

ΑΣΚΗΣΗ 1

- Σήμα PCM έχει ρυθμό 10 Mbps και μεταδίδεται σε κανάλι AWGN (όπου ο θόρυβος έχει φασματική πυκνότητα ισχύος 10^{-14} W/Hz), με σύστημα διαμόρφωσης QPSK ή εναλλακτικά 4-FSK με ορθογώνιους φορείς.
- Αν ο $BER = 6,5 \times 10^{-6}$, να βρεθεί η ισχύς στο δέκτη και το ελάχιστο απαιτούμενο εύρος ζώνης του καναλιού μετάδοσης (στην βασική ζώνη και με χρήση φορέα).

ΥΠΟΔΕΙΞΗ

Για QPSK ή PSK ισχύει ότι $BER = Q[\sqrt{(2E_b/N_0)}]$.

Για 4-FSK απαιτεί περίπου 3 dB μεγαλύτερο E_b/N_0 από την QPSK για ίδιο BER.

Λύση 1

A. Για QPSK:

$$\text{BER} = 6,5 \times 10^{-6} = Q[\sqrt{(2E_b/N_0)}] \Rightarrow \sqrt{(2E_b/N_0)} = 4,36 \Rightarrow 2E_b/N_0 = 19 \Rightarrow E_b/N_0 = 9,5$$

$$S = E_b \cdot R_b = (E_b/N_0) \cdot R_b \cdot N_0 = 9,5 \times 10 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-14} = 19 \times 10^{-7} \text{ W} \Rightarrow S = 1,9 \mu\text{W}$$

Στην QPSK: $R_s = R_b / 2 = 5 \text{ Mbaud} \Rightarrow \nu/f = 2 \Rightarrow 5 / f = 2 \Rightarrow f = 2.5 \text{ MHz}$ για ιδανική (roll-off factor = 0) μετάδοση στην βασική ζώνη. Ενώ, για μετάδοση RF (δηλ. με φορέα), $f = 5 \text{ MHz}$.

B. Για 4-FSK:

Στην 4-FSK, αφού απαιτεί περίπου +3 dB μεγαλύτερο $(E_b/N_0)_{\text{dB}}$, δηλαδή διπλάσιο λόγο E_b/N_0 , άρα $E_b/N_0 = 19$, η ισχύς στον δέκτη θα είναι:

$$S = E_b \cdot R_b = (E_b/N_0) \cdot R_b \cdot N_0 = 19 \times 10 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-14} = 38 \times 10^{-7} \text{ W} \Rightarrow S = 3,8 \mu\text{W}$$

Στην 4-FSK: $R_s = R_b / 2 = 5 \text{ Mbaud} \Rightarrow \text{περίοδος συμβόλου} = 1/R_s = 0,2 \mu\text{s}$.

Για ορθογώνια 4-FSK: απόσταση φορέων $\Delta f = 1/(2T_s) = 1/0,4 = 2,5 \text{ MHz}$.

(Δηλαδή οι φορείς είναι $f_{c1}, f_{c1} + \Delta f, f_{c1} + 2\Delta f, f_{c1} + 3\Delta f$) $\Rightarrow f = 3 \times \Delta f + 2f_{\text{PCM}} \Rightarrow$

$$f = 3 \times 2,5 + 2 \times 5 = 17,5 \text{ MHz} \quad (\text{Γενικά } f = (M-1)\Delta f + 2f_{\text{PCM}})$$

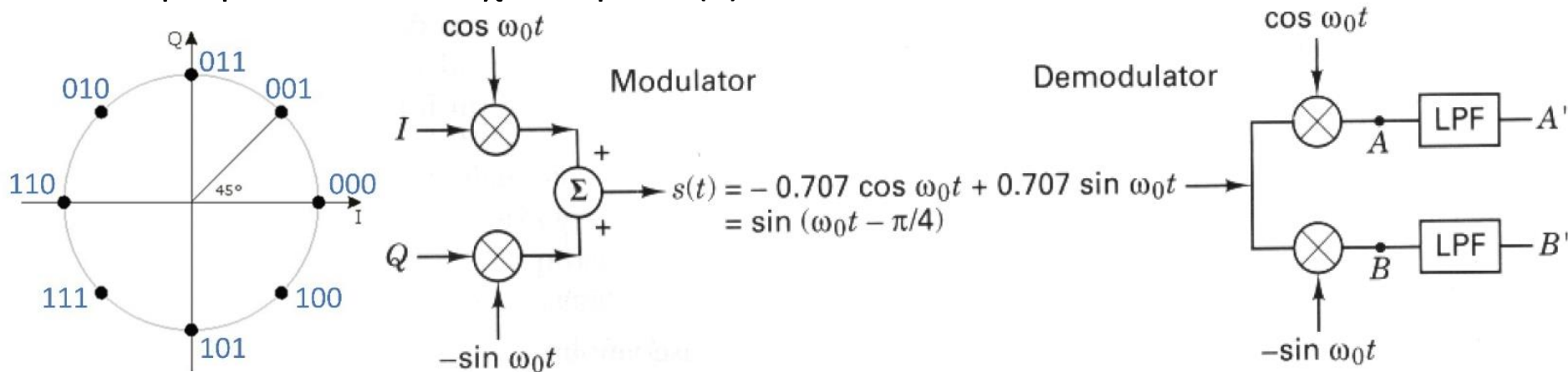
Χωρίς ορθογωνιότητα, $R_b = 10 \text{ Mbps} \Rightarrow f = 5 \text{ MHz}$ και $B_{4\text{-FSK}} > 2 \times 4 \times 5 = 40 \text{ MHz}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

D8PSK (Διαφορική 8-αδική ψηφιακή διαμόρφωση φάσης)

Στην D8PSK (M-ary κωδικοποίηση με $M=8$), κάθε σύμβολο αποτελείται από 3 bits ($\log_2(8) = 3$). Για ένα δεδομένο σύμβολο που στέλνεται την χρονική στιγμή k , η φάση του $\Phi(k)$ καθορίζεται από την αλλαγή φάσης του συμβόλου που εστάλη την προηγούμενη χρονική στιγμή $k-1$: $\Phi(k) = \Phi(k-1) + \Delta\Phi(k)$. Για το πρώτο σύμβολο που θα μεταδοθεί, θεωρήστε ότι $\Phi(k-1) = 0$.

Η τετραγωνική (quadrature) υλοποίηση του D8PSK φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα και στον αστερισμό –ίδιος με 8-PSK, αλλά η φάση στο διάγραμμα αστερισμού D8PSK δείχνει την $\Delta\Phi(k)$.



D8PSK (Συνέχεια εκφώνησης)

- Έστω τις χρονικές στιγμές $k = 1, 2, 3, 4$, τα bits εισόδου στον πομπό D8PSK είναι σύμβολα (110), (001), (110) και (010), αντιστοίχως.
- A. Θεωρώντας μοναδιαία την ακτίνα του διαγράμματος –αστερισμού, δείξате τις I και Q συνιστώσες κάθε συμβόλου $s(k)$ που θα μεταδώσει ο πομπός αυτός, καθώς και την μαθηματική (τριγωνομετρική) έκφραση που περιγράφει κάθε σύμβολο $s(k)$.
- B. Δείξате την λειτουργία του δέκτη για την αποδιαμόρφωση του λαμβανομένου σήματος (η τετραγωνική υλοποίηση του δέκτη φαίνεται στο ανωτέρω σχήμα της εκφώνησης).

ΥΠΟΔΕΙΞΗ:

- (A) Οι I και Q συνιστώσες του συμβόλου $s(2)$, που φαίνεται στο σχήμα ως $s(t)$, είναι $I = -0.707$ και $Q = -0.707$, ενώ $s(2) = \sin(\omega t - \pi/4)$ (όπως φαίνεται στο σχήμα της εκφώνησης). Χρησιμοποιήσατε τριγωνομετρικές ταυτότητες, π.χ. (1.1) ή (1.2) από το ΧΡΗΣΙΜΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΓΙΑ ΟΛΟ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ που υπάρχει στο eclass.

(Συνέχεια ΥΠΟΔΕΙΞΗΣ)

Βάσει της σελ. 7 Διαφάνειες eclass [Ψηφιακές Διαμορφώσεις](#) ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΜΕ ΔΙΑΜΟΡΦΩΜΕΜΟ ΦΟΡΕΑ: Για ένα πραγματικό σήμα (σύμβολο), ισχύει:

$$s(t) = \text{Re}\{g(t)\exp(j\omega t)\}$$

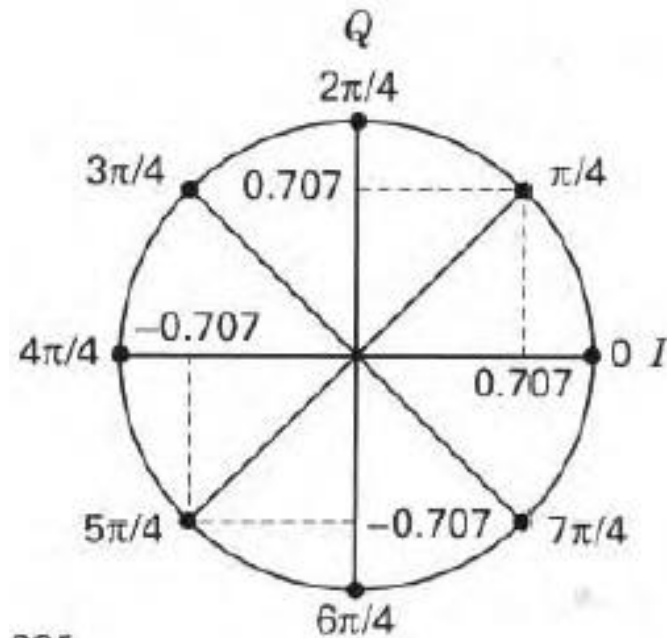
- $g(t) = I(t) + jQ(t) = |g(t)| \exp\{j\Phi(t)\} = \sqrt{I^2+Q^2} \exp\{j\Phi(t)\},$
με $\Phi(t) = \tan^{-1}(Q(t)/I(t))$. Δεδομένου ότι $|g(t)| = \sqrt{I^2+Q^2} = 1 \Rightarrow$
 $I(t) = \cos(\Phi(t))$ και $Q(t) = \sin(\Phi(t))$.
- Άρα, $s(t) = \text{Re}\{(I(t)+jQ(t))(\cos(\omega t)+j\sin(\omega t))\} = \text{Re}\{I(t)\cos(\omega t) - Q(t)\sin(\omega t)\} =$
 $I(t)\cos(\omega t) - Q(t)\sin(\omega t)$. Λοιπόν, το “−” στο ημίτονο του πομπού εξηγείται
από τον πολλαπλασιασμό του $I\cos(\omega t)+Q\sin(\omega t)$ με $\exp\{j\omega t\}$ και την λήψη
του πραγματικού μέρους της μιγαδικής συνάρτησης.
- (B) Ομοίως, προκύπτει “−” στο ημίτονο του δέκτη, που εξηγείται από τον
πολλαπλασιασμό του λαμβανομένου $I\cos(\omega t)+Q\sin(\omega t)$ με $\exp\{-j\omega t\}$ (συζυγής
του $\exp\{j\omega t\}$) και την λήψη του πραγματικού μέρους της μιγαδικής
συνάρτησης για να γίνει η αποδιαμόρφωση, δηλ. η ορθή λήψη της φάσης
(θετική έξοδος).

ΛΥΣΗ 2

A) Οι φάσεις $\Delta\Phi(k)$ είναι όπως φαίνονται στον αστερισμό:

Data encoding

x_k	y_k	z_k	$\Delta\phi_k$
0	0	0	0
0	0	1	$\pi/4$
0	1	1	$2\pi/4$
0	1	0	$3\pi/4$
1	1	0	$4\pi/4$
1	1	1	$5\pi/4$
1	0	1	$6\pi/4$
1	0	0	$7\pi/4$



Για ένα πραγματικό σήμα (σύμβολο), ισχύει: $s(t) = \text{Re}\{g(t)\exp(j\omega t)\}$

$g(t) = I(t) + jQ(t) = |g(t)| \exp\{j\Phi(t)\} = \sqrt{I^2 + Q^2} \exp\{j\Phi(t)\}$, με $\Phi(t) = \tan^{-1}(Q(t)/I(t))$

Δηλ. $s(t) = \text{Re}\{(I(t) + jQ(t))(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t))\} = \text{Re}\{I(t)\cos(\omega t) - Q(t)\sin(\omega t)\} = I(t)\cos(\omega t) - Q(t)\sin(\omega t)$

Δεδομένου ότι $|g(t)| = \sqrt{I^2 + Q^2} = 1$ θα είναι $I(t) = \cos(\Phi(t))$ και $Q(t) = \sin(\Phi(t))$

ΛΥΣΗ 2 (συνέχεια 1)

- Την 1^η χρονική στιγμή, $k=1$, έρχονται τα bits (**110**) που αντιστοιχούν σε $\Delta\Phi(k) = \pi$. Επειδή είναι το πρώτο σύμβολο που θα μεταδοθεί, θεωρούμε ότι $\Phi(k-1) = 0$, οπότε $\Phi(1) = 0 + \pi$. Άρα, **$\Phi(1) = \pi$** .
 $I(1) = \cos(\pi) = -1$ και $Q(t) = \sin(\pi) = 0$. $s(1) = -\cos(\omega t)$.
- Την 2^η χρονική στιγμή, $k=2$, έρχονται τα bits (**001**) που αντιστοιχούν σε $\Delta\Phi(k) = \pi/4$. Οπότε:
 $\Phi(2) = \Phi(1) + \pi/4$. Άρα, $\Phi(2) = \pi + \pi/4 \Rightarrow$ **$\Phi(2) = 5\pi/4$** .
 $I(2) = \cos(5\pi/4) = -0,707$ και $Q(2) = \sin(5\pi/4) = -0,707$.
 $s(2) = -0,707\cos(\omega t) + 0,707\sin(\omega t) = 0,707\sin(\omega t) - 0,707\cos(\omega t) \Rightarrow$
 $s(2) = \sin(\omega t)\cos(\pi/4) - \cos(\omega t)\sin(\pi/4) \Rightarrow s(2) = \sin(\omega t - \pi/4)$
- Την 3^η χρονική στιγμή, $k=3$, έρχονται (πάλι) τα bits (**110**) που αντιστοιχούν σε $\Delta\Phi(k) = \pi$. Οπότε: $\Phi(3) = \Phi(2) + \pi$. Άρα, $\Phi(3) = 5\pi/4 + \pi \Rightarrow$ **$\Phi(3) = 9\pi/4$** . **$I(3) = \cos(9\pi/4) = 0,707$ και $Q(3) = \sin(9\pi/4) = 0,707$.**
 $s(3) = 0,707\cos(\omega t) - 0,707\sin(\omega t) = \cos(\omega t)\cos(\pi/4) - \sin(\omega t)\sin(\pi/4) \Rightarrow$
 $s(3) = \cos(\omega t + \pi/4)$
- Την 4^η χρονική στιγμή, $k=4$, έρχονται τα bits (**010**) που αντιστοιχούν σε $\Delta\Phi(k) = 3\pi/4$. Οπότε: $\Phi(4) = \Phi(3) + 3\pi/4$. Άρα, $\Phi(4) = 9\pi/4 + 3\pi/4 = 12\pi/4 = 3\pi \Rightarrow$ **$\Phi(4) = 3\pi$ ή $\Phi(4) = \pi$**
 $I(4) = \cos(\pi) = -1$ και $Q(4) = \sin(\pi) = 0$. $s(4) = -\cos(\omega t)$.

ΛΥΣΗ 2 (συνέχεια 2)

B) $g(t) = I(t) + jQ(t) = |g(t)| \exp\{j\Phi(t)\} = \sqrt{I^2+Q^2} \exp\{j\Phi(t)\}$, με $\Phi(t) = \tan^{-1}(Q(t)/I(t))$

$$\text{Δηλ. } s(t) = \text{Re} \{ (I(t) + jQ(t))(\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)) \} = \text{Re} \{ I(t)\cos(\omega t) + Q(t)\sin(\omega t) \} = I(t)\cos(\omega t) + Q(t)\sin(\omega t)$$

$$\text{Δεδομένου ότι } |g(t)| = \sqrt{I^2+Q^2} = 1 \Rightarrow I(t) = \cos(\Phi(t)) \text{ και } Q(t) = \sin(\Phi(t))$$

- Ο δέκτης λαμβάνει το **$s(1) = -\cos(\omega t)$** . Τότε:

Στο A (είσοδος του LPF) θα έχουμε: $-\cos^2(\omega t) = -1/2 - (1/2)\cos(2\omega t)$.

Οπότε, στην έξοδο του LPF θα έχουμε την τιμή **$A' = -1/2 = I$**

Στο B (είσοδος του LPF) θα έχουμε: $\cos(\omega t)\sin(\omega t) = (1/2)\sin(2\omega t)$.

Οπότε, στην έξοδο του LPF θα έχουμε την τιμή **$B' = 0 = Q$**

- Έτσι από τον αστερισμό παίρνουμε ότι η τρέχουσα φάση **$\Phi(1) = \pi$**
(οποιαδήποτε αρνητική τιμή για I όταν το $Q=0$ μας οδηγεί σε φάση π).

Αλλά αφού πρόκειται για διαφορική φάση, **$\Delta\Phi(1) = \Phi(1) - \Phi(0) = \pi - 0 \Rightarrow$**

$\Delta\Phi(1) = \pi$ που αντιστοιχεί σε **110** (στον αστερισμό).

ΛΥΣΗ 2 (συνέχεια 3)

- Ο δέκτης λαμβάνει το $s(2) = \sin(\omega t - \pi/4) = -0,707\cos(\omega t) + 0,707\sin(\omega t)$.

Στο A (είσοδος του LPF) θα έχουμε: $-0,707\cos^2(\omega t) + 0,707\sin(\omega t)\cos(\omega t) = -0,707/2 - (0,707/2)\cos(2\omega t) + (0,707/2)\sin(2\omega t)$.

Οπότε, στην έξοδο του LPF θα έχουμε την τιμή $A' = -0,707/2 = I$

Στο B (είσοδος του LPF) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} &0,707\cos(\omega t)\sin(\omega t) - 0,707\sin^2(\omega t) = \\ &= (0,707/2)\sin(2\omega t) - (0,707/2) + (0,707/2)\cos(2\omega t). \end{aligned}$$

Οπότε, στην έξοδο του LPF θα έχουμε την τιμή $B' = -0,707/2 = Q$

- Έτσι από τον αστερισμό παίρνουμε ότι η τρέχουσα φάση $\Phi(2) = 5\pi/4$
Αλλά αφού πρόκειται για διαφορική φάση, $\Delta\Phi(2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 5\pi/4 - \pi$
 $\Rightarrow \Delta\Phi(2) = \pi/4$ που αντιστοιχεί σε **001** (στον αστερισμό).

ΛΥΣΗ 2 (συνέχεια 4)

- Ο δέκτης λαμβάνει το $s(3) = \cos(\omega t + \pi/4) = 0,707\cos(\omega t) - 0,707\sin(\omega t)$.

Στο A (είσοδος του LPF) θα έχουμε: $0,707\cos^2(\omega t) - 0,707\sin(\omega t)\cos(\omega t) = 0,707/2 + (0,707/2)\cos(2\omega t) - (0,707/2)\sin(2\omega t)$.
Οπότε, στην έξοδο του LPF θα έχουμε την τιμή $A' = 0,707/2 = I$

Στο B (είσοδος του LPF) θα έχουμε: $-0,707\cos(\omega t)\sin(\omega t) + 0,707\sin^2(\omega t) = -(0,707/2)\sin(2\omega t) + (0,707/2) - (0,707/2)\cos(2\omega t)$.
Οπότε, στην έξοδο του LPF θα έχουμε την τιμή $B' = 0,707/2 = Q$
- Έτσι από τον αστερισμό παίρνουμε ότι η τρέχουσα φάση $\Phi(3) = \pi/4$
Αλλά αφού πρόκειται για διαφορική φάση, $\Delta\Phi(3) = \Phi(3) - \Phi(2) = \pi/4 - 5\pi/4 = -4\pi/4 = -\pi \Rightarrow$
 $\Delta\Phi(3) = \pi$ που αντιστοιχεί σε **110** (στον αστερισμό).

ΛΥΣΗ 2 (συνέχεια 5)

- Ο δέκτης λαμβάνει το $s(4) = -\cos(\omega t)$.

Στο A (είσοδος του LPF) θα έχουμε: $-\cos^2(\omega t) = -1/2 - (1/2)\cos(2\omega t)$.

Οπότε, στην έξοδο του LPF θα έχουμε την τιμή $A' = -1/2 = I$

Στο B (είσοδος του LPF) θα έχουμε: $\cos(\omega t)\sin(\omega t) = (1/2)\sin(2\omega t)$.

Οπότε, στην έξοδο του LPF θα έχουμε την τιμή $B' = 0 = Q$

- Έτσι από τον αστερισμό παίρνουμε ότι η τρέχουσα φάση $\Phi(4) = \pi$ (οποιαδήποτε αρνητική τιμή για I όταν το Q=0 μας οδηγεί σε φάση π).
Αλλά αφού πρόκειται για διαφορική φάση, $\Delta\Phi(4) = \Phi(4) - \Phi(3) = \pi - \pi/4$
 $\Rightarrow \Delta\Phi(4) = 3\pi/4$ που αντιστοιχεί σε **010** (στον αστερισμό).