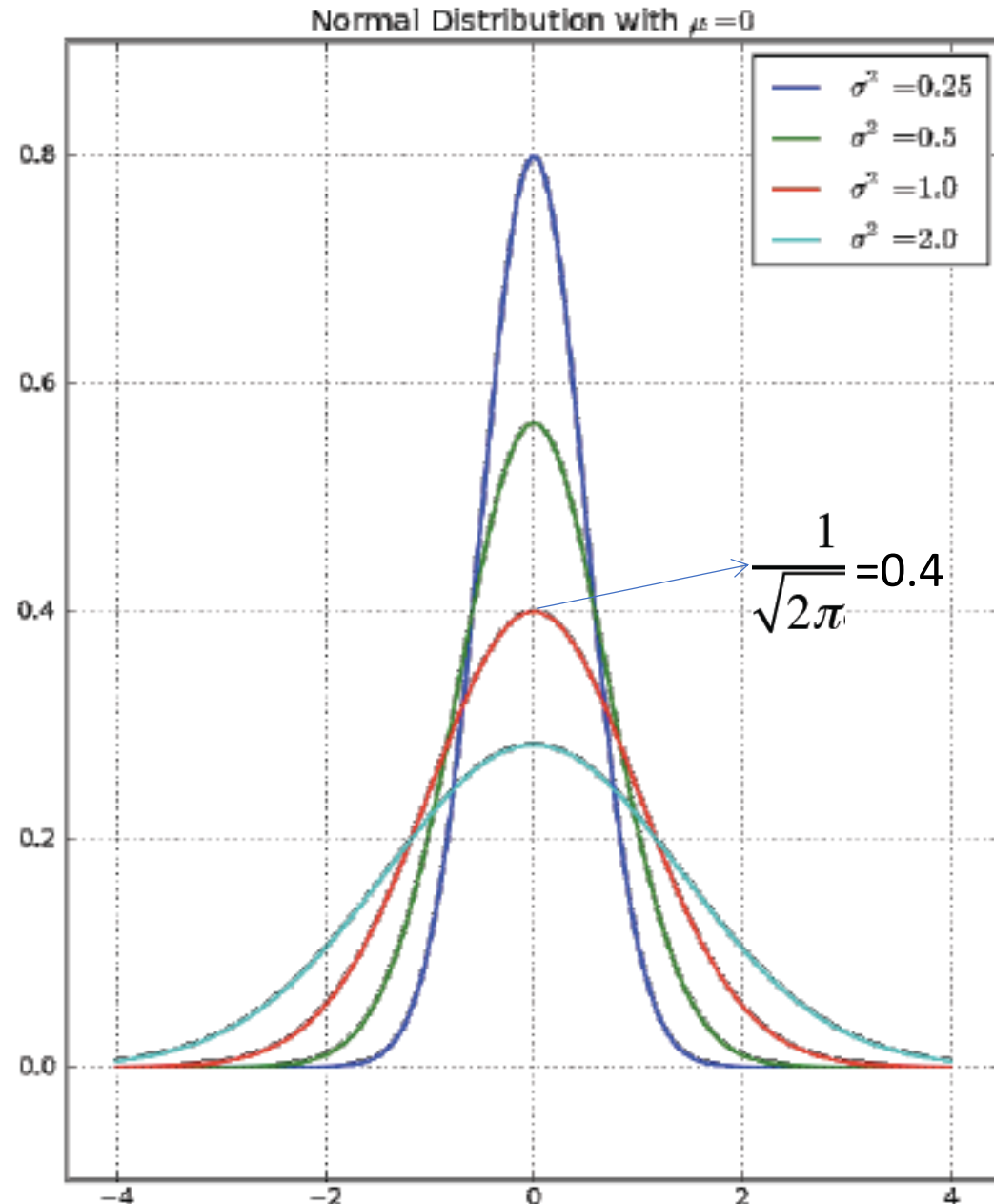
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Η Κατανομή του Gauss – Κανονική κατανομή

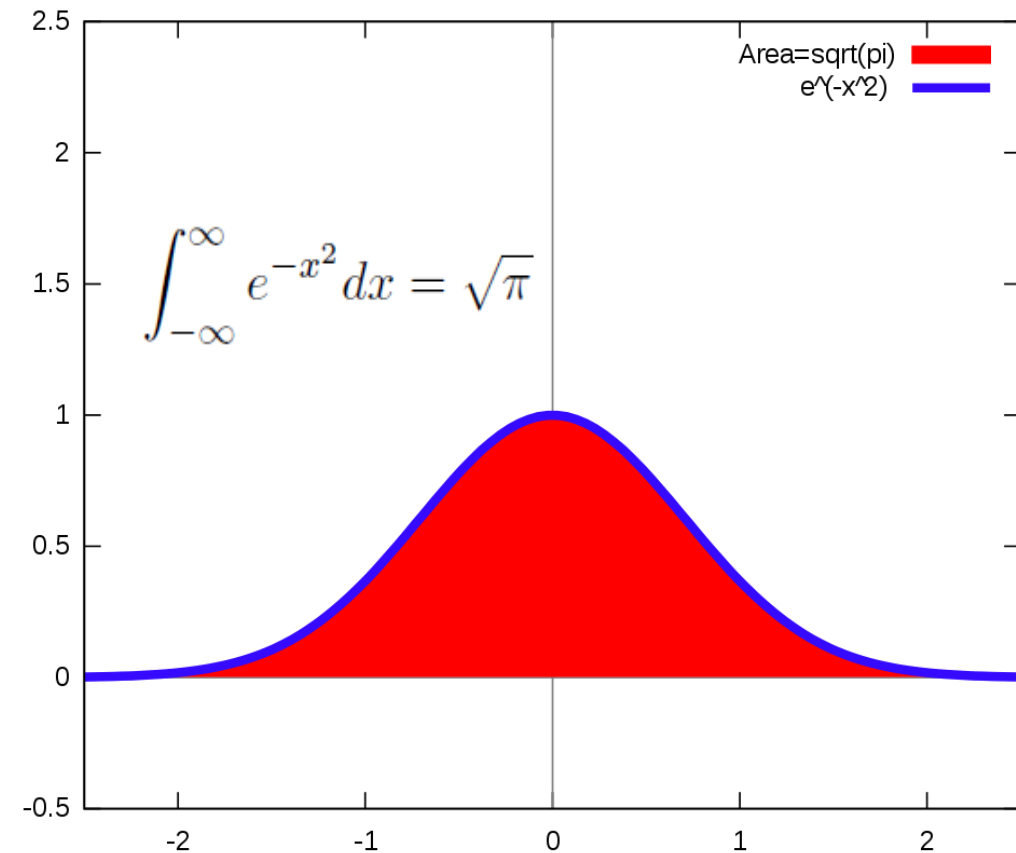
A Gaussian random variable W with **mean** μ and **variance** σ^2 has a **pdf** described by

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(w-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Αν $\mu=0$ και $\sigma^2=1$ τότε έχουμε την κανονική κατανομή $N(0,1)$

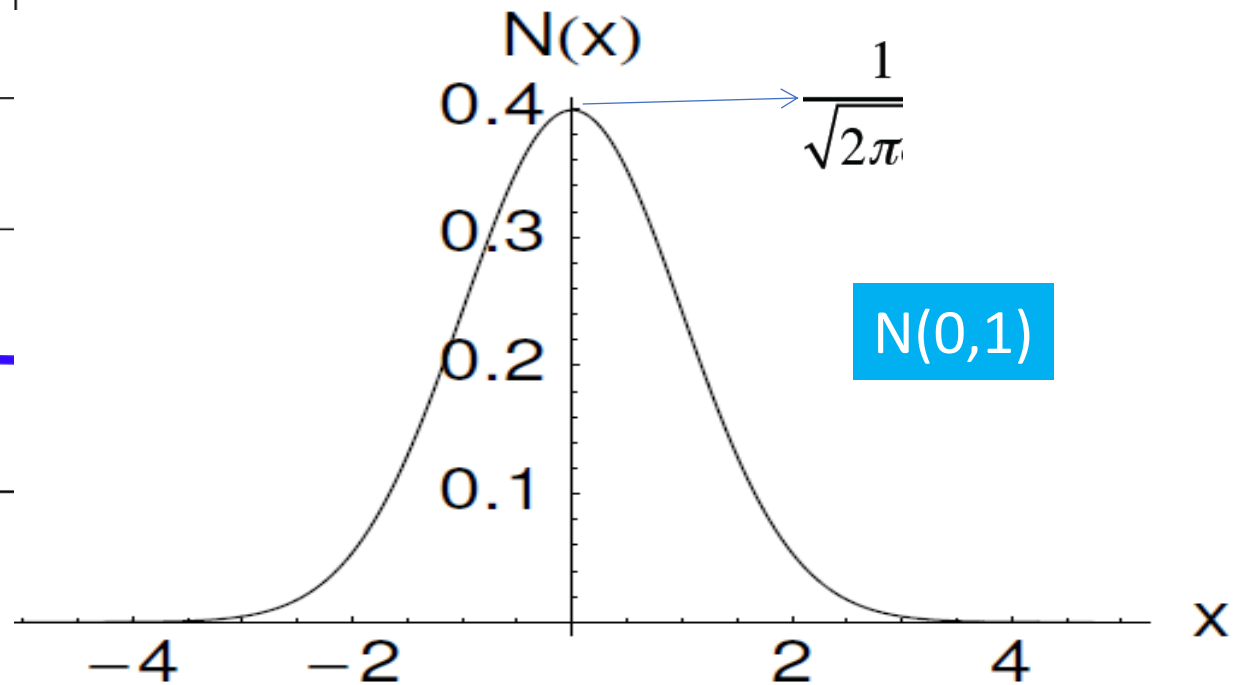


Σχόλια στην κατανομή Gaussian / Normal



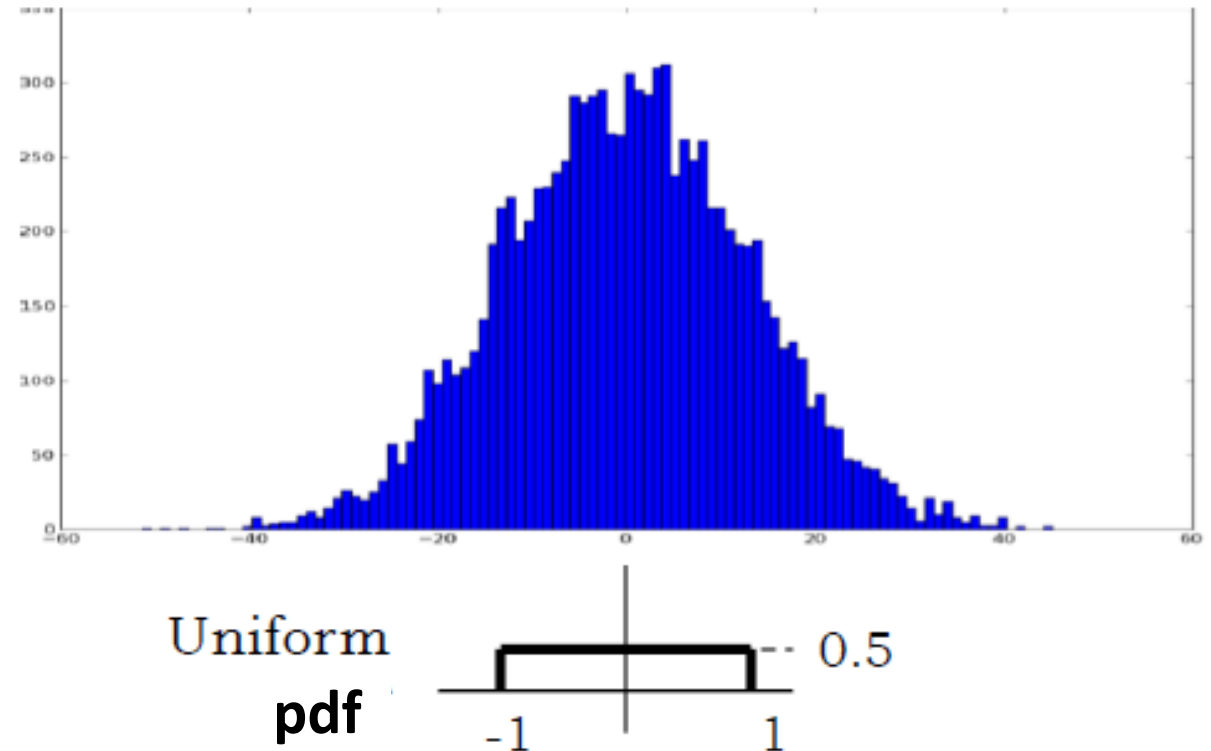
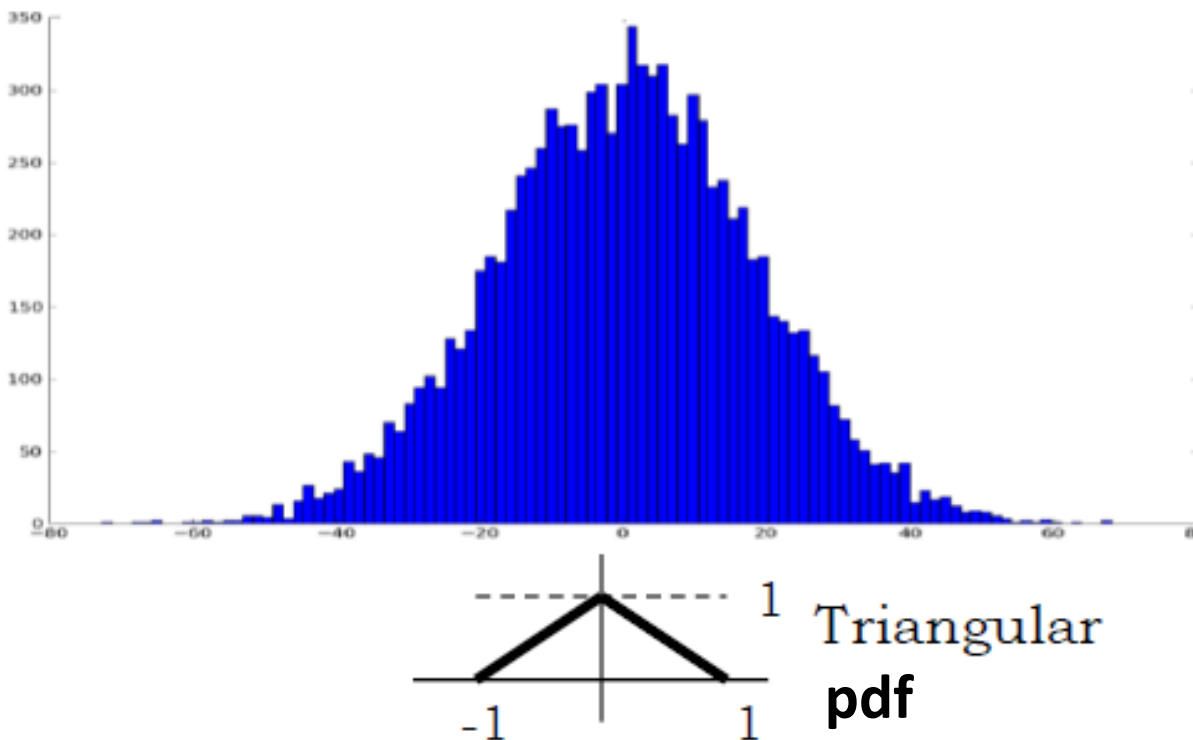
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

$$\int_{-x}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1$$

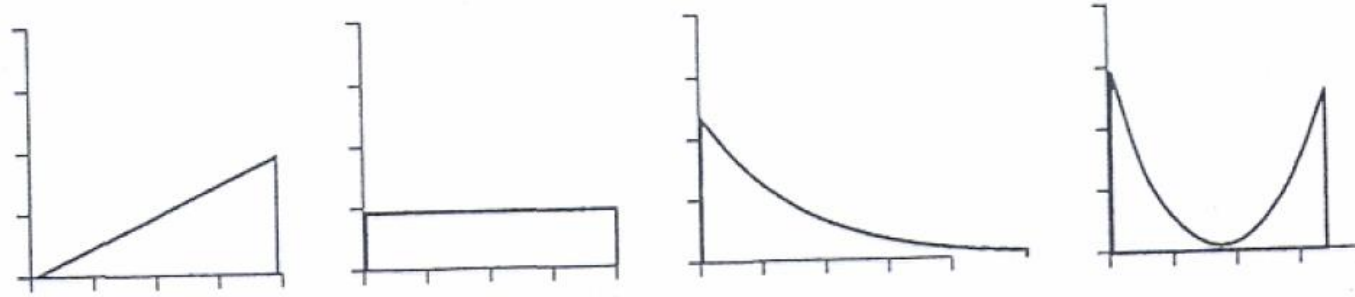


Πανταχού παρόν – Γκαουσιανός Θόρυβος

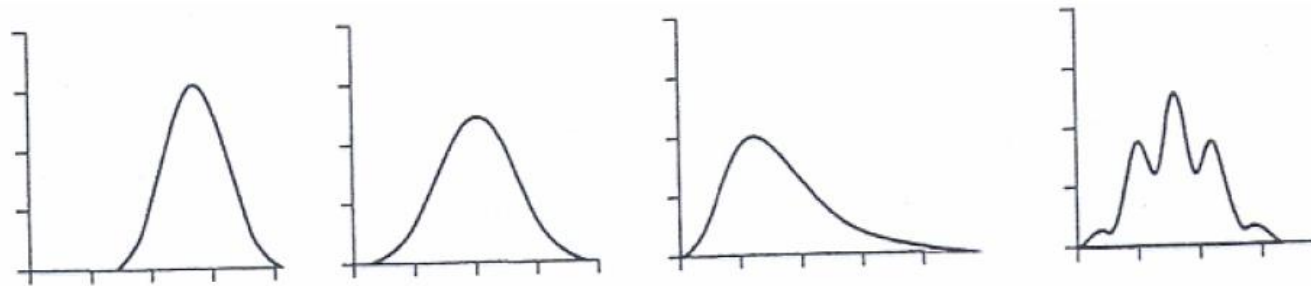
- ❑ Ο θόρυβος που λαμβάνεται στον δέκτη είναι συχνά το άθροισμα πολλών επιμέρους θορύβων ανεξάρτητων μεταξύ τους που προέρχονται από πολλές διαφορετικές πηγές. Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα λέει ότι το άθροισμά τους θα είναι Γκαουσιανός θόρυβος, ειδικά αν ο αριθμός τους είναι μεγάλος.
- ❑ Το σχήμα δείχνει τα ιστογράμματα των αποτελεσμάτων 10.000 δοκιμών (επαναλήψεων) αθροίσματος 100 τυχαίων δειγμάτων που αντλήθηκαν από $[-1,1]$ χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές κατανομές.



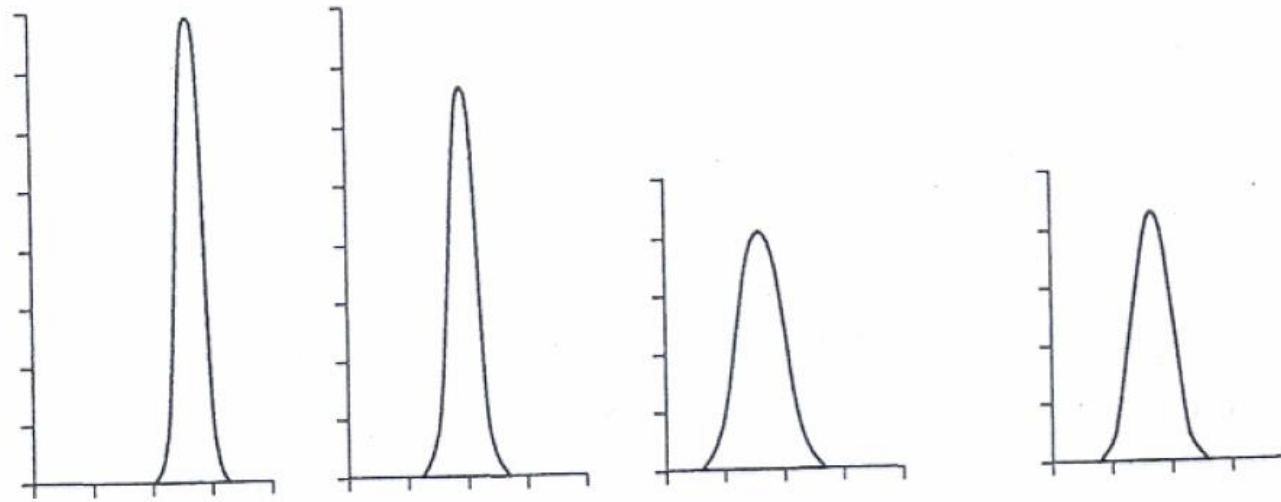
Παράδειγμα Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος



■ οι κατανομές των δειγματικών μέσων είναι αντίστοιχα,
για $n = 4$:



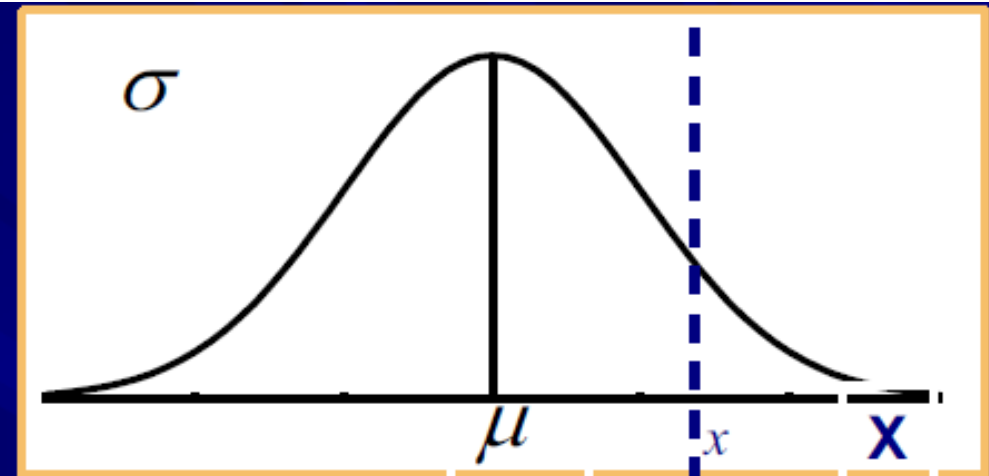
και για $n = 25$:



Σχέση της Γκαουσιανής κατανομής με την Κανονική $N(0,1)$

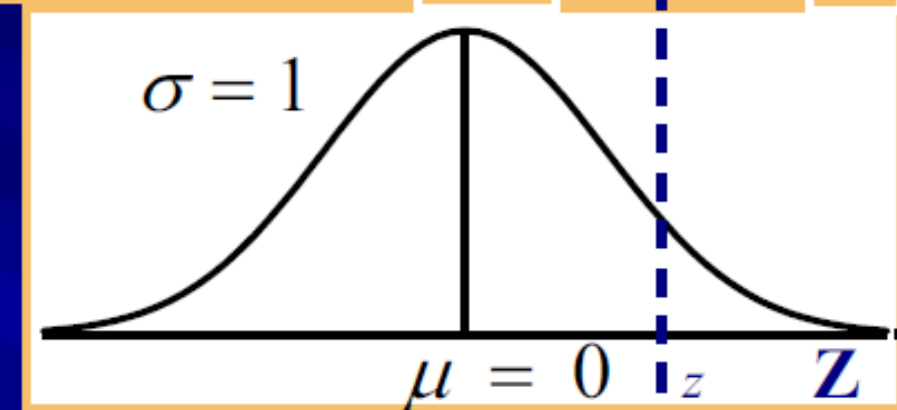
■ Value x from RV $X \sim N(\mu, \sigma)$: →

Γκαουσιανή κατανομή



■ Value z from RV $Z \sim N(0,1)$: →

Τυποποιημένη Γκαουσιανή κατανομή
Κανονική κατανομή $N(0,1)$



■ z Score transformation:

Η τιμή z δείχνει πόσες τυπικές αποκλίσεις σ απέχει η τιμή x από το μέσο όρο μ . Έστω $x=190$, $\mu=150$, $\sigma=25$, τότε $z=(190-150)/25=1,6$.

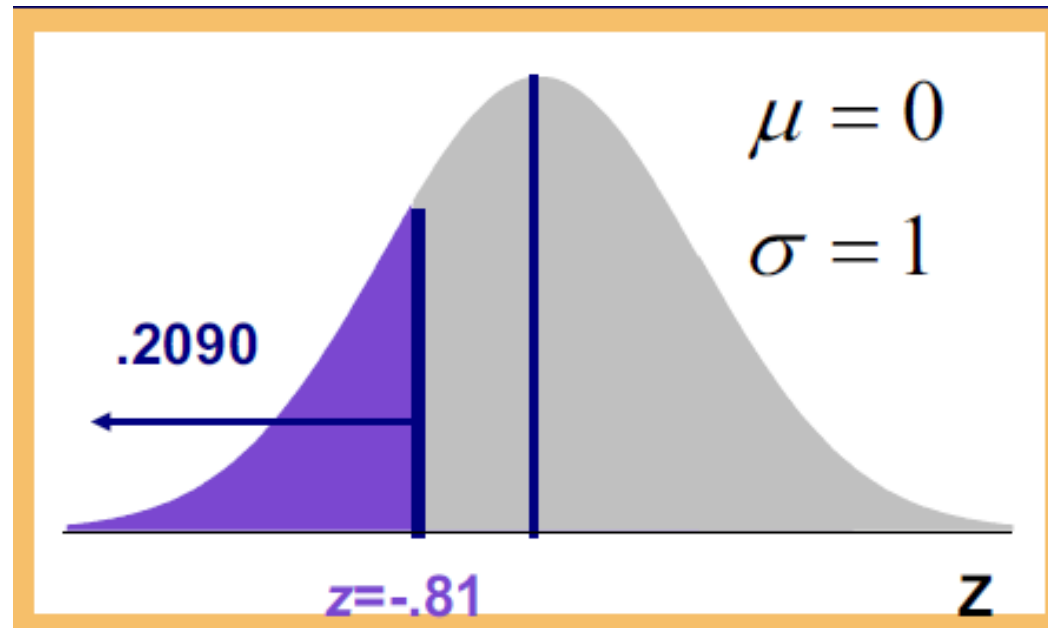
Δηλ. η τιμή 190 είναι 1,6 τυπικές αποκλίσεις πάνω από το 150.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Χρήση της τυποποιημένης κατανομής $N(0,1)$

Διατίθενται πίνακες που δείχνουν τιμές της αθροιστικής κατανομής (Cumulative Distribution Function - CDF)

Π.χ. για $z = -0.81$, τότε από τους πίνακες παίρνουμε $CDF(z) = P(z \leq -0.81) = 0.2090$



CDF

της

τυποκοιημένης

Κανονικής

Κατανομής

Cumulative Distribution Function of the Standard Normal Distribution										
Example:		If Z is standard Normal random variable, then $F(1.00) = P(Z \leq 1.00) = .8413$								
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

CDF
της τυποποιημένης
Κανονικής
Κατανομής

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

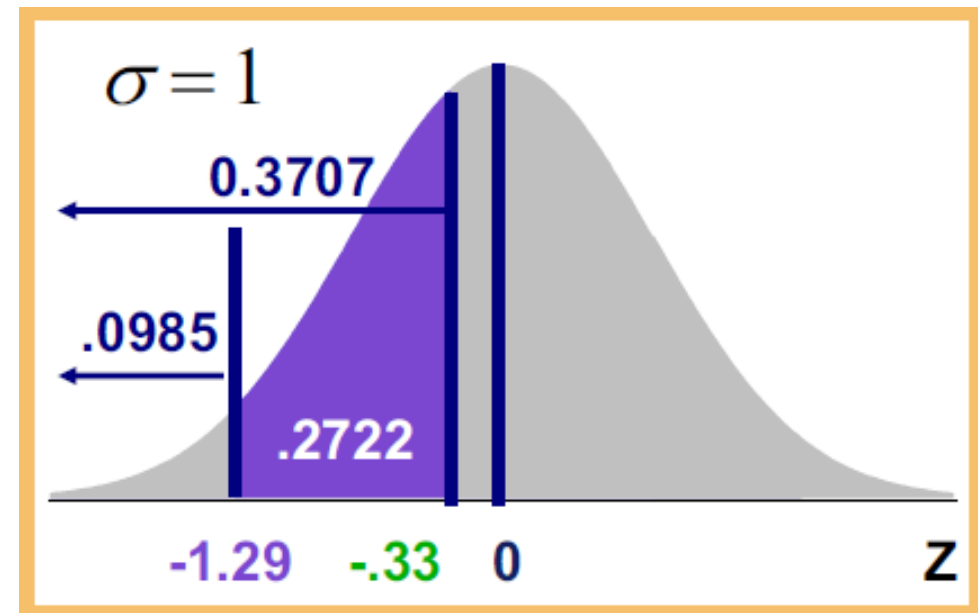
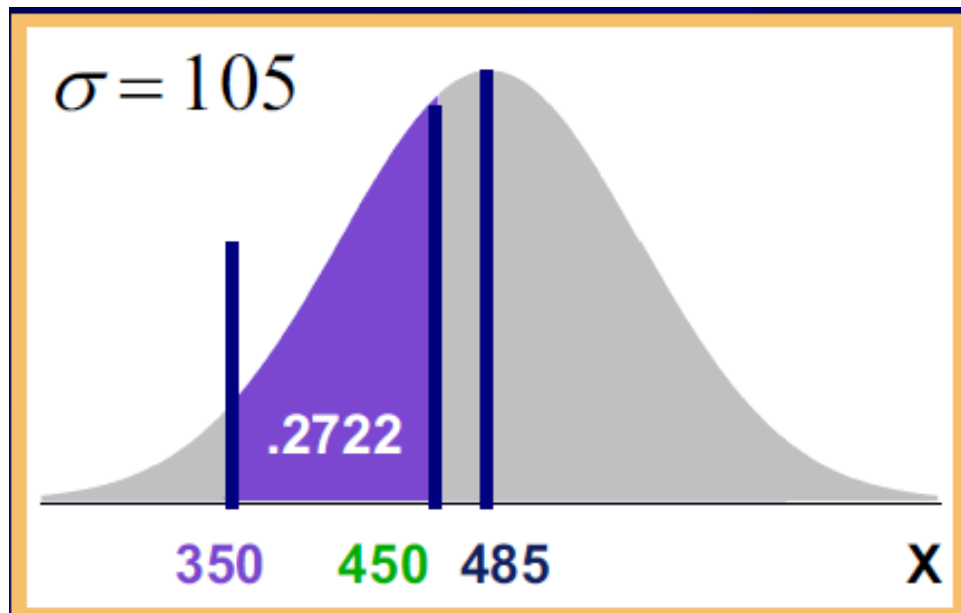
Εύρεση Πιθανότητας από Γκαουσιανή Κατανομή $N(\mu, \sigma)$

X is normally distributed with $\mu = 485$, and $\sigma = 105$

$$P(350 \leq x \leq 450) = P(-1.29 \leq z \leq -0.33)$$

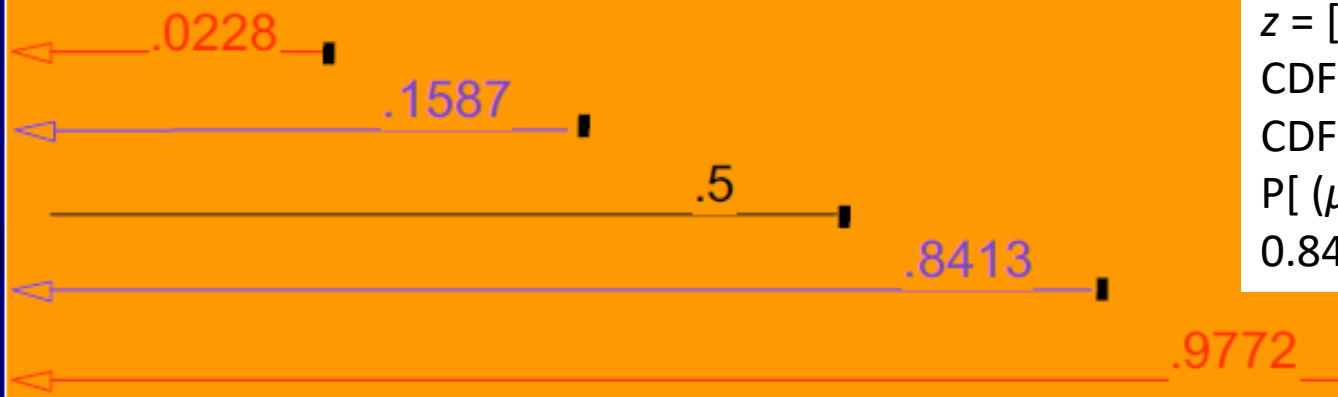
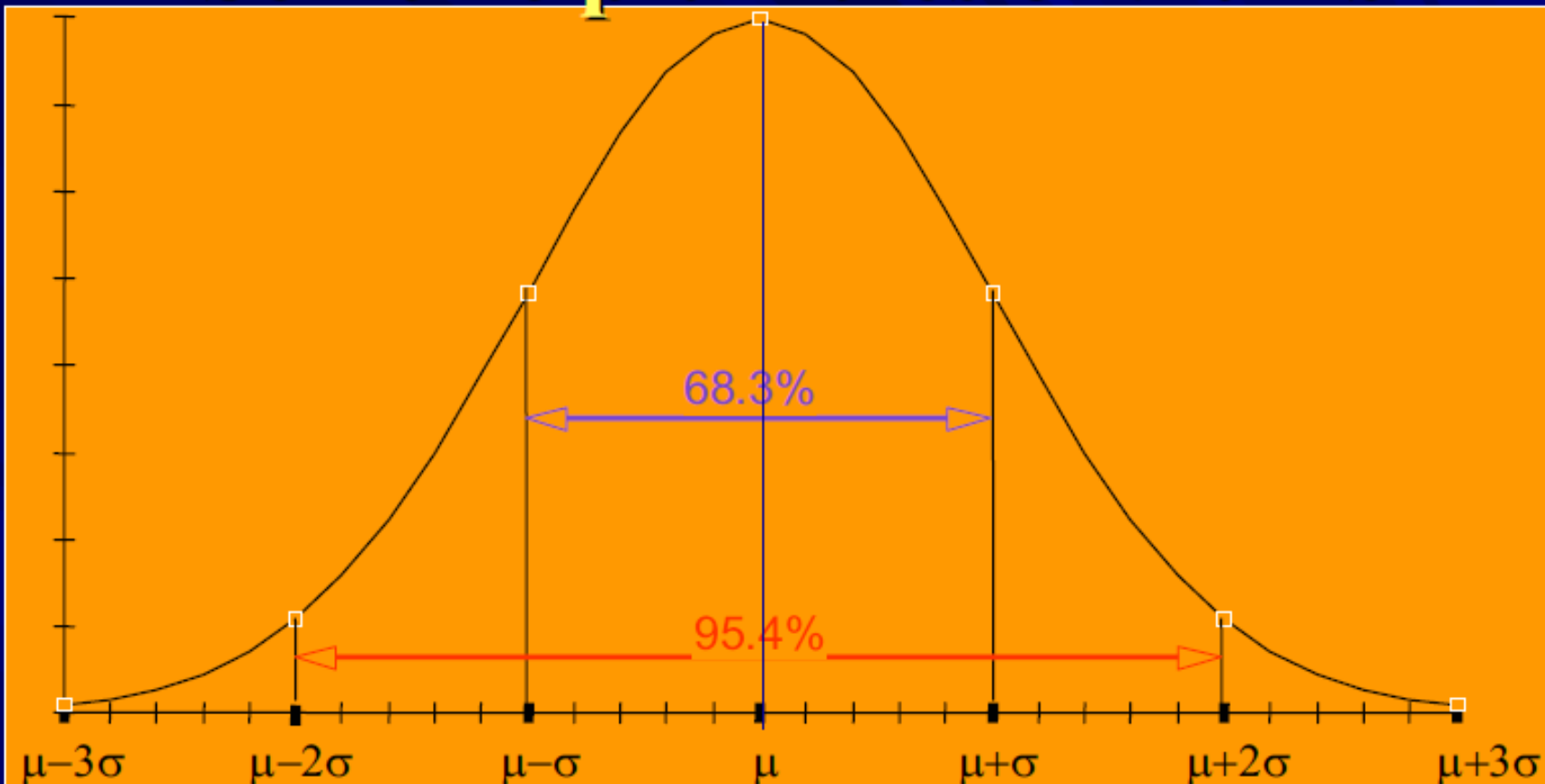
$$= P(z \leq -0.33) - P(z \leq -1.29) = 0.3707 - 0.0985 = 0.2722$$

Μετασχηματίζουμε τις τιμές x σε z: $z = (450-485)/105 = -0.33$ και $z = (350-485)/105 = -1.29$ και χρησιμοποιούμε τους πίνακες CDF της τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής $N(0, 1)$



Some helpful rules of thumb

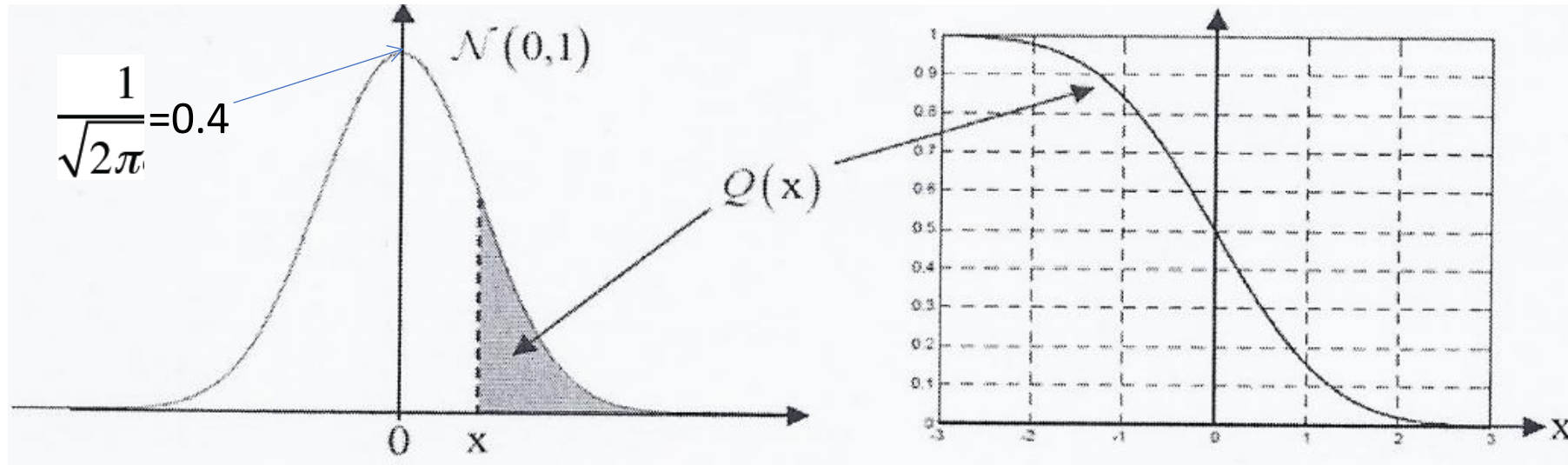
Αξίζει να
θυμόμαστε
από την
 $N(\mu, \sigma)$



$$z = [(\mu + \sigma) - \mu] / \sigma = +1$$
$$z = [(\mu - \sigma) - \mu] / \sigma = -1$$
$$\text{CDF}(+1) = 0.8413$$
$$\text{CDF}(-1) = 0.1587$$
$$P[(\mu - \sigma) \leq x \leq (\mu + \sigma)] = 0.8413 - 0.1587 = 68.3\%$$

Q-Function: Πιθανότητα «ουράς» Κανονικής Κατανομής

$$Q(\alpha) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad Q(-\infty) = 1 \quad ; \quad Q(0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad Q(\infty) = 0 \quad ; \quad Q(-x) = 1 - Q(x)$$



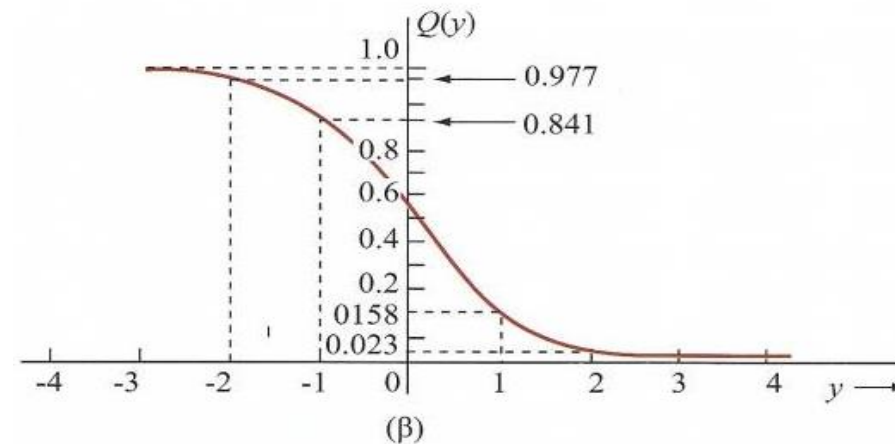
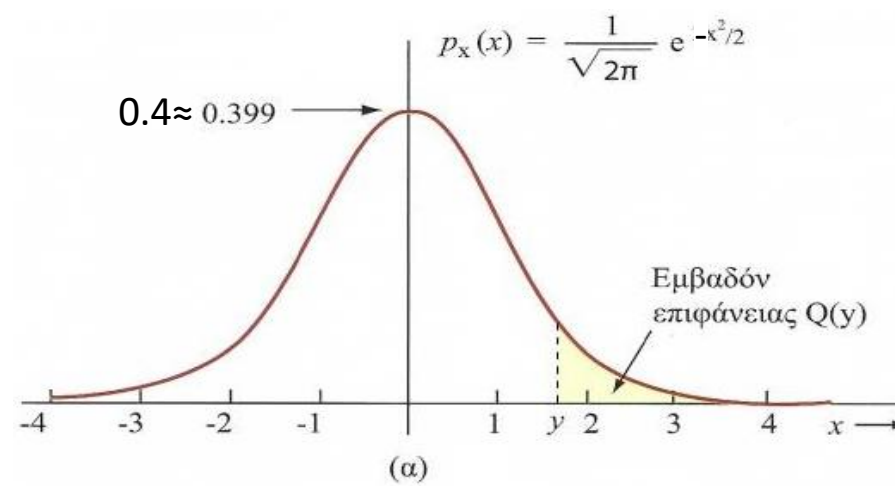
$Q(a) = 1 - \text{CDF}(a)$, όπου $\text{CDF}(a)$ η τιμή της CDF από τους πίνακες της $N(0,1)$ για $z = a$
Π.χ. $Q(1) = 1 - \text{CDF}(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \Pr\{X > x\} = Q\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad \Pr\{X > \mu + a\} = \Pr\{X < \mu - a\} = Q\left(\frac{a}{\sigma}\right)$$

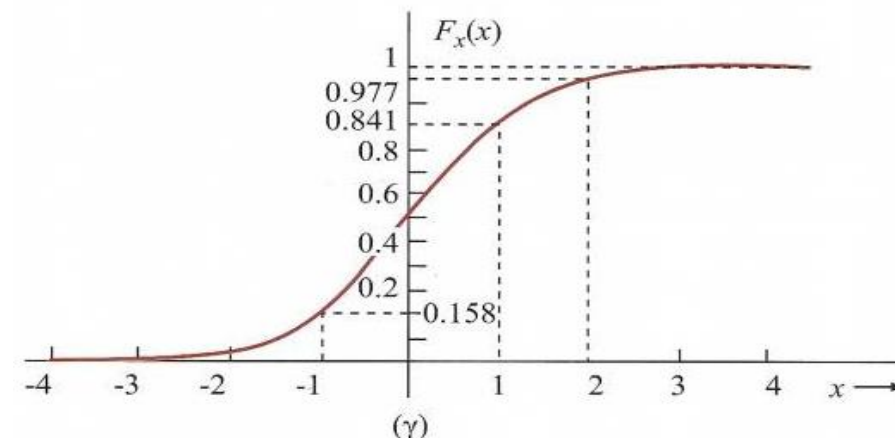
Gaussian
Distribution (α)

Q-function (β)

Cumulative
Distribution (γ)



$$Q(2) = 1 - F(2) = 1 - 0.977 = 0.023$$



$$F(2) = 1 - Q(2) = 1 - 0.023 = 0.977$$

x	$Q(x)$	x	$Q(x)$	x	$Q(x)$
0.00	0.5	2.30	0.010724	4.55	2.6823×10^{-6}
0.05	0.48006	2.35	0.0093867	4.60	2.1125×10^{-6}
0.10	0.46017	2.40	0.0081975	4.65	1.6597×10^{-6}
0.15	0.44038	2.45	0.0071428	4.70	1.3008×10^{-6}
0.20	0.42074	2.50	0.0062097	4.75	1.0171×10^{-6}
0.25	0.40129	2.55	0.0053861	4.80	7.9333×10^{-7}
0.30	0.38209	2.60	0.0046612	4.85	6.1731×10^{-7}
0.35	0.36317	2.65	0.0040246	4.90	4.7918×10^{-7}
0.40	0.34458	2.70	0.003467	4.95	3.7107×10^{-7}
0.45	0.32636	2.75	0.0029798	5.00	2.8665×10^{-7}
0.50	0.30854	2.80	0.0025551	5.05	2.2091×10^{-7}
0.55	0.29116	2.85	0.002186	5.10	1.6983×10^{-7}
0.60	0.27425	2.90	0.0018658	5.15	1.3024×10^{-7}
0.65	0.25785	2.95	0.0015889	5.20	9.9644×10^{-8}
0.70	0.24196	3.00	0.0013499	5.25	7.605×10^{-8}
0.75	0.22663	3.05	0.0011442	5.30	5.7901×10^{-8}
0.80	0.21186	3.10	0.0009676	5.35	4.3977×10^{-8}
0.85	0.19766	3.15	0.00081635	5.40	3.332×10^{-8}
0.90	0.18406	3.20	0.00068714	5.45	2.5185×10^{-8}
0.95	0.17106	3.25	0.00057703	5.50	1.899×10^{-8}
1.00	0.15866	3.30	0.00048342	5.55	1.4283×10^{-8}
1.05	0.14686	3.35	0.00040406	5.60	1.0718×10^{-8}
1.10	0.13567	3.40	0.00033693	5.65	8.0224×10^{-9}
1.15	0.12507	3.45	0.00028029	5.70	5.9904×10^{-9}
1.20	0.11507	3.50	0.00023263	5.75	4.4622×10^{-9}
1.25	0.10565	3.55	0.00019262	5.80	3.3157×10^{-9}
1.30	0.0968	3.60	0.00015911	5.85	2.4579×10^{-9}
1.35	0.088508	3.65	0.00013112	5.90	1.8175×10^{-9}
1.40	0.080757	3.70	0.0001078	5.95	1.3407×10^{-9}
1.45	0.073529	3.75	8.8417×10^{-5}	6.00	9.8659×10^{-10}
1.50	0.066807	3.80	7.2348×10^{-5}	6.05	7.2423×10^{-10}
1.55	0.060571	3.85	5.9059×10^{-5}	6.10	5.3034×10^{-10}
1.60	0.054799	3.90	4.8096×10^{-5}	6.15	3.8741×10^{-10}
1.65	0.049471	3.95	3.9076×10^{-5}	6.20	2.8232×10^{-10}
1.70	0.044565	4.00	3.1671×10^{-5}	6.25	2.0523×10^{-10}
1.75	0.040059	4.05	2.5609×10^{-5}	6.30	1.4882×10^{-10}
1.80	0.03593	4.10	2.0658×10^{-5}	6.35	1.0766×10^{-10}
1.85	0.032157	4.15	1.6624×10^{-5}	6.40	7.7688×10^{-11}
1.90	0.028717	4.20	1.3346×10^{-5}	6.45	5.5925×10^{-11}
1.95	0.025588	4.25	1.0689×10^{-5}	6.50	4.016×10^{-11}
2.00	0.02275	4.30	8.5399×10^{-6}	6.55	2.8769×10^{-11}
2.05	0.020182	4.35	6.8069×10^{-6}	6.60	2.0558×10^{-11}
2.10	0.017864	4.40	5.4125×10^{-6}	6.65	1.4655×10^{-11}
2.15	0.015778	4.45	4.2935×10^{-6}	6.70	1.0421×10^{-11}
2.20	0.013903	4.50	3.3977×10^{-6}	6.75	7.3923×10^{-12}
2.25	0.012224				

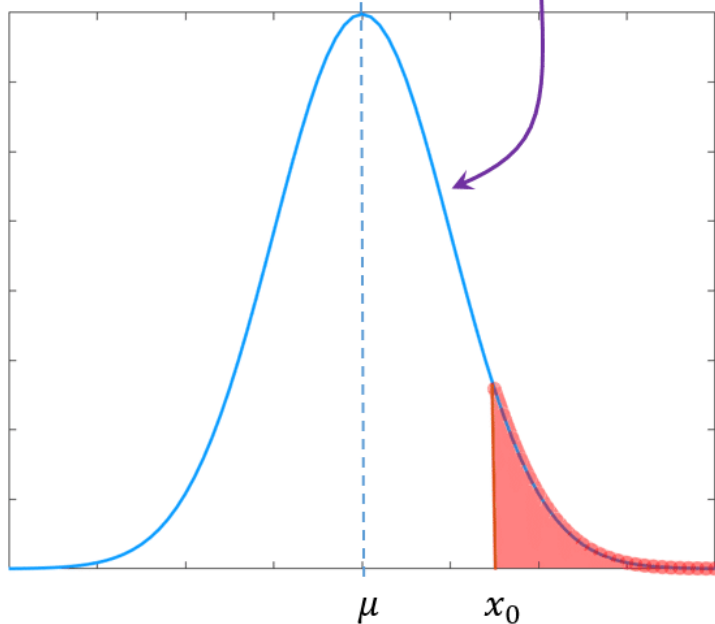
Τιμές της Q-function

x	$Q(x)$	x	$Q(x)$	x	$Q(x)$
0	0.5	2.9	0.00186581	5.8	$3.31575e-9$
0.1	0.460172	3.0	0.0013499	5.9	$1.81751e-9$
0.2	0.42074	3.1	0.000967603	6.0	$9.86588e-10$
0.3	0.382089	3.2	0.000687138	6.1	$5.30342e-10$
0.4	0.344578	3.3	0.000483424	6.2	$2.82316e-10$
0.5	0.308538	3.4	0.000336929	6.3	$1.48823e-10$
0.6	0.274253	3.5	0.000232629	6.4	$7.76885e-11$
0.7	0.241964	3.6	0.000159109	6.5	$4.016e-11$
0.8	0.211855	3.7	0.0001078	6.6	$2.05579e-11$
0.9	0.18406	3.8	0.000072348	6.7	$1.0421e-11$
1.0	0.158655	3.9	0.0000480963	6.8	$5.23096e-12$
1.1	0.135666	4.0	0.0000316712	6.9	$2.60013e-12$
1.2	0.11507	4.1	0.0000206575	7.0	$1.27981e-12$
1.3	0.0968005	4.2	0.0000133457	7.1	$6.23784e-13$
1.4	0.0807567	4.3	$8.53991e-6$	7.2	$3.01063e-13$
1.5	0.0668072	4.4	$5.41254e-6$	7.3	$1.43884e-13$
1.6	0.0547993	4.5	$3.39767e-6$	7.4	$6.80922e-14$
1.7	0.0445655	4.6	$2.11245e-6$	7.5	$3.19089e-14$
1.8	0.0359303	4.7	$1.30081e-6$	7.6	$1.48065e-14$
1.9	0.0287166	4.8	$7.93328e-7$	7.7	$6.80331e-15$
2.0	0.0227501	4.9	$4.79183e-7$	7.8	$3.09536e-15$
2.1	0.0178644	5.0	$2.86652e-7$	7.9	$1.39452e-15$
2.2	0.0139034	5.1	$1.69827e-7$	8.0	$6.22096e-16$
2.3	0.0107241	5.2	$9.96443e-8$		
2.4	0.00819754	5.3	$5.79013e-8$		
2.5	0.00620967	5.4	$3.33204e-8$		
2.6	0.00466119	5.5	$1.89896e-8$		
2.7	0.00346697	5.6	$1.07176e-8$		
2.8	0.00255513	5.7	$5.99037e-9$		

Error Functions (erf - erfc) and Q-Function

Προσοχή!!! Ο τύπος της erf ή της erfc δίδεται για Γκαουσιανή κατανομή με $\mu=0$ και $\sigma^2=1/2 \Rightarrow \sigma=1/\sqrt{2}$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

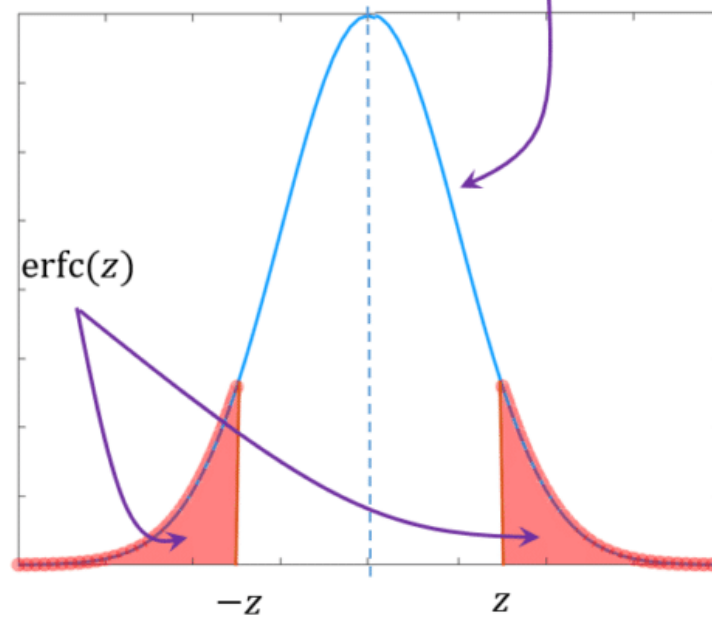


x

$$Q(z) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\operatorname{erfc}(z) = 2 Q(z\sqrt{2})$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$



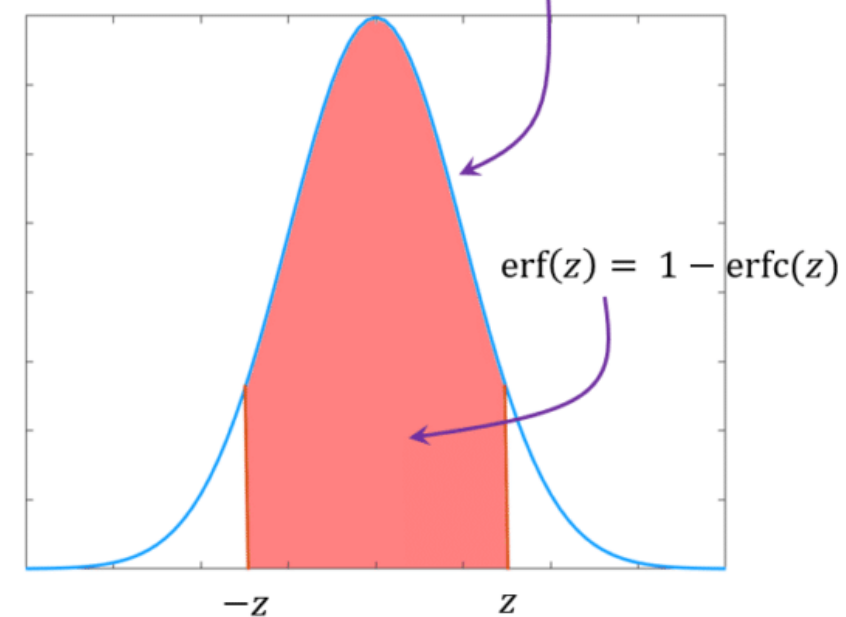
x

Complementary error function : $\operatorname{erfc}(z)$

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\operatorname{erf}(z) = 1 - \operatorname{erfc}(z)$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$



x

Error function : $\operatorname{erf}(z)$

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx$$

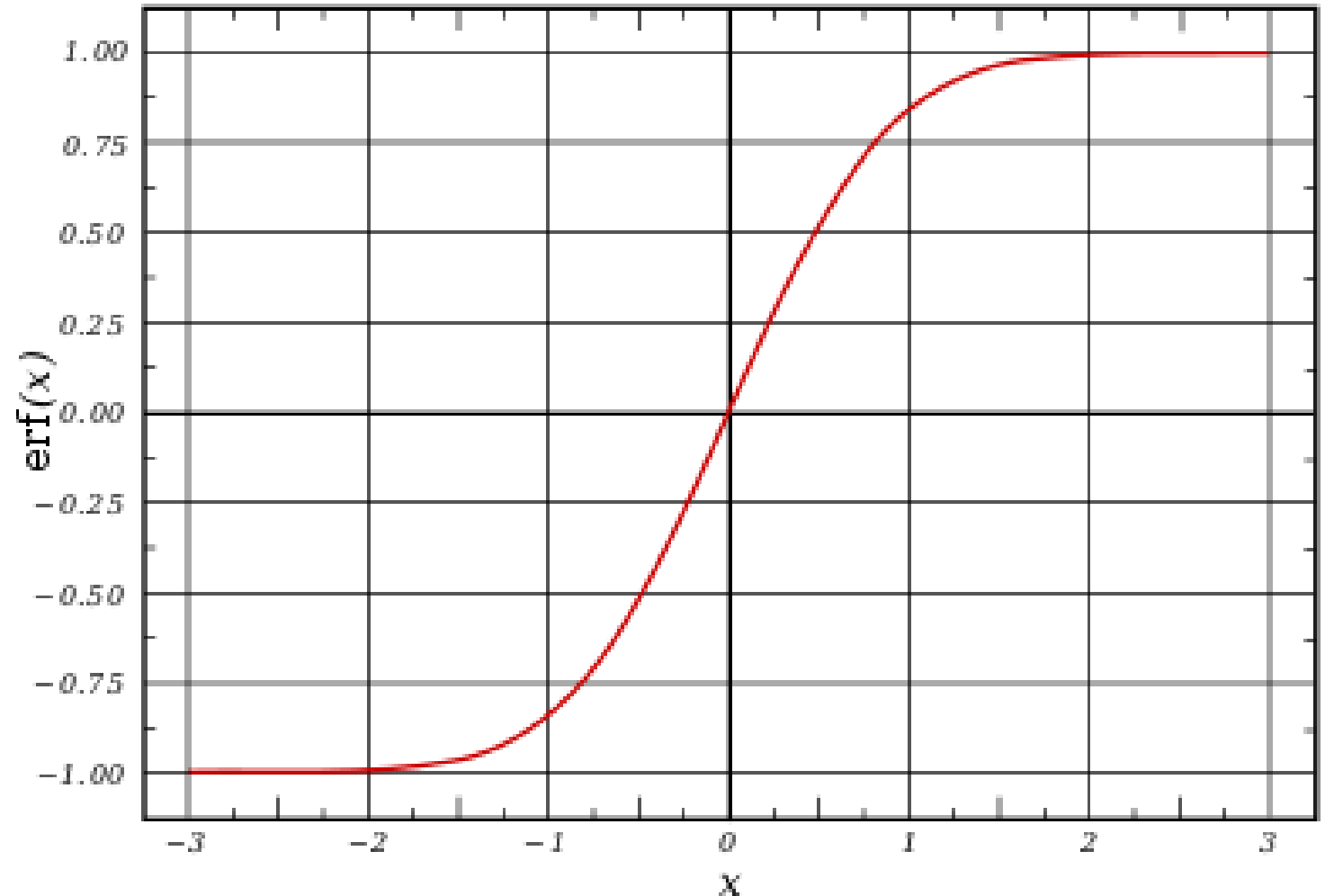
Error Functions (erf - erfc) and Q-Function (συνέχεια)

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt = 2Q(\sqrt{2} x)$$

$$Q(\alpha) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$Q(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right)$$

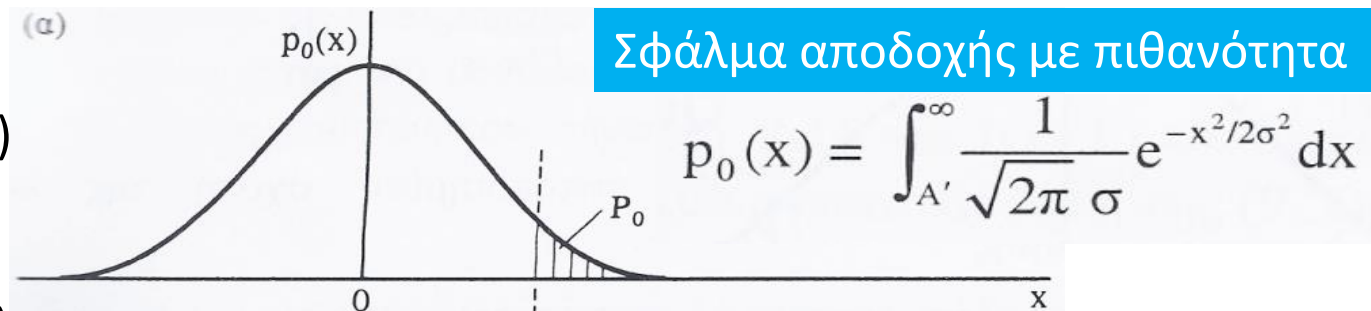
$$Q(z) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right)$$



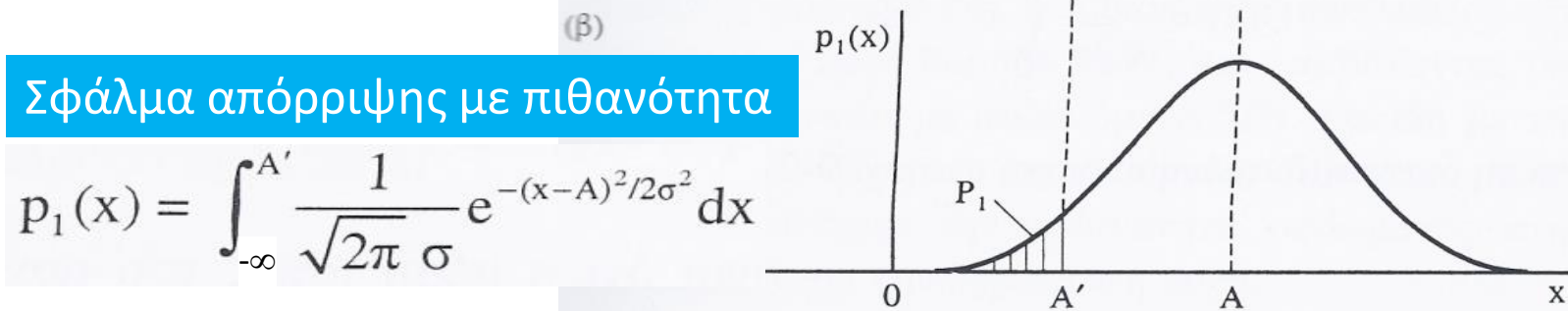
Πιθανότητα σφάλματος στην ψηφιακή μετάδοση βασικής ζώνης υπό θόρυβο

- Έστω μονοπολική κωδικοποίηση (**NRZ**): για το «1» στέλνουμε παλμό A Volts και για το «0» παλμό 0 Volts.
- Στον δέκτη χρησιμοποιούμε (βέλτιστο) κατώφλι απόφασης $A' = A/2$ Volts.
- Αν την στιγμή της δειγματοληψίας ανιχνεύσουμε πλάτος $> A'$ τότε εκτιμούμε ότι εστάλη το «1».
- Αν την στιγμή της δειγματοληψίας ανιχνεύσουμε πλάτος $< A'$ τότε εκτιμούμε ότι εστάλη το «0».
- Υπεισέρχεται δε AWGN (με $\mu=0$ και ισχύ σ^2). Λόγω του θορύβου έχουμε σφάλμα αποδοχής και απόρριψης.

(α) εστάλη «0» (+ θόρυβος)



(β) εστάλη «1» (+ θόρυβος)



Πιθανότητα σφάλματος για μονοπολική μετάδοση

- Αν P_0' και P_1' οι πιθανότητες μετάδοσης των «0» και «1», η ολική πιθανότητα σφάλματος είναι:

$$P_\sigma = P_0 P_0' + P_1 P_1'$$

Αν θεωρήσουμε ότι κατά μέσον όρο $P_0' = P_1' = 50\%$ τότε $P_\sigma = \frac{1}{2} (P_0 + P_1)$

Επειδή $A' = A/2$ οι πιθανότητες $P_0 = P_1$ και άρα $P_\sigma = \frac{1}{2}(2P_0) = P_0 = P_1$

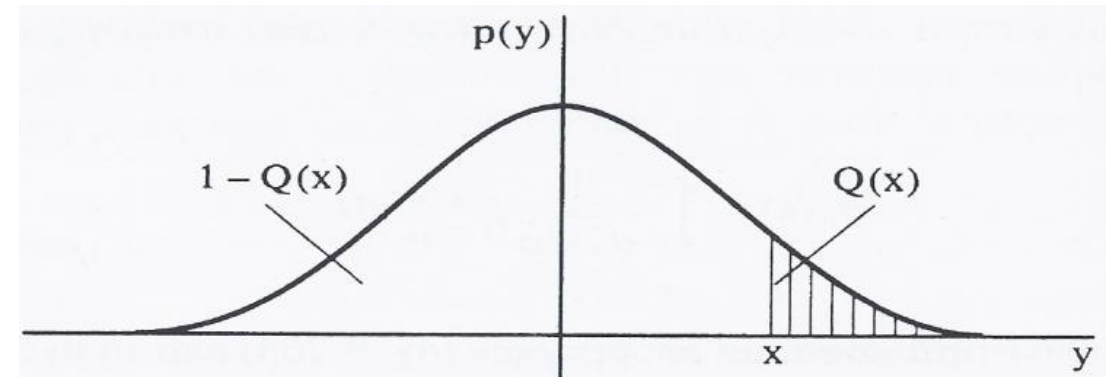
Δηλαδή:

$$p_\sigma(x) = \int_{A/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx$$

Με χρήση της Q-function έχουμε:

$$P_\sigma = \int_{A/2\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = Q[A/(2\sigma)]$$

$$z = (A/2 - \mu)/\sigma = A/(2\sigma)$$

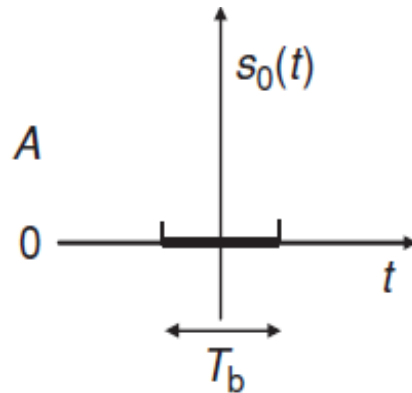
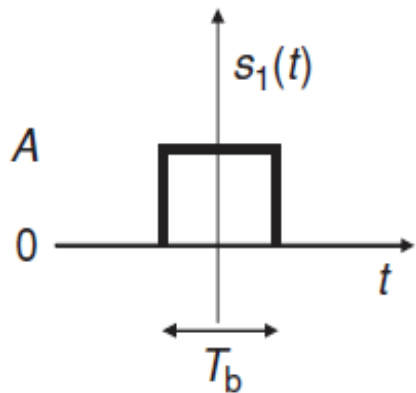


Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι η μέση ισχύς ισοπίθανων μονοπολικών παλμών είναι: $S = \frac{1}{2}(0)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)A^2 = \frac{A^2}{2}$

και η ισχύς του λευκού θορύβου $\sigma^2 = P_N$, τότε $P_\sigma = Q\left(\sqrt{\frac{S}{2P_N}}\right) = \mathbf{BER}$ (σύνδεση BER-SNR)

BER συναρτήσει E_b/N_0 για unipolar coding

- Μέση ενέργεια bit = $E_b = S/R_b$ όπου $R_b = 1/T_b$ (bps), S μέση ισχύς συμβόλου = ισχύ bit για binary κωδικοποίηση (δηλ. M-ary με $M=2$).
- $E_b/N_0 = S/(R_b N_0)$ $R_b/B = 2/(1+r) \Rightarrow \max R_b = 2B \Rightarrow B = R_b/2$ $P_N = \sigma^2 = N_0 B = N_0 R_b/2 \Rightarrow N_0 R_b = 2\sigma^2$



$$E_1 = \int_0^{T_b} s_1^2(t) dt = A^2 T_b$$

$$E_0 = \int_0^{T_b} s_0^2(t) dt = 0$$

$$E_b = P_0 E_0 + P_1 E_1 = \frac{1}{2}(E_0 + E_1) = \frac{A^2 T_b}{2}$$

UNIPOLAR

$E_b/N_0 =$

$$A^2 T_b / (2 N_0) =$$

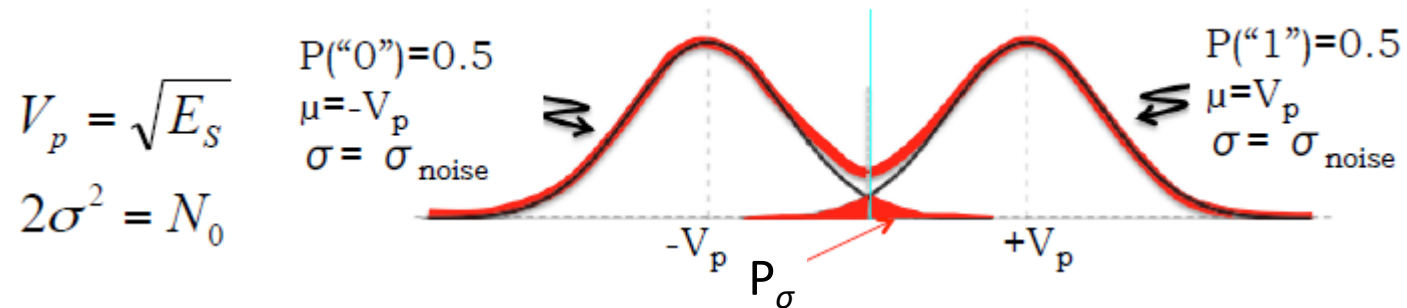
$$A^2 / (2 N_0 R_b) =$$

$$A^2 / (4 \sigma^2) =$$

$$[A / (2 \sigma)]^2$$

$$\text{BER} = Q(\sqrt{E_b/N_0})$$

BER συναρτήσει SNR ή E_b/N_0 για polar coding

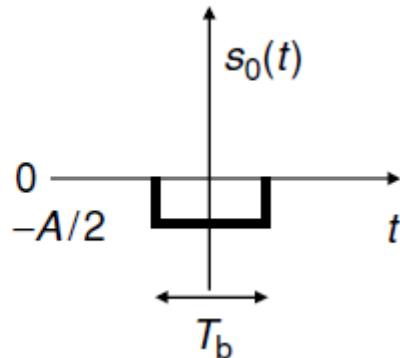
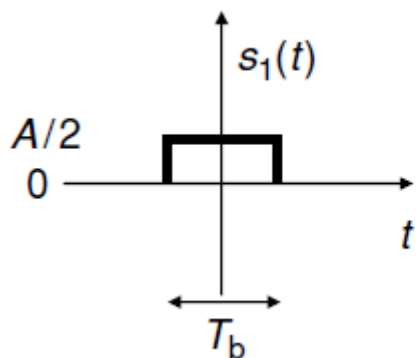


Για σύγκριση με unipolar coding έστω $V_p = A/2$. Οπότε 0 Volts είναι το (βέλτιστο) κατώφλι απόφασης

$$p_\sigma(x) = \int_{A/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx$$

$$p_\sigma = \int_{A/2\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-y^2/2} dy = Q[A/(2\sigma)]$$

Η μέση ισχύς ισοπίθανων παλμών είναι: $S = \frac{1}{2}(-A/2)^2 + \frac{1}{2}(A/2)^2 = (A/2)^2 \Rightarrow A/2 = \sqrt{S} \Rightarrow P_\sigma = Q[\sqrt{(S/P_N)}] = \text{BER}$



$$E_1 = \int_0^{T_b} s_1^2(t) dt = \frac{A^2 T_b}{4}$$

$$E_0 = \int_0^{T_b} s_0^2(t) dt = \frac{A^2 T_b}{4}$$

$$E_b = P_0 E_0 + P_1 E_1 = \frac{1}{2}(E_0 + E_1) = \frac{A^2 T_b}{4}$$

POLAR

$E_b/N_0 =$

$$A^2 T_b / (4 N_0) =$$

$$A^2 / (4 N_0 R_b) =$$

$$A^2 / (8 \sigma^2) =$$

$$[A/(2\sigma)]^2 / 2$$

$$\text{BER} = Q(\sqrt{2E_b/N_0})$$

Συγκριτικά:
BER για
μονοπολική – πολική
κωδικοποίηση,
συναρτήσει
SNR και E_b/N_0

Μονοπολική
κωδικοποίηση
(NRZ):

για «1» στέλνομε
παλμό A Volts
και για «0»
παλμό 0 Volts.

Πολική
κωδικοποίηση
(NRZ):

για «1» στέλνομε
παλμό A/2 Volts και
για το «0» παλμό
−A/2 Volts.

Ισοπίθανα bits «1», «0».
Βέλτιστο κατώφλι απόφασης.

BER
(Unipolar)

$$Q[\sqrt{(S/(2P_N))}]$$

$$Q[\sqrt{(E_b/N_0)}]$$

BER
(Polar)

$$Q[\sqrt{(S/P_N)}]$$

$$Q[\sqrt{(2E_b/N_0)}]$$

SNR

$$E_b/N_0$$

S ισχύς σήματος

P_N ισχύς θορύβου

E_b ενέργεια ανά bit

$N_0/2$ φασματική πυκνότητα θορύβου