



Στοχαστικά Σήματα ή Στοχαστικές Διαδικασίες

Ο ΘΟΡΥΒΟΣ ΩΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΣΗΜΑ

Τυχαία Μεταβλητή

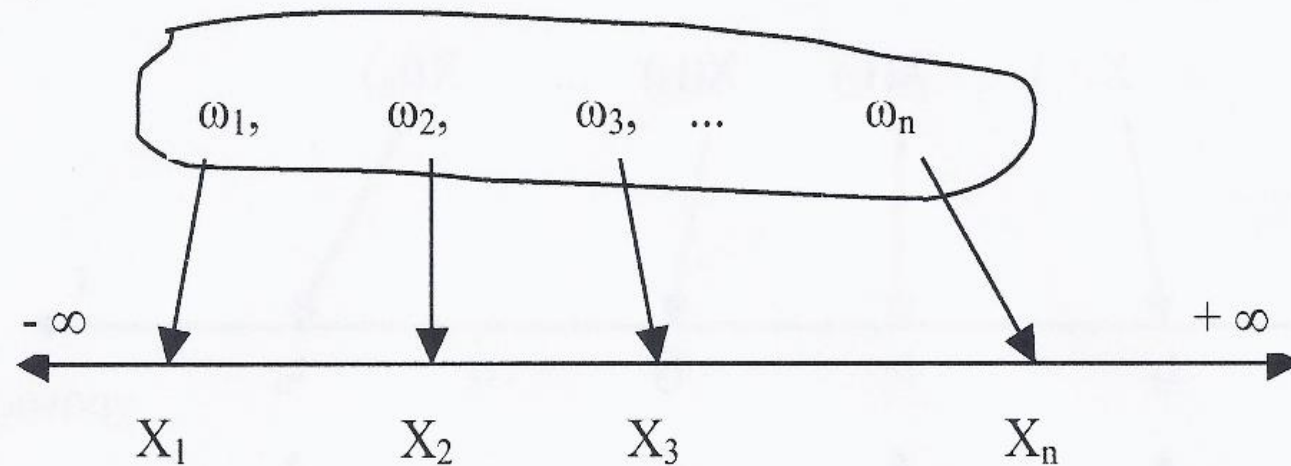
Ας θυμηθούμε όμως πρώτα τι είναι τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X .

Τ.μ. X είναι η αντιστοίχιση των αποτελεσμάτων ενός (τυχαίου) πειράματος στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Έστω ότι το πείραμα έχει n αποτελέσματα: $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

Το κάθε αποτέλεσμα συμβαίνει με μια συγκεκριμένη πιθανότητα: $P(\omega_1), P(\omega_2), \dots, P(\omega_n)$, έτσι ώστε το $\sum P(\omega_i) = 1$, ($i=1, \dots, n$).

Αν αντιστοιχίσουμε το ω_1 στο X_1 , το ω_2 στο X_2 ... και το ω_n στο X_n , έχουμε την τ.μ.. X (το σύνολο των X_i).



ΣΧΗΜΑ 1 – Τυχαία Μεταβλητή

Πολλές φορές η αντιστοίχιση είναι προφανής. Π.χ. αν η τ.μ. N είναι ο αριθμός των κλήσεων στο σύστημα (π.χ. τηλεφωνικό κέντρο) υπονοούμε ότι αν έχουμε 1 κλήση θα την αντιστοιχίσουμε στον αριθμό 1, αν έχουμε 0 κλήσεις στο 0, αν έχουμε 10 κλήσεις στο 10_2 κ.λ.π.

Στοχαστικό Σήμα

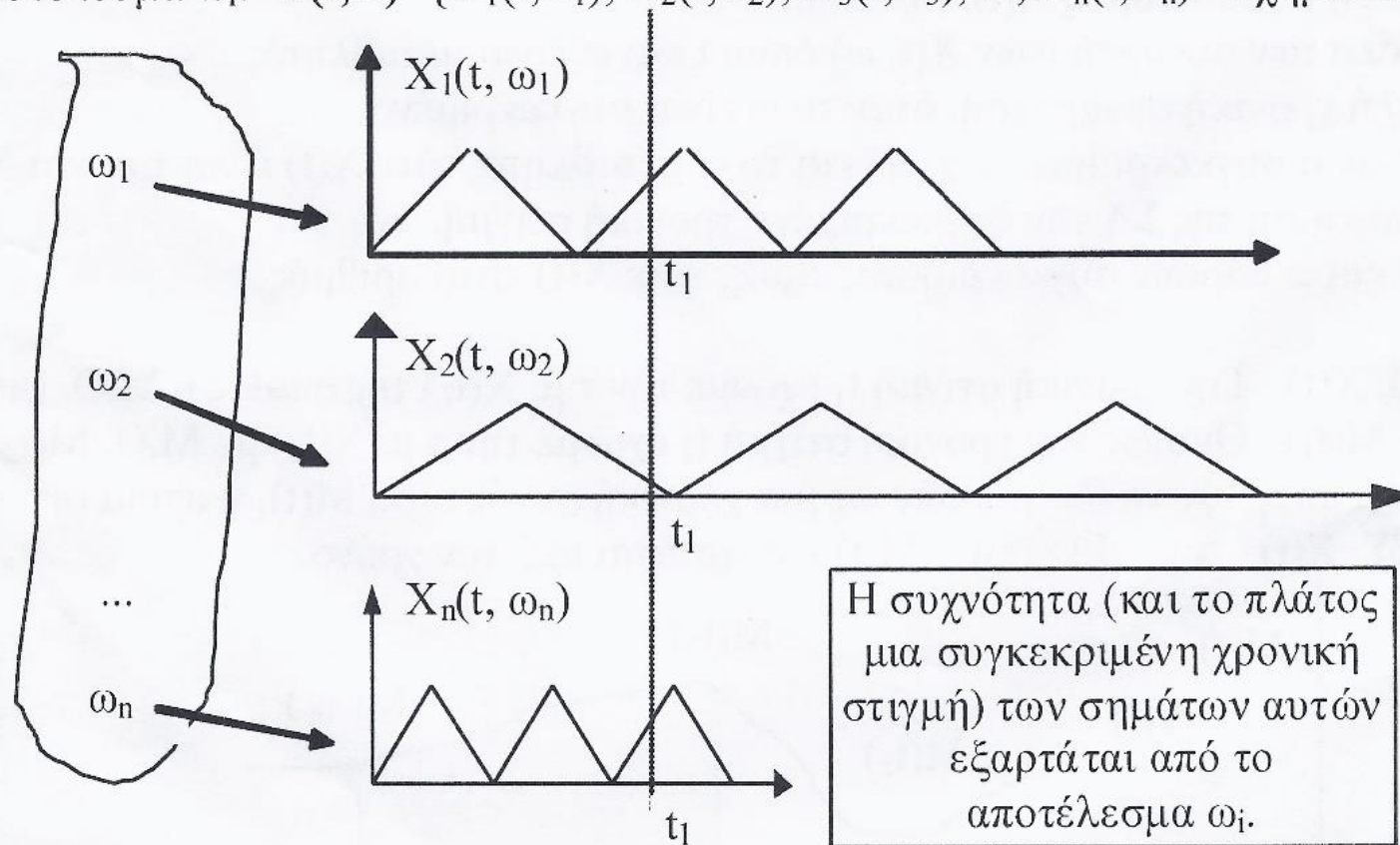
ή Στοχαστική Διαδικασία

ΟΡΙΣΜΟΣ 1

Ας δούμε τώρα τι είναι στοχαστικό σήμα ή στοχαστική διαδικασία.

Αν στα αποτελέσματα του πειράματος αντιστοιχίσουμε όχι ένα αριθμό αλλά μία (ολόκληρη!!!) χρονική συνάρτηση, τότε η συλλογή όλων αυτών των συναρτήσεων, ονομάζεται στοχαστικό σήμα (ΣΣ) ή στοχαστική διαδικασία (ΣΔ – stochastic process) (καλώς ή κακώς, με την λέξη στοχαστική εννοούμε απλά τυχαία).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1: ΣΣ ή ΣΔ είναι λοιπόν το σύνολο των χρονικών συναρτήσεων που εξαρτώνται από το αποτέλεσμα ω_i : $\mathbf{X}(\mathbf{t}, \omega) = \{X_1(t, \omega_1), X_2(t, \omega_2), X_3(t, \omega_3), \dots, X_n(t, \omega_n)\}$ Σχηματικά:



ΣΧΗΜΑ 2 – Στοχαστικό Σήμα

Στον συμβολισμό του ΣΣ $\mathbf{X}(\mathbf{t}, \omega)$, πολλές φορές «ξεχνούμε» το ω : $\mathbf{X}(\mathbf{t})$.

Στοχαστικό Σήμα ή Στοχαστική Διαδικασία

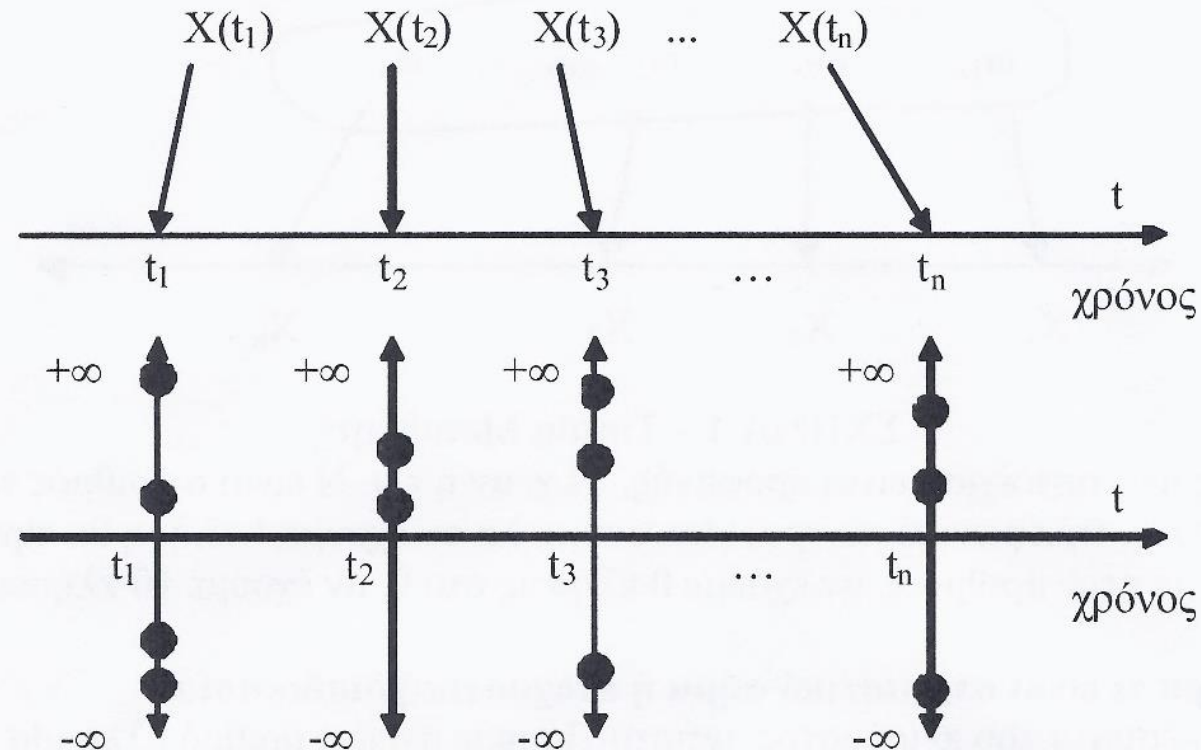
ΟΡΙΣΜΟΣ 2

Έστω ότι ενδιαφερόμαστε για την τιμή του $X(t, \omega)$ σε ένα ωρισμένο σημείο του χρόνου t , το t_1 . Τότε το $X(t_1, \omega)$ είναι μια τ.μ., αφού το ω μπορεί να πάρει όλες τις τιμές $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, και για κάθε τιμή που παίρνει δίνει διαφορετική τιμή στο $X(t_1, \omega)$. Δες στο προηγούμενο σχήμα (ΣΧΗΜΑ 2).

Δηλαδή σε κάθε σημείο του χρόνου t ορίζεται μία τ.μ. Άρα:

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: ΣΣ ή ΣΔ είναι μια συλλογή τ.μ. $X(t, \omega)$, η κάθε μία από τις οποίες ορίζεται σε όλα τα σημεία του t . «Ξεχνώντας» πάλι το ω , γράφουμε $X(t)$.

Καλό είναι εκτός από το σχήμα 2, να έχουμε στο μυαλό μας και το ακόλουθο σχήμα, ΣΧΗΜΑ 3, για να έχουμε πλήρη εικόνα του τι είναι ΣΣ ή ΣΔ.



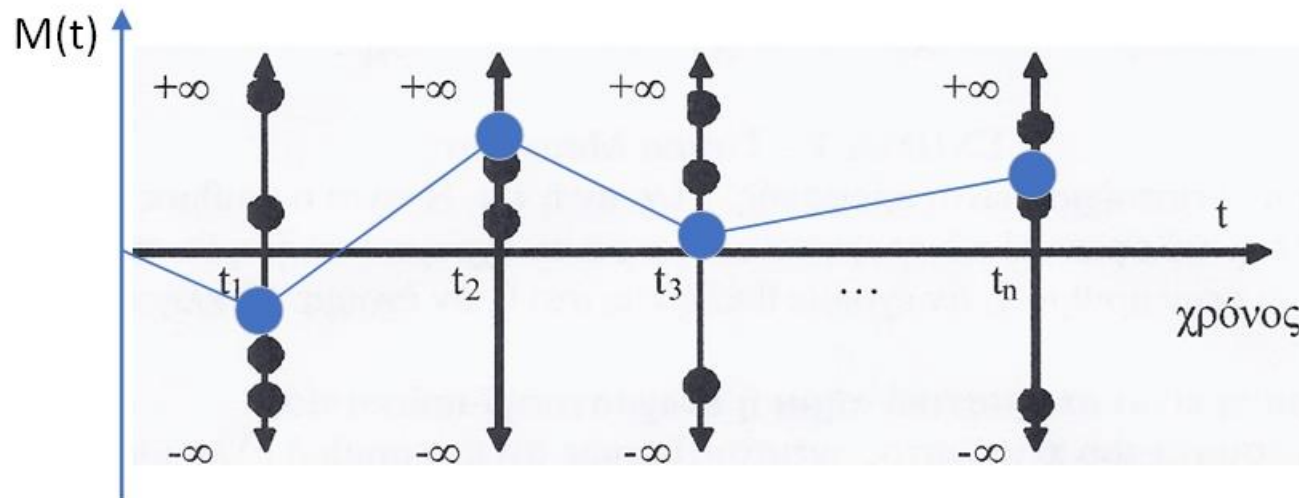
ΣΧΗΜΑ 3

Συμβολισμός Στοχαστικού Σήματος

- Ο συμβολισμός $X(t)$, αν πρόκειται για Σ.Σ. (Σ.Δ.), δηλ. Σ.Σ. $X(t)$, σημαίνει:
1. Το σύνολο των συναρτήσεων $X(t, \omega)$, όταν t και ω είναι μεταβλητές.
 2. Μια απλή συνάρτηση χρόνου, όταν το ω έχει συγκεκριμένη τιμή.
 3. Μια τυχαία μεταβλητή, όταν το t έχει συγκεκριμένη τιμή (π.χ. t_1) και το ω είναι μεταβλητή, και δείχνει την κατάσταση της Σ.Δ. την συγκεκριμένη χρονική στιγμή.
 4. Έναν συγκεκριμένο αριθμό (μια τιμή), όταν t και ω πάρουν συγκεκριμένες τιμές.

Μέσος Όρος (Μέση Τιμή) Στοχαστικού Σήματος

- Έστω το Σ.Σ. $X(t)$.
- Την χρονική στιγμή $t = t_1$, έχουμε την τ.μ. $X(t_1)$ της οποίας η Μέση Τιμή είναι $M(t_1)$. Για $t = t_2$, έχουμε την τ.μ. $X(t_2)$ της οποίας η Μέση Τιμή είναι $M(t_2)$. κ.ο.κ.
- Στα διάφορα σημεία του χρόνου, κάθε τ.μ. έχει μία Μέση Τιμή.
- Όλες οι Μέσες Τιμές μπορούν να θεωρηθούν ως μία συνάρτηση χρόνου $M(t)$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται Μέση Τιμή ή **Μέσος Όρος** του Σ.Σ. $X(t)$. Δηλ. $E[X(t)] = M(t) \rightarrow$ συνάρτηση χρόνου.



Διασπορά Στοχαστικού Σήματος (σ^2)

Όπως ο Μ.Ο. $m(t)$ είναι χρονική συνάρτηση, έτσι και η Διασπορά $\sigma^2(t)$ είναι συνάρτηση του χρόνου.

$$\sigma^2(t) = E[(x(t) - m(t))^2] = \int_{x(t)} (x(t) - m(t))^2 f(x(t)) dx(t)$$

$\downarrow$
η πυκνότητα Σ, Σ

$$\begin{aligned}\sigma^2(x) &= E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))] = \\ &= E[x(t)^2] - (m(t))^2 \equiv \text{VAR}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= E([X - E(X)]^2) \\ &= E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2\end{aligned}$$

Συνδιασπορά (Covariance) Σ.Σ.

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X, Y) &= E([X - E(X)][Y - E(Y)]) \\
 &= E(XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)) \\
 &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\
 &= E(XY) - E(X)E(Y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{cov}[X(t_1), X(t_2)] &= E[(X(t_1) - M(t_1))(X(t_2) - M(t_2))] = \\
 &= E[X(t_1)X(t_2) - X(t_1)M(t_2) - M(t_1)X(t_2) + M(t_1)M(t_2)] \\
 &= E[X(t_1)X(t_2)] - E[X(t_1)]M(t_2) - M(t_1)E[X(t_2)] + M(t_1)M(t_2) \\
 &= E[X(t_1)X(t_2)] - M(t_1) \cdot M(t_2) \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{R(t_1, t_2)}
 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ Στατιστική Συνάρτηση Αυτοσυσχετίσεως (Σ.Σ.Α.)

"Αν $t_1 = t_2 = t$ $\text{cov}[X(t_1)X(t_2)] = \sigma^2(t)$

ΜΗ ΠΛΗΡΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟ Σ.Σ.

Γνώση:

➤ M.O. = $M(t)$ και $\text{cov}[X(t_1), X(t_2)]$ (Μέση τιμή και Συνδιασπορά)

ή

➤ M.O. = $M(t)$ και $R(t_1, t_2)$ (Μέση τιμή και Στατιστική Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης)

ή

➤ M.O. = $M(t)$ και $\sigma^2(t)$ (Μέση τιμή και Διασπορά)

Αφού cov , Σ.Σ.Α. και VAR στην ουσία είναι τα ίδια πράγματα.

Στάσιμα Στοχαστικά Σήματα – ΙΣΧΥΡΑ ΣΤΑΣΙΜΟ

ΟΡΙΣΜΟΣ

ΙΣΧΥΡΗΣ ΣΤΑΞΙΜΟΤΗΤΑΣ

(ΣΤΑΣΙΜΟ Σ.Σ. ΜΕ ΤΗΝ ΣΤΕΝΗ ΕΝΝΟΙΑ)

Πρέπει $f(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)) = f(X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), \dots, X(t_n+\tau))$

για όλα τα n και $\tau \in (-\infty, \infty)$

δυσ. δεν αλλάζουν οι πυκνότητες πιθανότητας του Σ.Σ.

Για $n=1$ θα ισχύει: $f(X(t_1)) = f(X(t_1+\tau))$

δυσ. η 1η πυκνότητα του Σ.Σ. δεν εξαρτάται από τον χρόνο t . Με άλλα λόγια, όλες οι τ.μ. (τυχαίες μεταβλητές) είναι "ίδιες!!!"

Η αρχή μέτρησης του χρόνου μπορεί να τεθεί οπουδήποτε!!

Ασθενικά
Στάσιμο
Στοχαστικό
Σήμα

ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΣΘΕΝΙΚΗΣ ΣΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

(ΣΤΑΣΙΜΟ Σ.Σ. ΜΕ ΤΗΝ ΕΥΡΕΙΑ ΕΝΝΟΙΑ)

Πρόκειται: (α) $M(t) = M$ δηλ. όλες οι τιμές έχουν ίδιο Μ.Ο.

Μ.Ο. $\equiv$
Μέσο Όρον

(β) $R(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2) = R(\tau)$

Παράδειγμα: $X(t) = A \cos(\omega_c t + \varphi)$ όπου φ τιμή $\in [0, 2\pi]$
Είναι στάσιμο με την εύρεση έννοιας

(α) $E(X(t)) = A E(\cos(\omega_c t + \varphi)) = 0$ διότι η μέση τιμή του $\cos = 0$
δηλ. αποδείξαμε ότι έχει σταθερό Μ.Ο.

(β) $R(t_1, t_2) = E[A \cos(\omega_c t_1 + \varphi) \cdot A \cos(\omega_c t_2 + \varphi)] =$
 $= A^2 E\left(\frac{1}{2} \cos(\omega_c t_1 - \omega_c t_2) + \frac{1}{2} \cos(\omega_c t_1 + \omega_c t_2 + 2\varphi)\right) =$
 $= A^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(\omega_c t_1 - \omega_c t_2) + \frac{1}{2} E(\cos(\omega_c t_1 + \omega_c t_2 + 2\varphi))$
 $= \frac{A^2}{2} \cos(\omega_c t_1 - \omega_c t_2) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_c (t_1 - t_2)$

δηλ. ισχύει και το (β) "πρόταση": $R(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2) = R(\tau)$
 $\tau = t_1 - t_2$

Εργοδικό
Σ.Σ.

Εργοδικότη
ς
ως προς τον
Μ.Ο.

ΒΑΣΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ ΓΙΑ Σ.Σ.

Πώς θα περιγράψουμε το Σ.Σ.;

ΣΥΝΗΘΕΣ ΜΕ ΜΗ ΠΛΗΡΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟ (Μ.Ο. και COV)

Πώς θα βρούμε το μὴ πῦρες μοντέλο;

ΑΝ ΤΟ Σ.Σ. ΕΙΝΑΙ ΣΤΑΘΕΙΝΟ (ΑΣΘΕΝΙΚΑ ΑΡΚΕΙ), ΤΟΤΕ ΑΝ
ΞΕΡΟΥΜΕ ΕΝΑ ΜΟΝΟ ΜΕΛΟΣ ΤΟΥ (ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΧΡΟΝΟΥ
ΑΠΟ ΤΗΝ ΣΥΛΛΟΓΗ ΤΟΥ Σ.Σ.), ΕΙΝΑΙ ΕΥΚΟΛΟ ΝΑ
ΒΡΟΥΜΕ ΕΝΑ ΜΗ ΠΛΗΡΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟ, ΑΡΚΕΙ ΤΟ Σ.Σ.
ΝΑ ΕΧΕΙ ΤΗΝ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΕΡΓΟΔΙΚΟΤΗΤΑΣ,
ΔΗΛΑΔΗ ΟΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΙ Μ.Ο. ΝΑΙ ΙΣΟΥΝΤΑΙ ΜΕ ΤΟΥΣ
ΧΡΟΝΙΚΟΥΣ Μ.Ο.

Ορισμός : Ένα Στάθιμο Σ.Σ. είναι εργοδικό ως προς
τον Μ.Ο. Μ, όταν όλα τα μέλη του έχουν
τον ίδιο χρονικό Μ.Ο. $X_1(t)$ και $M = X_1(t)$

$$\overline{X_1(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X_1(t) dt = M \begin{matrix} \text{Σταθιμὸς} \\ \text{Μ.Ο.} \\ \text{δηλ. } M = E[X(t)] \end{matrix}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ:

αξ. σύστημα Σ είναι εργοδικό ως προς
την Σ .Σ.Α. $R(z)$, όταν όλα τα μέλη του
 έχουν την ίδια χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης
 $\Phi(z)$ και $\Phi(z) = R(z)$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1(t-z) dt$$

για $f_1(t)$ σήμα
 ενέργειας

$$\Phi_{11}(z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_1(t-z) dt$$

για $f_1(t)$
 σήμα ισχύος

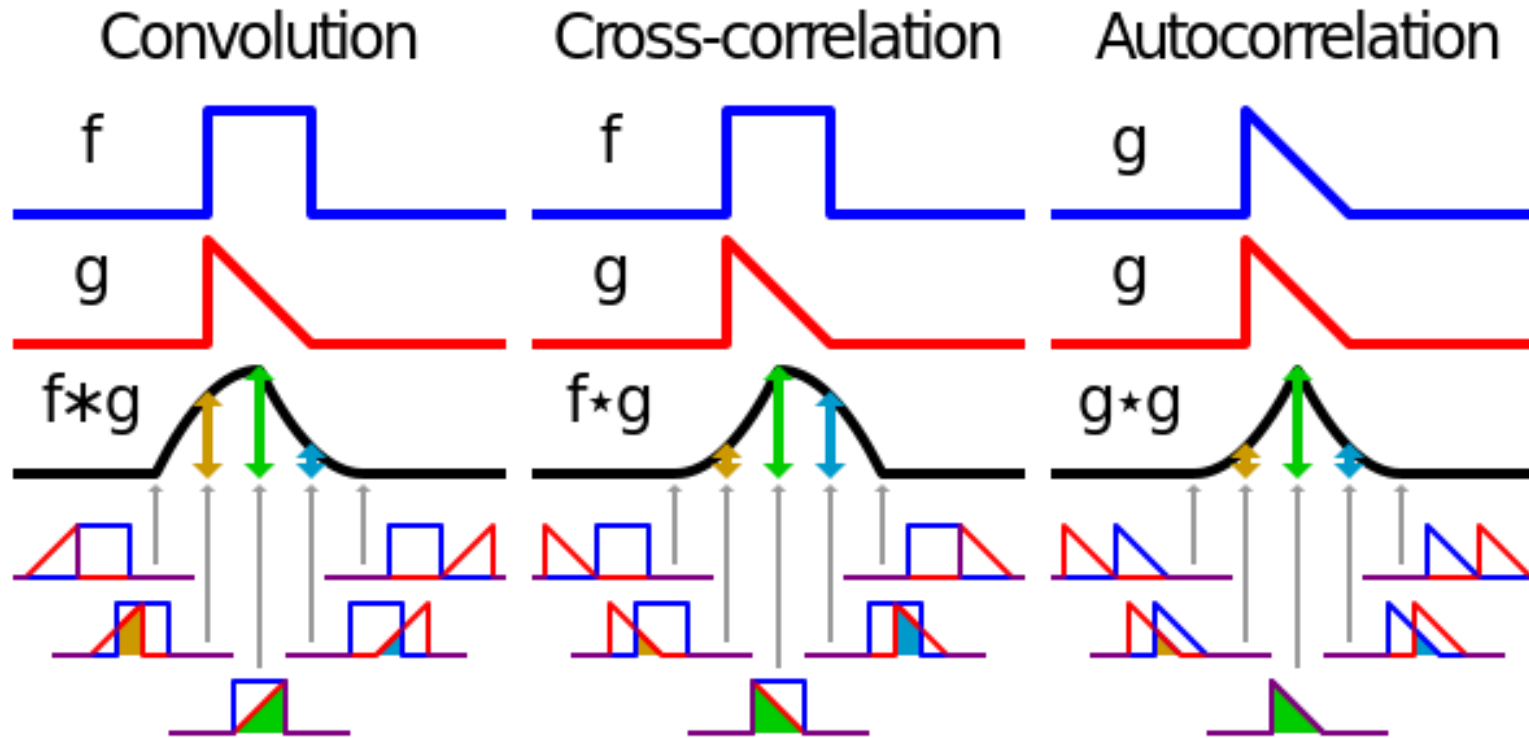
αν το σήμα ισχύος είναι περιοδικό με T
 δεν χρειάζεται το όριο (lim).

Εργοδικό Σ.Σ.

Εργοδικότης
 ως προς την
 Σ.Σ.Α.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ (convolution) ΜΕ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ (correlation)

Συνέλιξη
Απόκριση
συστήματος
(System
response)
Μετράμε την
επίδραση
ενός σήματος
πάνω σε ένα
άλλο.



Συσχέτιση
Απόκριση
συστήματος
(Similarity
Measure)
Μετράμε
πόσο μοιάζει
ένα σήμα
με ένα άλλο.

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k]$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t + \tau) dt$$

$$R_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[k + n]$$

Ιδιότητες
και
Εφαρμογές
της
Σ.Σ.Α.

1η ιδιότητα: $R(0) = E[X(t)^2]$

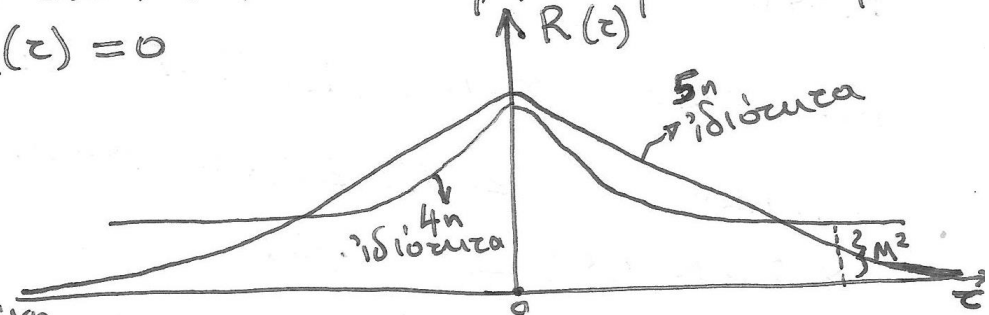
$R(\tau) = R(t_2 - t_1) = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] \xrightarrow{(\tau=0)} R(0) = E[X(t_1)^2]$
για $\tau = t_2 - t_1 \Rightarrow t_2 = t_1 + \tau$

2η ιδιότητα: $R(\tau) = R(-\tau)$ άρτια (δυσ. συμμετρία ως προς άξονα y)

3η ιδιότητα: $R(0) \geq |R(\tau)|$ ή ισότητα ισχύει αν η $R(\tau)$ περιοδική

4η ιδιότητα: "Αν $E[X(t)] = M \neq 0$ τότε $X(t) = M + Y(t)$ και
 $R(\tau) = E[(Y(t) + M)(Y(t + \tau) + M)] = E[Y(t)Y(t + \tau)] + M^2 \Rightarrow$
 $R(\tau) = R_Y(\tau) + M^2$

5η ιδιότητα: "Αν $M = 0$ και στο $X(t)$ δεν υπάρχει περιοδικό όρο
τότε $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = 0$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Σε αν δέχεται το γραμβανόμενο
σήμα είναι το $X(t)$. Το έρώτημα είναι: τι λάβαμε;

$X(t) = \begin{cases} N(t) & \text{(θόρυβος)} \\ S(t) + N(t) & \text{(χρήσιμο σήμα + θόρυβος)} \end{cases}$

Θεωρήσεις: (α) $S(t)$ κ' $N(t)$ Σ.Σ. ανεξάρτητα δειγματοληψία και Στατιστικά
(β) $S(t)$ είναι περιοδικό $\Rightarrow R_S(\tau)$ περιοδική Άσυσχετίστα.
(γ) $E(N(t)) = 0$ και $N(t)$ χωρίς περιοδικούς όρους

Απόδειξη Θα βρούμε την $R_X(z)$ και θα την εξετάσουμε για μεγάλες τιμές του z (θεωρούμε $z \rightarrow \infty$). "Αν λάβαμε μόνο θόρυβο τότε $R_X(z) = R_N(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} R_N(z) \rightarrow 0$ "

$$\begin{aligned} \text{"Αν λάβαμε } X(t) = s(t) + N(t) &\Rightarrow R_X(z) = E[(s(t) + N(t))(s(t+z) + N(t+z))] \Rightarrow \\ \Rightarrow R_X(z) &= E[s(t)s(t+z)] + E[s(t)N(t+z)] + E[N(t)s(t+z)] + E[N(t)N(t+z)] \\ \Rightarrow R_X(z) &= R_S(z) + \cancel{R_{SN}(z)} + \cancel{R_{NS}(z)} + R_N(z) = R_S(z) + R_N(z) \end{aligned}$$

Δίδει $S(t) \perp N(t)$ εξαρτητικώς Ανεξάρ.

Για $z \rightarrow \infty$ $R_N(z) \rightarrow 0$ και $R_S(z)$ περιοδική

"Αρα για $z \rightarrow \infty$ $R_X(z) = R_S(z) \Rightarrow$

Επομένως η λύση είναι να βρούμε την $R_X(z)$ και να την εξετάσουμε για μεγάλες τιμές του z . "Αν την βρούμε περιοδική έχουμε $s(t) + \text{θόρυβο}$, αν δεν είναι περιοδική έχουμε μόνο θόρυβο."

ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΦΑΣΜΑΤΟΣ ΙΣΧΥΟΣ – $S(\omega)$

- Η πυκνότητα φασματικής ισχύος $S_X(\omega)$ (σε W/Hz) ενός Σ.Σ. $X(t)$ είναι ο Μ. Fourier της Στατιστικής Συνάρτησης Αυτοσυσχέτισης $R_X(\tau)$ του $X(t)$.

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

• Απ'αυτό βγάζουμε ότι,

$$R_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega$$

Ισχύς του Σ.Σ. $X(t)$

Αλλά για $\tau=0$, και αν Μ.Ο. = 0 τότε σημαίνει ότι $R(\tau) = \text{Cov} = \sigma^2 = \text{VAR}$ του Σ.Σ. $X(t)$

ΔΗΛΑΔΗ $R(0) = \text{Cov} = \sigma^2 = \text{ΙΣΧΥ}$ του Σ.Σ. $X(t)$

ΘΕΩΡΗΜΑ PARSEVAL

ΤΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΤΩΝ WIENER- KHINCHINE

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

$$f(t) \xleftrightarrow{\text{M.F.}} F(\omega) \longrightarrow |F(\omega)|^2 = S(\omega) \equiv \text{συνάρτηση φάσματος ενέργειας}$$

$$\text{Ενέργεια} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega < \infty \quad \text{Ισχύος ανάλογα με } f(t)$$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ/ΘΕΩΡΗΜΑ WIENER - KHINCHINE

Δύο τρόποι
για να βρούμε
την $S(\omega)$

$$f(t) \xleftrightarrow{\text{M.F.}} F(\omega)$$

$$R(z) = \Phi_{ff}(t) \xleftrightarrow{\text{M.F.}} |F(\omega)|^2 = S(\omega)$$

για στατιστικά
εξοχαστικά σήματα

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

πείρα χρόνου $f(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow o(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau$

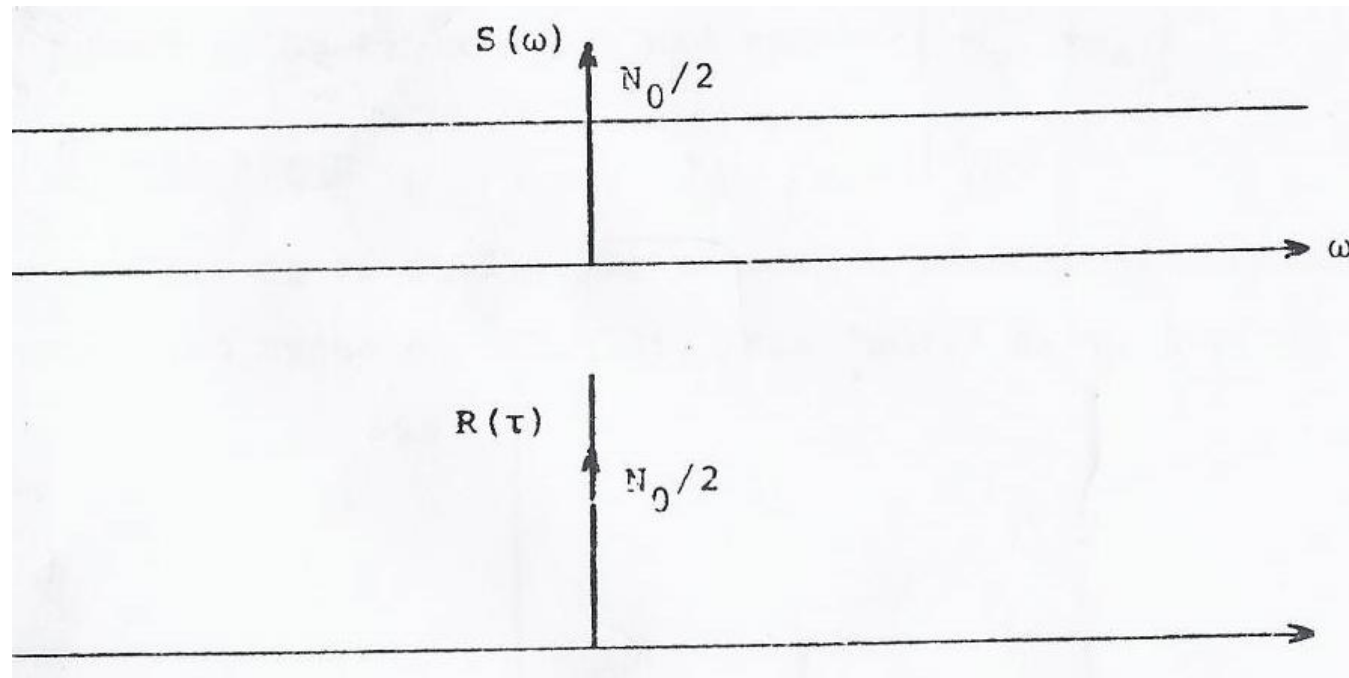
ωέριο συχνότητας $F(\omega) \rightarrow \boxed{H(\omega)} \rightarrow O(\omega)$

ωέριο συχνότητας $S(\omega) \rightarrow \boxed{|H(\omega)|^2} \rightarrow S_{out}(\omega) = S(\omega) |H(\omega)|^2$

Απόδειξη
Από $F(\omega) \cdot H(\omega) = O(\omega) \Rightarrow$
 $\Rightarrow |O(\omega)|^2 = |F(\omega)|^2 |H(\omega)|^2$
 $\Rightarrow S_{out}(\omega) = S(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$

Ο θόρυβος ως Σ.Σ. - ΛΕΥΚΟΣ ΘΟΡΥΒΟΣ

ΛΕΥΚΟΣ ΘΟΡΥΒΟΣ: Σ.Σ.Α. $R(\tau) = (N_0/2) \delta(\tau)$

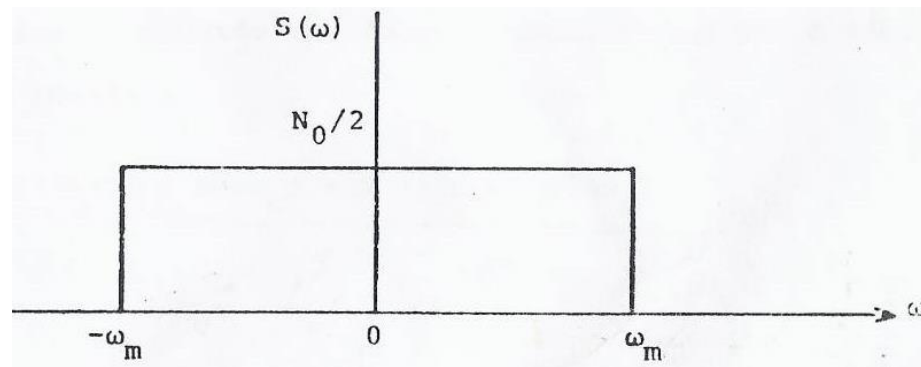


ΑΠΕΙΡΗ Η ΙΣΧΥΣ ΤΟΥ
ΛΕΥΚΟΥ ΘΟΡΥΒΟΥ

ΘΟΡΥΒΟΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΗΣ ΖΩΝΗΣ

$$S(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & -\omega_m \leq \omega \leq \omega_m \\ 0 & \text{άλλοι} \end{cases}$$

Θεωρήστε ότι είναι το εξαγώμενο ενός ιδανικού LPF στο οποίο είσοδος είναι ΛΕΥΚΟΣ ΘΟΡΥΒΟΣ, δεδομένου ότι $S_{\text{out}}(\omega) = S(\omega) |H(\omega)|^2 = S(\omega)$ από $-\omega_m$ μέχρι ω_m

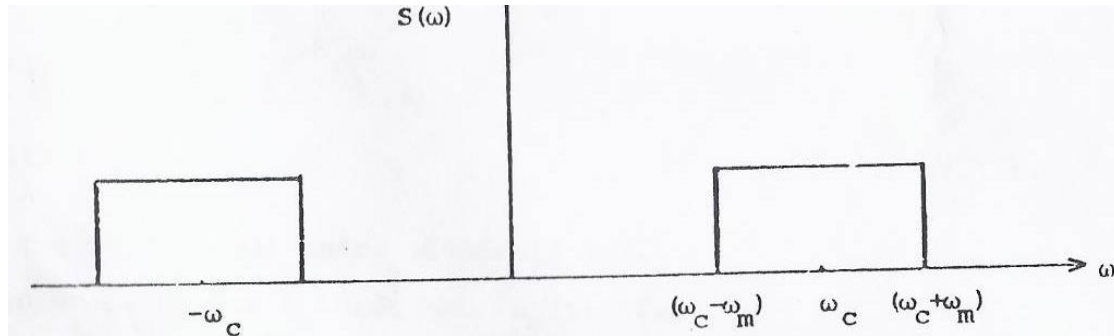


$$R(\tau) = \frac{N_0 \omega_m}{2\pi} \frac{\sin \omega_m \tau}{\omega_m \tau}$$

Handwritten notes: $2\omega_m$, $\frac{\sin \omega_m \tau}{\omega_m \tau}$, and a diagram of a rectangular pulse with width $2\omega_m$ and height $\frac{N_0}{2}$.

ΙΣΧΥΣ $R(0) = N_0 f$

ΘΟΡΥΒΟΣ ΣΤΕΝΗΣ ΖΩΝΗΣ



$$N(t) = \dot{X}(t) \cos(\omega_c t + \theta)$$

$$N(t) = X(t) \cos \theta \cos \omega_c t - X(t) \sin \theta \sin \omega_c t$$

$$N(t) = n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t$$

$$n_c(t) = X(t) \cos \theta \quad \text{και} \quad n_s(t) = X(t) \sin \theta$$

$$N(t) = X(t) \cdot \cos(\omega_c t + \theta) = \underbrace{X(t) \cos \theta}_{n_c(t)} \cos \omega_c t - \underbrace{X(t) \sin \theta}_{n_s(t)} \sin \omega_c t$$

$$R_N(0) = \frac{R_X(0)}{2}$$

$$R_N(\tau) = E[N(t_1) \cdot N(t_2)] = E\left[\frac{1}{2} X(t_1) \cdot X(t_2) [\cos \omega_c(t_1 - t_2) + \cos(\omega_c t_1 + \omega_c t_2 + 2\theta)]\right]$$

$$\Rightarrow R_N(\tau) = \frac{1}{2} R_X(\tau) \cdot \cos \omega_c \tau$$

$$R_C(\tau) = E\{n_c(t_1) n_c(t_2)\} = E\{X(t_1) X(t_2) \cos^2 \theta\}$$

και αφού θ , $X(t)$ είναι άσυσχετιστα για όλες τις τ.μ. του

$$R_C(\tau) = E\{X(t_1) X(t_2)\} E\{\cos^2 \theta\}$$

$$= R_X(\tau) E\left\{\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}\right\}$$

$$= \frac{R_X(\tau)}{2} \left(1 + E\{\cos 2\theta\}\right)$$

και τελικά,

$$R_C(\tau) = \frac{R_X(\tau)}{2}$$

διότι $E\{\cos 2\theta\}$ είναι μηδέν (απόδειξέ το).

Αυτό σημαίνει ότι η ισχύς του $n_c(t)$ είναι,

$$R_C(0) = \frac{R_X(0)}{2}$$

Συνδιασπορά (Covariance) – Συσχέτιση (Correlation)

- Περιγράφουν το βαθμό στον οποίο μια τ.μ. ή ένα Στοχαστικό Σήμα αποκλίνει από την αναμενόμενη τιμή (από τον Μ.Ο.).
- Η **συνδιασπορά** (ή συνδιακύμανση) δείχνει πόσο δύο τ.μ. διαφέρουν (διαφέρουν) μεταξύ τους, ενώ η **συσχέτιση** δείχνει πώς η αλλαγή σε μία τ.μ. έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή σε άλλη τ.μ. Π.χ. δείχνει αν η αύξηση της τιμής μιας τ.μ. έχει θετικό ή αρνητικό αντίκτυπο στην τιμή της άλλης τ.μ.
- Η **διασπορά** δείχνει την τετραγωνική απόκλιση μιας τ.μ. από τη μέση τιμή της. Πιο απλά, δείχνει πόσο μακριά από την μέση τιμή απλώνονται οι τιμές μιας τ.μ.
- (It not only shows the kind of relation (in terms of direction) but also how strong the relationship is. Thus, we can say the correlation values have standardized notions, whereas the covariance values are not standardized and cannot be used to compare how strong or weak the relationship is because the magnitude has no direct significance. It can assume values from -1 to +1.)

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

$$\text{Cov}(x,y) = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) * (y_i - \bar{y})}{N}$$

$$\text{Correlation} = \frac{\text{Cov}(x,y)}{\sigma x * \sigma y}$$