



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Συστήματα Επικοινωνιών

Ενότητα 7: Απόδοση συστημάτων γωνίας υπό θόρυβο

Μιχαήλ Λογοθέτης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σκοποί ενότητας

- Παρουσίαση της γενικής μορφής ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος υπό θόρυβο
- Περιγραφή της επίδρασης του θορύβου σε συστήματα διαμόρφωσης συχνότητας και φάσης
- Παρουσίαση των φίλτρων προέμφασης και αποέμφασης

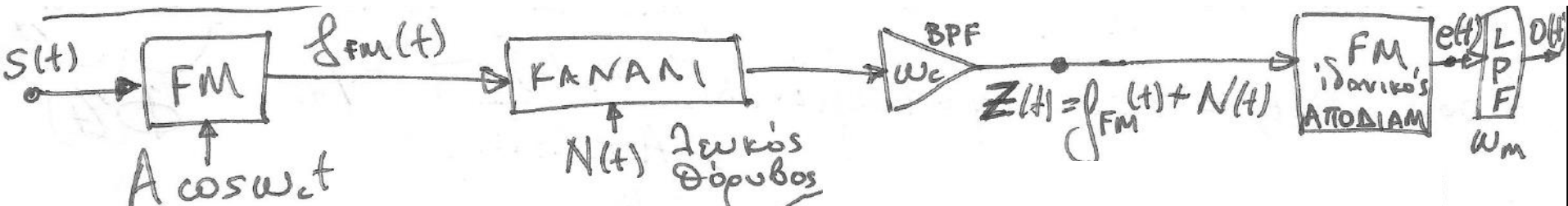
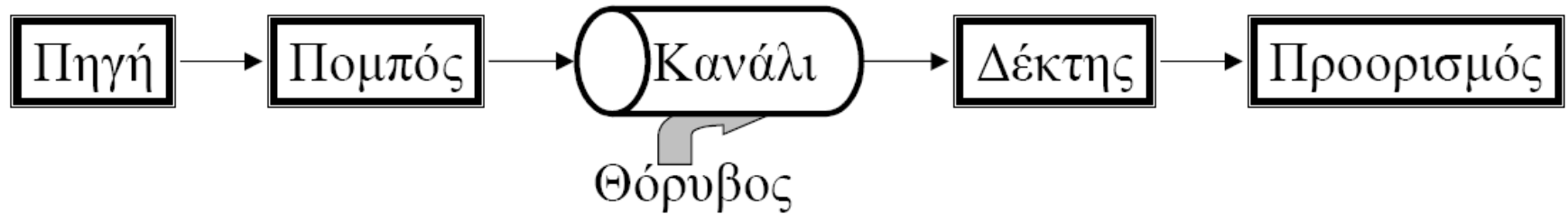


Περιεχόμενα ενότητας

- ❑ ΘΟΡΥΒΟΣ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ
- ❑ ΦΙΛΤΡΑ ΠΡΟΕΜΦΑΣΗΣ ΚΑΙ ΑΠΟΕΜΦΑΣΗΣ



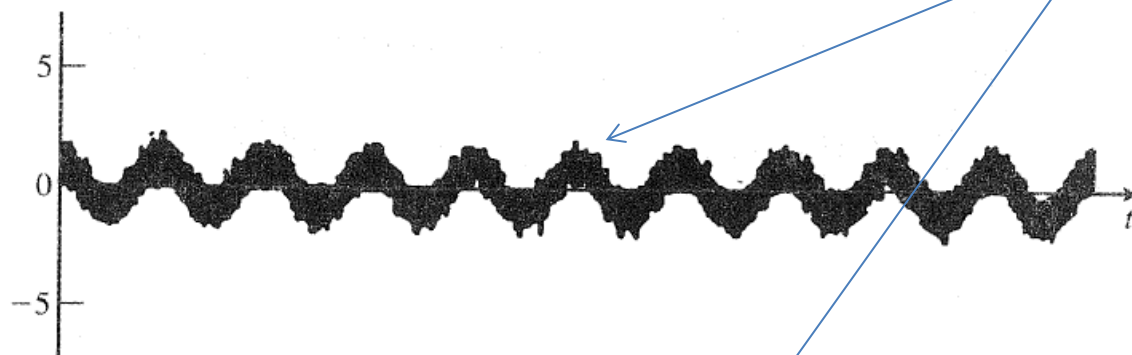
Τηλεπικοινωνιακό σύστημα: Αρχιτεκτονική



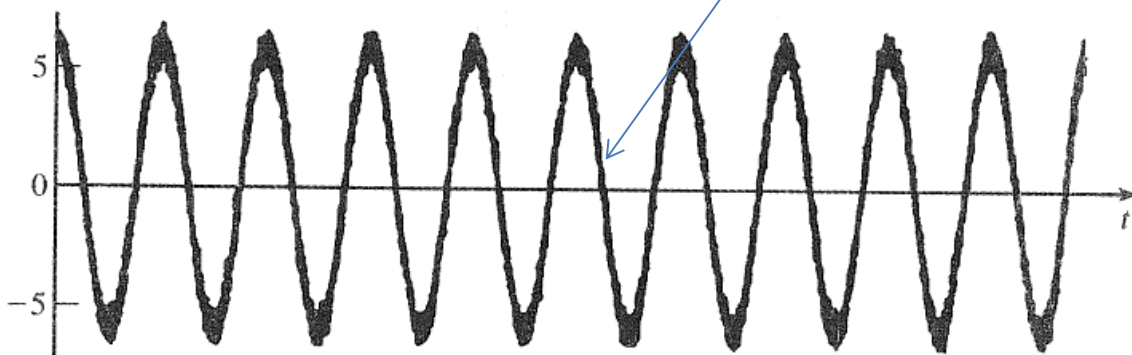
**Σηματοθορυβική Σχέση ή Λόγος Σήματος
προς Θόρυβο (Signal-to-noise Ratio), S/N**

Θόρυβος σε διαμόρφωση γωνίας (1/5)

Επίδραση του θορύβου στις
διελεύσεις από το 0



(α)



(β)

Θόρυβος σε διαμόρφωση γωνίας (2/5)

$$P_{n_o} = \int_{-W}^{+W} \mathcal{S}_{n_o}(f) df = \begin{cases} \int_{-W}^{+W} \frac{N_0}{A_c^2} df, & \text{PM} \\ \int_{-W}^{+W} f^2 \frac{N_0}{A_c^2} df, & \text{FM} \end{cases} \quad \text{Ισχύς θορύβου για FM ή PM}$$
$$= \begin{cases} \frac{2WN_0}{A_c^2}, & \text{PM} \\ \frac{2N_0W^3}{3A_c^2}, & \text{FM} \end{cases}$$

$$P_{s_o} = \begin{cases} k_p^2 P_M, & \text{PM} \\ k_f^2 P_M, & \text{FM} \end{cases} \quad \text{Ισχύς σήματος για FM ή PM}$$

$$\left(\frac{S}{N} \right)_o = \frac{P_{s_o}}{P_{n_o}} \quad \text{Λόγος σήματος προς θόρυβο για FM ή PM}$$

Θόρυβος σε διαμόρφωση γωνίας (3/5)

Λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$\begin{cases} \beta_p = k_p \max|m(t)|, & \text{PM} \\ \beta_f = \frac{k_f \max|m(t)|}{W}, & \text{FM} \end{cases}$$

$$P_R = \frac{A_c^2}{2}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \begin{cases} P_R \left(\frac{\beta_p}{\max|m(t)|}\right)^2 \frac{P_M}{N_0 W}, & \text{PM} \\ 3P_R \left(\frac{\beta_f}{\max|m(t)|}\right)^2 \frac{P_M}{N_0 W}, & \text{FM} \end{cases}$$



$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \begin{cases} \frac{P_M \beta_p^2}{(\max|m(t)|)^2} \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{PM} \\ 3 \frac{P_M \beta_f^2}{(\max|m(t)|)^2} \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{FM} \end{cases}$$



$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \begin{cases} \beta_p^2 P_{M_n} \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{PM} \\ 3\beta_f^2 P_{M_n} \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{FM} \end{cases}$$



Θόρυβος σε διαμόρφωση γωνίας (4/5)

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \begin{cases} P_R \left(\frac{\beta_p}{\max|m(t)|}\right)^2 \frac{P_M}{N_0 W}, & \text{PM} \\ 3P_R \left(\frac{\beta_f}{\max|m(t)|}\right)^2 \frac{P_M}{N_0 W}, & \text{FM} \end{cases}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι για την PM: $B_c = 2(\beta+1)W$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι για την FM: $\Omega = \frac{B_c}{W} = 2(\beta+1)$



$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \begin{cases} P_M \left(\frac{\frac{\Omega}{2}-1}{\max|m(t)|}\right)^2 \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{PM} \\ 3P_M \left(\frac{\frac{\Omega}{2}-1}{\max|m(t)|}\right)^2 \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{FM} \end{cases}$$



Θόρυβος σε διαμόρφωση γωνίας (5/5)

- ✓ Τόσο στο PM όσο και στο FM το SNR εξόδου είναι ανάλογο του τετραγώνου του δείκτη διαμόρφωσης β σε αντίθεση με το AM
- ✓ Αυξάνοντας το εύρος ζώνης αυξάνει και το SNR (ανταλλαγή)
- ✓ Μπορούμε να αυξήσουμε το SNR αυξάνοντας το β . Όμως μεγάλο β σημαίνει και μεγάλο B_c και συνεπώς μεγάλη ισχύ θορύβου οπότε δεν ισχύει η προσέγγιση για μεγάλα SNR (φαινόμενο κατωφλίου)
- ✓ Στο AM αυξάνοντας την ισχύ αυξάνει απευθείας το SNR (η πληροφορία στο πλάτος). Στη διαμόρφωση γωνίας δεν αυξάνεται η ισχύς αλλά μειώνεται ο θόρυβος
- ✓ Στο FM η επίδραση του θορύβου είναι μεγαλύτερη σε υψηλότερες συχνότητες



ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ SNRi (ΛΣΘi)

$$f_{FM}(t) = A \cos(\omega_c t + k_{FM} \int s(t) dt) \quad \left[\text{Έστω } N(t) = 0 \right] \quad \left[S_i = \frac{A^2}{2} \right]$$

$$e(t) = \frac{d}{dt} [\omega_c t + k_{FM} \int s(t) dt] = \omega_c + k_{FM} s(t)$$

Το πηροφοριακό σήμα στην έξοδο του φίλτρου, $O(t) = k_{FM} s(t)$,
 έχει ισχύ $S_o = k_{FM}^2 S_i$ όπου S_i η ισχύς του $s(t)$.

Έστω τώρα $N(t) \neq 0$ και $s(t) = 0$ (προσέχουμε $f_{FM}(t) \neq 0$)
 Ο θόρυβος στην είσοδο του ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΤΗ FM έχει γίνει
 θόρυβος στενής ζώνης λόγω του BPF (ιδανικό με συνάρ-
 τηση μεταφοράς 1). Δηλαδή η φασματική πυκνότητα ισχύος
 του θορύβου στην έξοδο του BPF $[\omega_c - \Delta\omega, \omega_c + \Delta\omega]$ θα είναι
 $S_N(\omega) = \frac{N_o}{2} |H(\omega)|^2 \rightarrow 1 = \frac{N_o}{2}$ από $\omega_c - \Delta\omega$ μέχρι $\omega_c + \Delta\omega$
 (δεν ξεχνάμε τις αντίστοιχες αρνητικές συχνότητες !!!)

$$\text{Η ισχύς } P_{Ni} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_c - \Delta\omega}^{\omega_c + \Delta\omega} \frac{N_o}{2} d\omega = \frac{N_o}{2\pi} \omega \Big|_{\omega_c - \Delta\omega}^{\omega_c + \Delta\omega} = \frac{2N_o \Delta\omega}{2\pi} = \underline{\underline{2\Delta f \cdot N_o}}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ SNR_o (ΛΣΘο)

$$(\Lambda\Sigma\Theta)_i = \frac{A^2/2}{2N_0\Delta f} = \frac{A^2}{4N_0\Delta f}$$

Στή συνέχεια, πρέπει νά υπολογίζουμε τήν ισχύ τοῦ σήματος καί τοῦ θορύβου στήν ἔξοδο τοῦ ἀποδιαμορφωτῆ. Γιά νά διευκολύ-
νουμε τήν κατάσταση, ὑποθέτουμε ὅτι ὅταν τό σήμα $s(t)$ καί $N(t)$
ἐπιδροῦν μαζί στόν ἀποδιαμορφωτή, ἡ παρουσία τοῦ ἑνός δέν ἐπηρε-
άζει τό ἄλλο καί ἀντίστροφα. Μαθηματικά αὐτό σημαίνει ὅτι μπο-
ροῦμε νά βροῦμε τήν ἔξοδο τοῦ ἀποδιαμορφωτῆ ἀρχικά, ὅταν στήν εἴ-
σοδο $N(t) = 0$, καί μετὰ ὅταν $s(t) = 0$ (ἔχι $f_f(t) = 0$). Ἡ πρῶ-
τη περίπτωση βοηθάει στόν ὑπολογισμό τῆς ισχύος τοῦ θορύβου στήν
ἔξοδο $0(t)$, καί ἡ δεύτερη τοῦ σήματος.

Ἐστω πρῶτα ὅτι $N(t) = 0$
(δεν υπάρχει θόρυβος)

$$0(t) = \omega_c + k_f s(t)$$

Ἄρα ἡ ισχύς τοῦ σήματος στήν ἔξοδο εἶναι,

$$\text{Ἰσχύς Σήματος} = k_f^2 S$$

πού S ἡ ισχύς τοῦ $s(t)$. Πάει αὐτό.

Τώρα ὑποθέτουμε ὅτι στήν εἴσοδο ἔχουμε $s(t) = 0$, ἥ

$$Z(t) = A \cos \omega_c t + N(t)$$

πού φυσικά

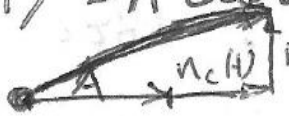
$$N(t) = n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t$$

πού τά $n_c(t)$ καί $n_s(t)$ ἔχουν σάν πυκνότητα φάσματος ισχύος τήν
σταθερά N_0 ὅταν τό $N(t)$ ἔχει $N_0/2$ (ἄς μήν ξεχνᾶμε ὅτι $N(t)$,
 $n_c(t)$ καί $n_s(t)$ ἔχουν τήν ἴδια ισχύ). Φυσικά τά $n_c(t)$, $n_s(t)$ εἴ-
ναι περιορισμένης ζώνης θόρυβοι.



ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ SNR_o (ΛΣΘο) – συνέχεια_1

Αφού $s(t)=0$, $Z(t) = A \cos \omega_c t + N(t) = A \cos \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t$



$Z(t) = \sqrt{A^2 + N^2(t)} \cos(\omega_c t + \phi(t))$

Το μοντέλο του θορύβου στενής ζώνης προκύπτει από
 θόρυβο περιορισμένης ζώνης $X(t)$ ο οποίος πολλαπλασιάζεται
 με ένα συνημίτονο $\cos(\omega_c t + \theta)$ όπου θ τ.μ. $[0, 2\pi]$
 (ομοιόμορφος) (κατανομής)

$$\begin{aligned} \text{δω. } N(t) &= X(t) \cos(\omega_c t + \theta) = \\ &= \underbrace{X(t) \cos \theta}_{n_c(t)} \cos \omega_c t - \underbrace{X(t) \sin \theta}_{n_s(t)} \sin \omega_c t \end{aligned}$$

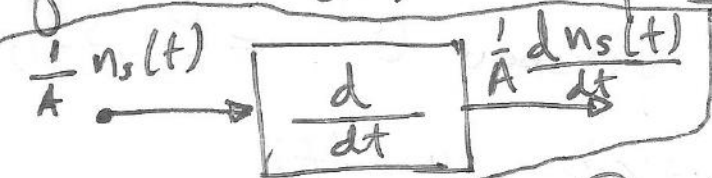


ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ SNRo (ΛΣΘο) – συνέχεια_2

Το $z(t)$ γράφεται ως $\sqrt{[A+n_c(t)]^2 + n_s(t)^2} \cos(\omega_c t + \phi(t))$
 όπου $\phi(t) = \arctan\left[\frac{n_s(t)}{A+n_c(t)}\right] \xrightarrow{\gamma(t)} \phi'(t)$

"Αν $A \gg n_c(t) \Rightarrow \phi(t) \approx \frac{n_s(t)}{A}$

Ο ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΤΗΣ FM (Διακρίνιζης) δρά ως ένα συν-
 χωρία $\phi'(t)$ και μέγεθος των αποκλίσεων
 (ζευγάρι στο ω_c)



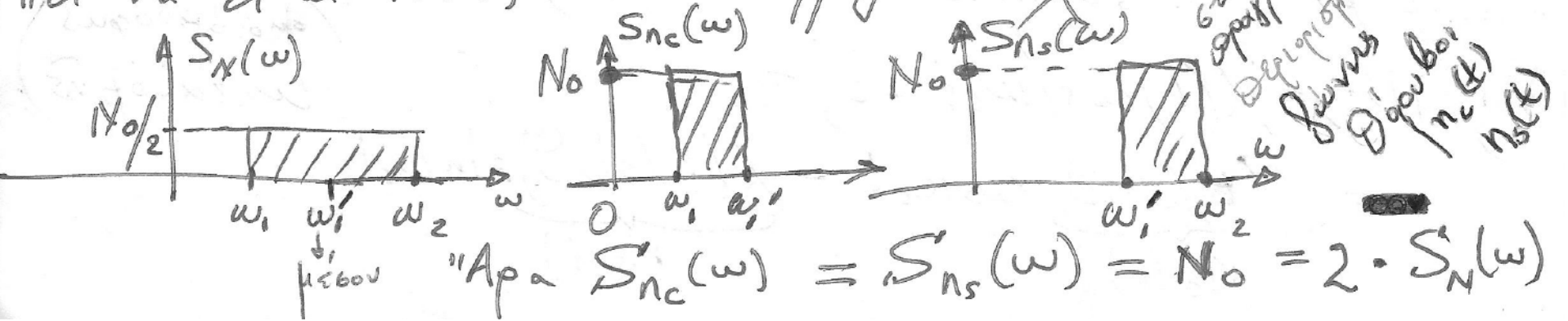
"αρα $C(t) = \omega_c + \frac{1}{A} \frac{d n_s(t)}{dt}$

όπου ο όρος του δορύβου είναι το $\frac{1}{A} \frac{d n_s(t)}{dt}$. Πρέπει να

βρούμε το Σ.Σ. Αυτοσυσχετισμός έχω και μετά με M.F. των
 πιθανότατα φασματικής ισχύος των δορύβου
 ολοκληρώσουμε για να βρούμε την ισχύ του (συνέξοδο όπως)
 Η ολοκλήρωση θα γίνει γαβάνοντας δώ'ότιν το LPF
 [0, ω_m].

Πυκνότητα φάσματος ισχύος $N(t)$, $n_c(t)$, $n_s(t)$

"Αν η πυκνότητα φασματικής ισχύος του $N(t)$ είναι $N_0/2$ τότε η πυκνότητα φασματικής ισχύος των συνιστωσών $n_c(t)$ και $n_s(t)$ είναι N_0 , ή μάθε μία. Διαδικαστική εξήγηση: Το συνοζικό γάμμα συχνοτήτων του $N(t)$ έσω ότι εντείνεται από ω_1 μέχρι ω_2 . Τότε το μισό του φάσματος αέριου θα οδηγείται στο $n_c(t)$ και το υπόλοιπο μισό στην αντιστοιχία $n_s(t)$. Τα έμβασα όμως αέριου από την φασματική πυκνότητα των $N(t)$, $n_c(t)$ και $n_s(t)$ αρδ-πει να είναι ίδια, διότι εκφράζουν ισχύ. επιόραση επιόραση
συνημιτόνου ημιτόνου

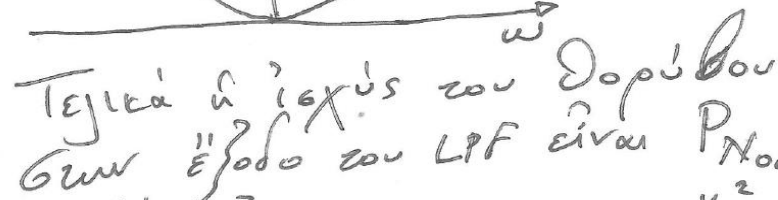
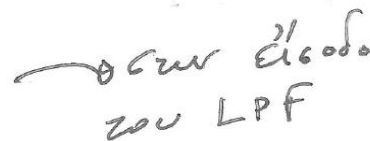


Ισχύς
θορύ-
βου
στην
έξοδο

$$R_{\frac{n_s}{A}}(z) = E \left[\frac{1}{A} n_s(t_1) \cdot \frac{1}{A} n_s(t_2) \right] = \frac{1}{A^2} E [n_s(t_1) \cdot n_s(t_2)] =$$

$$= \frac{1}{A^2} E [n_s(t_1) n_s(t_1 + \tau)] \Rightarrow \frac{1}{A^2} S_{n_s}(\omega) = \frac{N_0}{A^2}$$

$S_{out}(\omega) = S_{input}(\omega) |H(\omega)|^2$ με $H(\omega) = j\omega \rightarrow |H(\omega)|^2 = \omega^2$.



Τελικά η ισχύς του δορυφόρου
 που έφοδο του LPF είναι $P_{Nout} = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\omega_m} \frac{N_0}{A^2} \omega^2 d\omega =$
 $= \frac{N_0 \omega_m^3}{3A^2\pi}$ ή $N_{BO} = \frac{K_{FM}^2 S}{\frac{N_0 \omega_m^3}{3A^2\pi}} = \frac{3K_{FM}^2 S \cdot A^2 \cdot \pi}{N_0 \cdot \omega_m^3}$ και

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ Κ.Α.

$$(\Delta\Sigma\Theta)_i = \frac{A^2/2}{2N_0\Delta f} = \frac{A^2}{4N_0\Delta f}$$

$$(\Delta\Sigma\Theta)_o = \frac{3k_f^2 S A^2 \pi}{N_0 \omega_m^3}$$

Τέλος, τό ΚΑ τοῦ FM εἶναι,

$$KA = \frac{(\Delta\Sigma\Theta)_o}{(\Delta\Sigma\Theta)_i} = \frac{6k_f^2 S \Delta\omega}{\omega_m^3}$$

Αυτό τό ΚΑ δέν εἶναι ἀπλός ἀριθμός, ὅπως στά συστήματα AM, καί χρειάζεται κάποια ἐξήγηση τῆς σημασίας του.

Ἄς ἐξετάσουμε τήν ἀπλή περίπτωση πού $s(t) = a \sin \omega_s t$. Τότε,

$$s = \frac{a^2}{2}$$

καί $\Delta\omega = \alpha k_f$ (γιατί $\omega_i = \omega_c + \alpha k_f \sin \omega_s t$)

Ἄρα,

$$KA = 3 \left(\frac{\alpha k_f}{\omega_s} \right)^3$$

Ἀλλά ἀπό τή γνωστή μας ἀνάλυση τοῦ FM,

$$\frac{\alpha k_f}{\omega_s} = m_f \quad (\text{δείκτης διαμόρφωσης FM})$$

Ἄρα,

$$KA = 3(m_f)^3$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ὅτι τό ΚΑ ἐξαρτᾶται ἀπό τόν δείκτη διαμόρφωσης m_f . Φυσικά, ὅσο μεγαλύτερος εἶναι ὁ m_f τόσο μεγαλύτερο πλάτος ζώνης ἔχει τό $f_f(t)$. Παρατηροῦμε, δηλαδή, ὅτι μπορούμε νά αὐξήσουμε τήν ἀπόδοση τοῦ FM μέ τό νά αὐξήσουμε τό πλάτος ζώνης του, πράγμα πού δέν γίνεται στά AM.

Στίς ἐκπομπές FM π.χ., ἡ μέγιστη συχνότητα εἶναι $\omega_m = 15 \text{ KHz}$ καί ἡ μέγιστη μεταβολή συχνότητας εἶναι

$$\alpha k_f = 75 \text{ KHz}$$

$$\text{για } \frac{\Delta\omega}{\omega_s} = b = \frac{Af}{f_s} =$$

$$= \frac{75 \text{ KHz}}{15 \text{ KHz}}$$

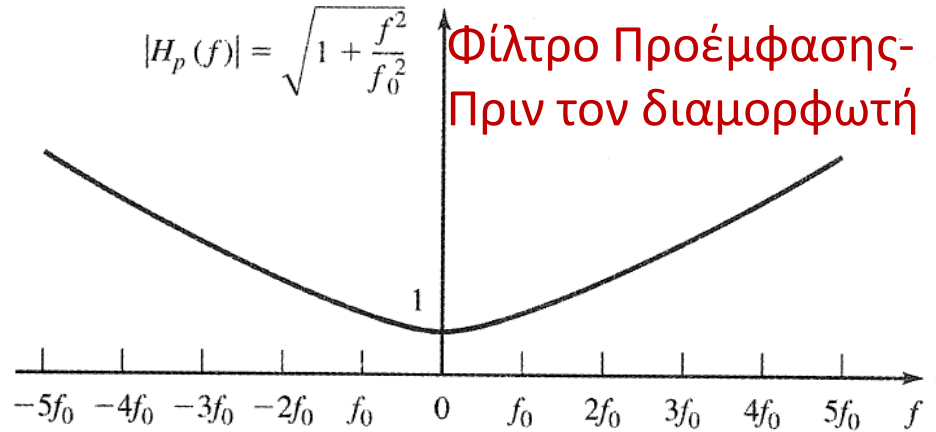
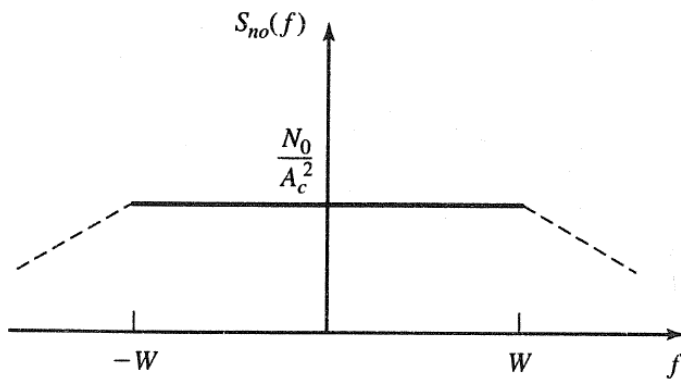
$$\text{Κ.Α.} = 3 \cdot 5^3 = 375$$

Περιεχόμενα ενότητας

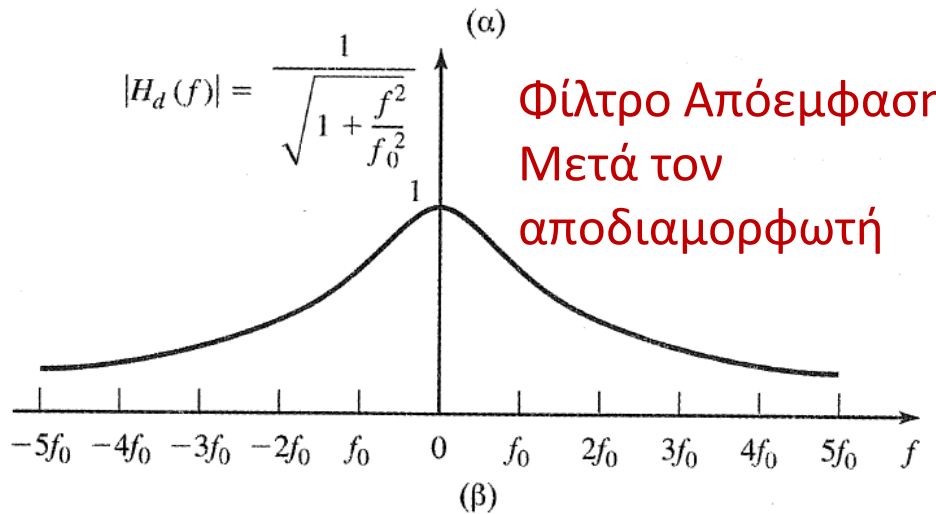
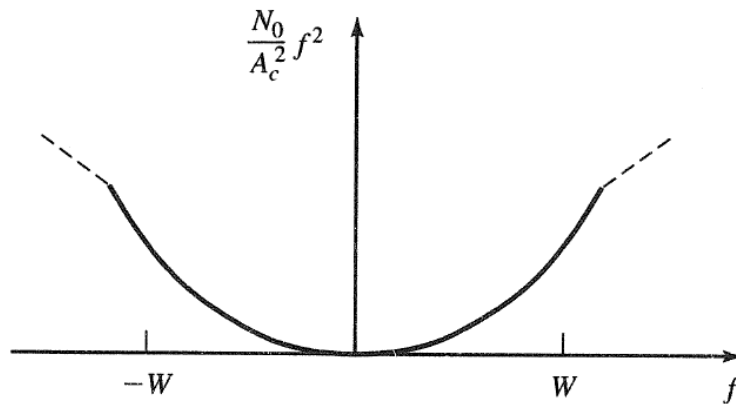
- ☐ ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
- ☐ ΘΟΡΥΒΟΣ ΣΕ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ
- ☒ ΦΙΛΤΡΑ ΠΡΟΕΜΦΑΣΗΣ ΚΑΙ ΑΠΟΕΜΦΑΣΗΣ



Φίλτρα προέμφασης και αποέμφασης (1/2)



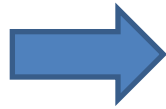
Φίλτρο Προέμφασης-
Πριν τον διαμορφωτή



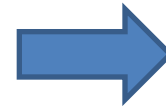
Φίλτρο Απόεμφασης-
Μετά τον
αποδιαμορφωτή

Φίλτρα προέμφασης και αποέμφασης (2/2)

Εμπορικά FM



RC φίλτρα με σταθερά
χρόνου 75μs



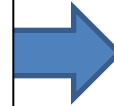
$$H_d(f) = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_0}}$$

Συχνότητα 3 dB

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \times 75 \times 10^{-6}} = 2.1 \text{ KHz}$$

$$S_{n_{PD}}(f) = S_{n_o}(f) |H_d(f)|^2 = \frac{N_0}{A_c^2} f^2 \frac{1}{1 + \frac{f^2}{f_0^2}}$$

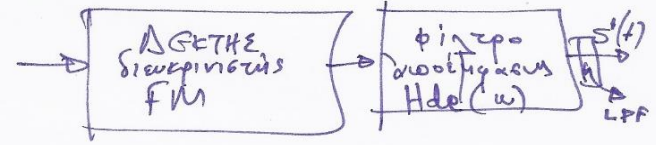
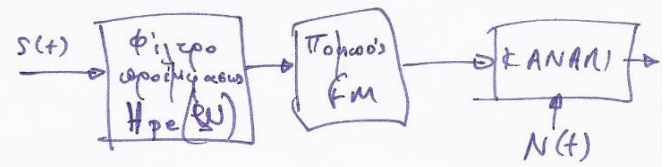
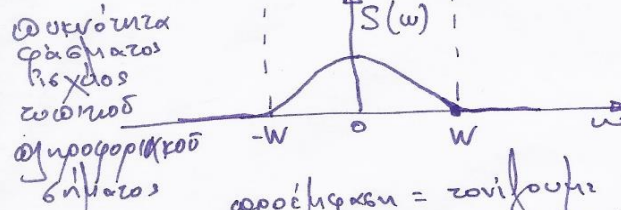
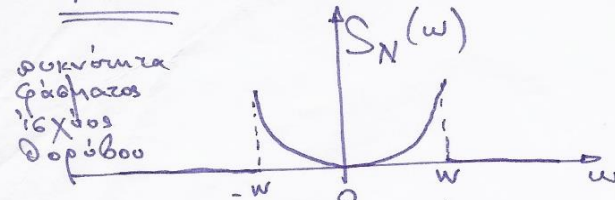
$$\begin{aligned} P_{n_{PD}} &= \int_{-W}^{+W} S_{n_{PD}}(f) df = \frac{N_0}{A_c^2} \int_{-W}^{+W} \frac{f^2}{1 + \frac{f^2}{f_0^2}} df \\ &= \frac{2N_0 f_0^3}{A_c^2} \left[\frac{W}{f_0} - \arctan \frac{W}{f_0} \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{o_{PD}}}{\left(\frac{S}{N}\right)_o} &= \frac{P_{n_o}}{P_{n_{PD}}} = \frac{\frac{2N_0 W^3}{3A_c^2}}{\frac{2N_0 f_0^3}{A_c^2} \left[\frac{W}{f_0} - \arctan \frac{W}{f_0} \right]} \\ &= \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{W}{f_0}\right)^3}{\frac{W}{f_0} - \arctan \frac{W}{f_0}} \end{aligned}$$



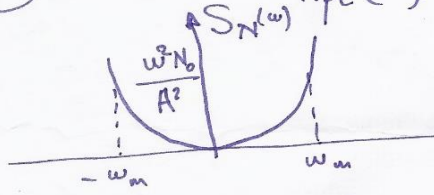
Φίλτρα Προ- έμφασης — Από- έμφασης



απο-έμφαση = κοντύνει τις συνιστώσες υψηλής συχνότητας του $S(t)$ πριν το στάδιο FM (δηλ. πριν από την είσοδο του κωδικοποιητή)
 κωδικοποίηση = στην έξοδο του διακριτικού ενεργεί η αντιστροφή διαδικασία κωδικοποίησης των υψηλών συχνοτήτων.

Για να μην έχουμε παραμόρφωση του $S(t)$ τα φίλτρα απο-από-έμφασης πρέπει να είναι αντιστροφικά μεταξύ τους (οι συντελεστές μεταστροφής τους).

δηλ. $H_{de}(\omega) = \frac{1}{H_{pe}(\omega)}$ $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$



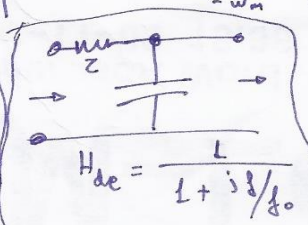
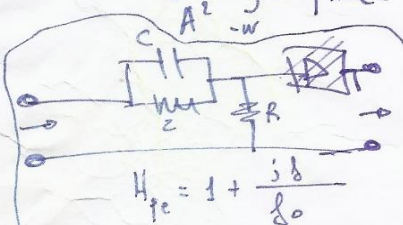
Τότε η προσομοιωμένη ισχύς του θορύβου στην έξοδο του φίλτρου απο-έμφασης είναι $|H_{de}(\omega)|^2 \cdot S_N(\omega)$ και μετά το LPF γίνεται:

Μέση ισχύς θορύβου με κωδικοποίηση = $\frac{N_0}{A^2} \int_{-\omega}^{\omega} \omega^2 |H_{de}(\omega)|^2 d\omega$

Έστω το S_0 ιδανικά θεωρητικό σήμα κωδικοποίησης ή βελτίωση του SNR απο-έμφασης. Δεν μεταβάλλεται από τα φίλτρα κωδικοποίησης και απο-έμφασης. $D = \frac{\text{Μέση ισχύς θορύβου στην είσοδο χωρίς κωδικοποίηση}}{\text{Μέση ισχύς θορύβου στην έξοδο με κωδικοποίηση}}$

$D = \frac{\frac{2N_0\omega_m^3}{3A^2\pi}}{\frac{N_0}{A^2} \int_{-\omega}^{\omega} \omega^2 |H_{de}(\omega)|^2 d\omega} = \frac{\omega_m^3}{3\pi \int_{-\omega_m}^{\omega_m} \omega^2 |H_{de}(\omega)|^2 d\omega}$

SNR_i αβυσσός



$f_0 = \frac{1}{2\pi CR}$ $R \ll Z$ $2\pi CRf_0 \ll 1$

