



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Συστήματα Επικοινωνιών

Διαμορφώσεις γωνίας

Μιχαήλ Λογοθέτης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σκοποί ενότητας

- Παρουσίαση της διαμόρφωσης συχνότητας και διαμόρφωσης φάσης
- Καθορισμός του φάσματος και της ισχύος στη διαμόρφωση γωνίας
- Περιγραφή της διαμόρφωσης γωνίας από ημιτονοειδές σήμα
- Παρουσίαση διατάξεων διαμόρφωσης συχνότητας



Περιεχόμενα ενότητας

- ❑ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ
- ❑ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ ΣΤΕΝΟΥ ΕΥΡΟΥΣ ΖΩΝΗΣ
- ❑ ΦΑΣΜΑ ΚΑΙ ΙΣΧΥΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ
- ❑ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ ΑΠΟ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΕΣ ΣΗΜΑ
- ❑ ΔΙΑΜΟΡΦΩΤΕΣ FM



Περιεχόμενα ενότητας

☒ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ

☐ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ ΣΤΕΝΟΥ ΕΥΡΟΥΣ ΖΩΝΗΣ

☐ ΦΑΣΜΑ ΚΑΙ ΙΣΧΥΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ

☐ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ ΑΠΟ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΕΣ ΣΗΜΑ

☐ ΔΙΑΜΟΡΦΩΤΕΣ FM



Διαμόρφωση γωνίας (Angle Modulation)

- ✓ Διαμόρφωση συχνότητας (Frequency Modulation-FM)
- ✓ Διαμόρφωση Φάσης (Phase Modulation-PM)
- ✓ Μη γραμμικές λειτουργίες, δύσκολες στην ανάλυση
- ✓ Διαστολή του εύρους ζώνης
- ✓ Αντοχή στο θόρυβο



EDWIN H. ARMSTRONG
1890-1954



Honeymooning in Palm Beach in 1923. Armstrong's wedding present to his wife was the first portable radio.



FM - PM

FM) $u(t) = A \cos \vartheta(t)$
 αμplitude γωνία
 $\frac{d\vartheta(t)}{dt} = \omega_i(t)$
 αμplitude συχνότητα

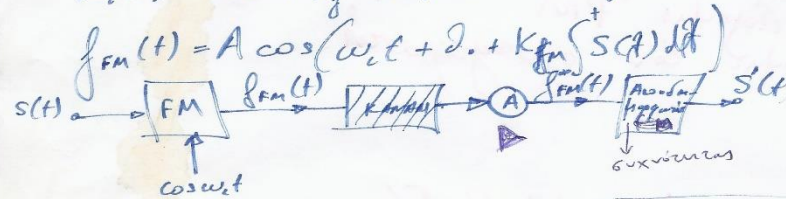
$$\vartheta(t) = \omega_c t + \vartheta_0 \Rightarrow \frac{d\vartheta(t)}{dt} = \omega_c$$

$$\vartheta(t) = \int \omega_i(t) dt$$

1

$s(t) \equiv$ γραμμικός όρος στην αμplitude
 συχνότητα ως προς ϑ

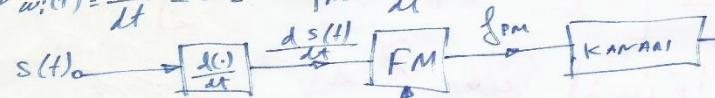
$$\omega_i(t) = \omega_c + K_f \cdot s(t) \Rightarrow \vartheta(t) = \int \omega_i(t) dt = \omega_c t + K_f \int s(t) dt + \vartheta_0$$



$s(t) \equiv$ γραμμικός όρος στην αμplitude
 γωνία ως προς ϑ

$$\vartheta(t) = \omega_c t + \vartheta_0 + K_{PM} s(t) \quad f_{PM} = A \cos(\omega_c t + \vartheta_0 + K_{PM} \cdot s(t))$$

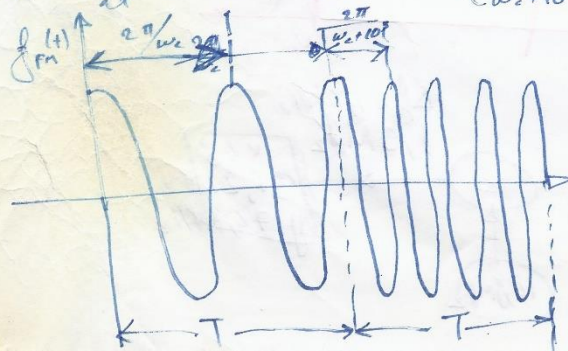
$$\omega_i(t) = \frac{d\vartheta(t)}{dt} = \omega_c + K_{PM} \frac{ds(t)}{dt}$$



$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq t \leq T \\ \cos \omega_m t & \text{if } T \leq t \leq 2T \end{cases}$$

$$f_{FM}(t) = A \cos(\omega_c t + \vartheta_0 + K_{FM} \int s(t) dt)$$

$$\omega_i(t) = \frac{d\vartheta(t)}{dt} = \omega_c + K_{FM} s(t) = \begin{cases} \omega_c & \text{if } 0 \leq t \leq T \\ \omega_c + 10^3 & \text{if } T \leq t \leq 2T \end{cases}$$



Μαθηματική παρουσίαση των FM και PM σημάτων (1/2)

$$x(t) = A_c \cos \theta(t)$$

Διαμορφωμένο σήμα

$$\theta(t) = 2\pi f_c t + \phi(t)$$

Γωνία σήματος

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Στιγμιαία συχνότητα

Phase Modulation – PM

$$\phi(t) = K_p m(t)$$

Φάση (K_p : Ευαισθησία φάσης rad/V)

$$\beta_p = \Delta\phi_{\max} = K_p \max |m(t)|$$

Δείκτης διαμόρφωσης



Μαθηματική παρουσίαση των FM και PM σημάτων (2/2)

Frequency Modulation – FM

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = 2\pi K_f m(t)$$

K_f : Ευαισθησία συχνότητας (Hz/V)

$$\phi(t) = 2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$$

Φάση

$$f_i(t) = f_c + K_f m(t)$$

Στιγμιαία συχνότητα

$$\beta_f = \frac{\Delta f_{\max}}{W} = \frac{K_f \max |m(t)|}{W}$$

Δείκτης διαμόρφωσης

$$\phi(t) = \begin{cases} K_p m(t), & \text{PM} \\ 2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau, & \text{FM.} \end{cases}$$

Η διαμόρφωση κατά φάση με το ολοκλήρωμα ενός μηνύματος είναι ισοδύναμη πράξη με την διαμόρφωση κατά συχνότητα με το αρχικό μήνυμα

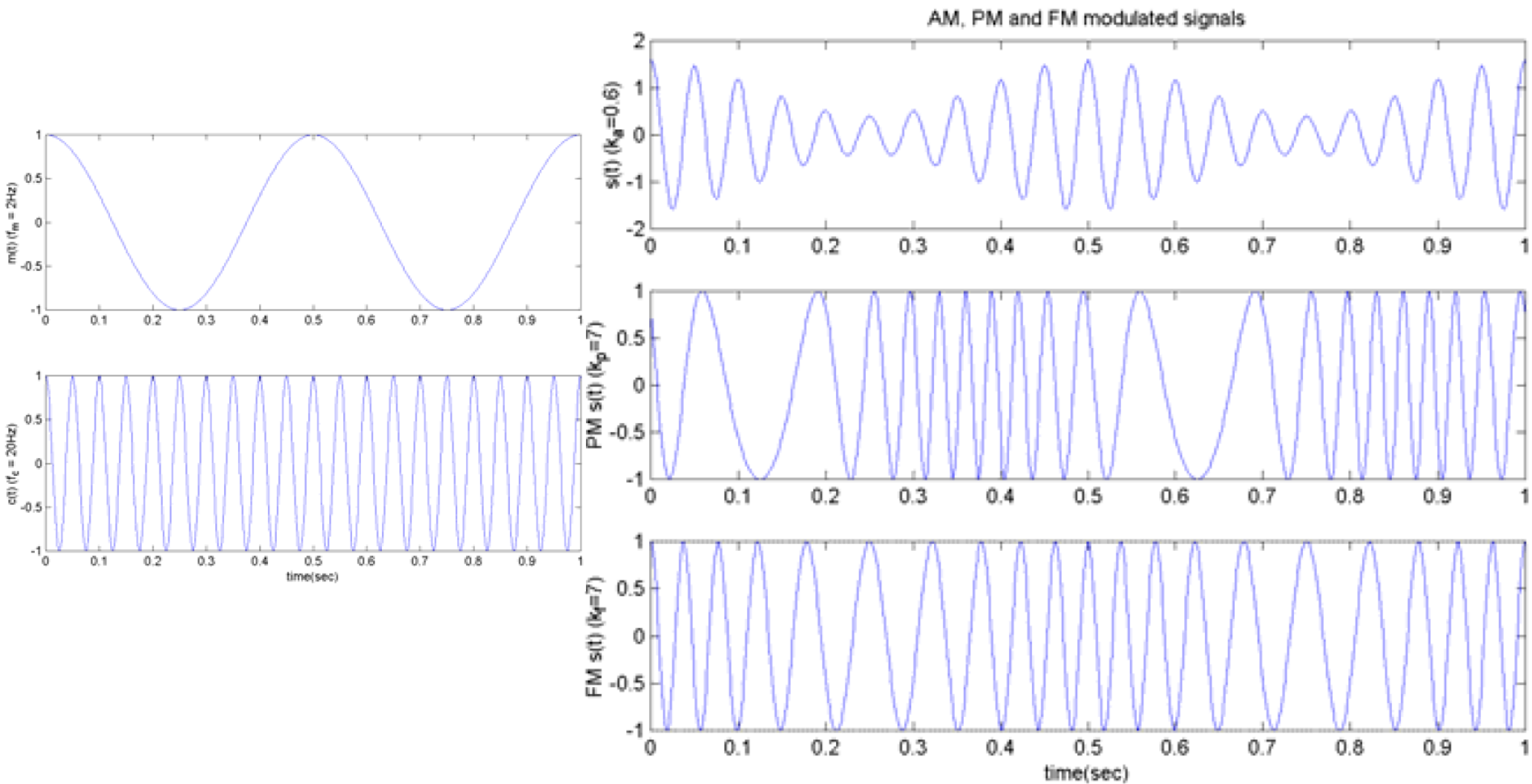


FM synthesis – Αρμονικότητα

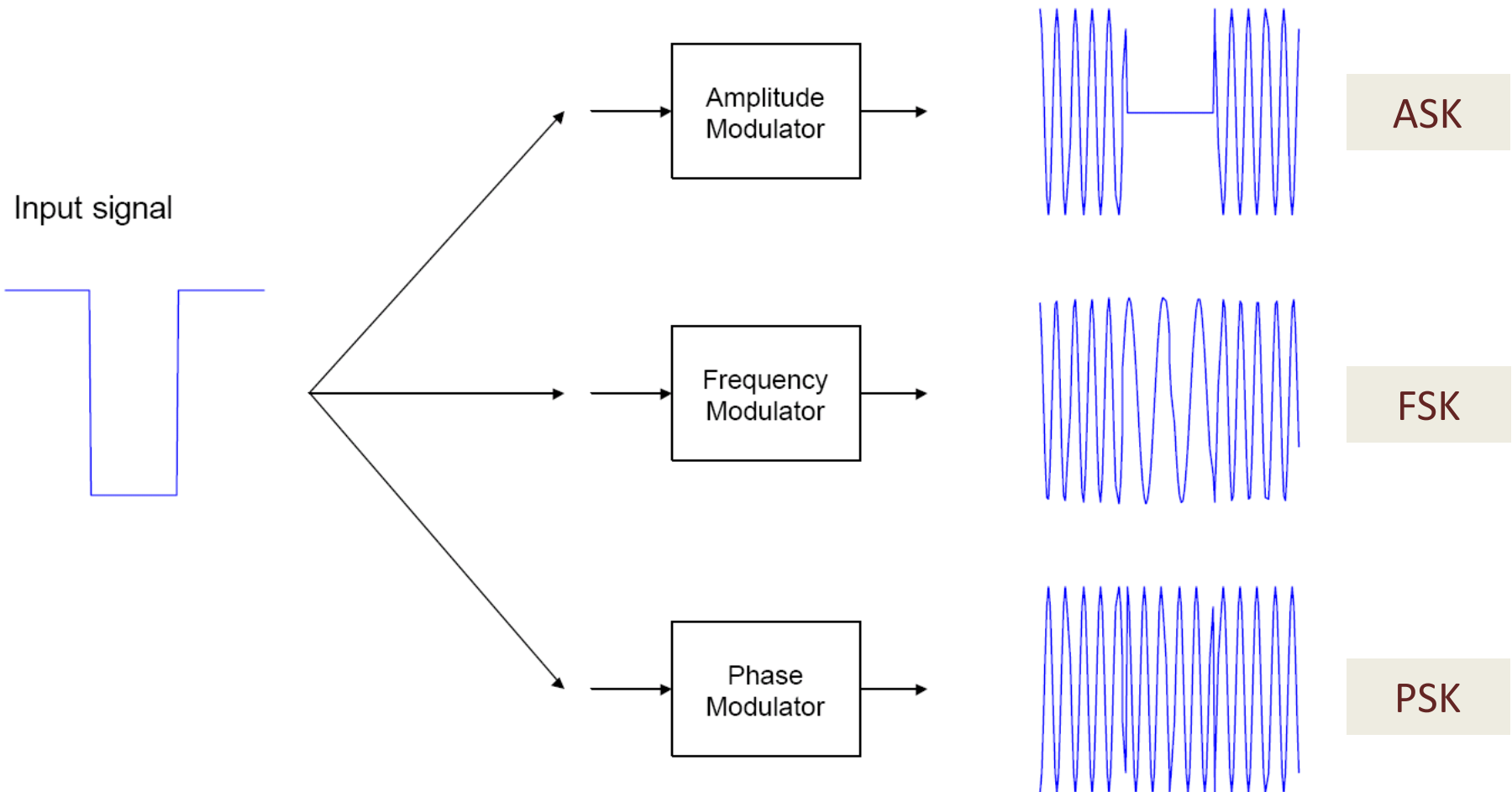
- FM είναι επίσης μια αποτελεσματική τεχνική για την προσομοίωση στον Η/Υ των ήχων ακουστικών οργάνων καθώς και για τη δημιουργία ασυνήθιστων νέων ήχων (π.χ. μεταλλικής χροιάς).
- Ο δείκτης ή **λόγος αρμονικότητας**: $H = f_c / f_m$ (f_c : η συχνότητα του φορέα και f_m : η συχνότητα του διαμορφωτή) καθορίζει τη σχέση μεταξύ των συχνοτήτων στον προκύπτοντα ήχο.
 - Αν H είναι **ακέραιος** ή (f_c και f_m) **ακέραιες**, τότε παράγεται ένα αρμονικό φάσμα συχνοτήτων (μουσικοί, τονικοί ήχοι).
 - Αν H είναι **άρρητος αριθμός**, τότε παράγεται μη αρμονικός ήχος (π.χ. μεταλλικοί ήχοι, ή ήχοι που μοιάζουν με καμπάνα).
 - Λόγος $H=1:1$ παράγει αρμονικό φάσμα που ακούγεται σαν πριονωτό κύμα.
 - Λόγος $H=2:1$, ήχος σαν τετραγωνικό κύμα (παράγονται μόνο ζυγές αρμονικές).
 - Λόγος $H=3:2$, αρμονικός ήχος με ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τους μουσικούς.
 - Αν η f_m είναι μη ακουστική συχνότητα (<30 Hz), παράγεται ήχος «**βιμπράτο**» (παλλόμενος ήχος - τρέμουλο).



Παράδειγμα AM, FM και PM σημάτων



Παράδειγμα AM, FM και PM σημάτων σε είσοδο παλμοσειράς



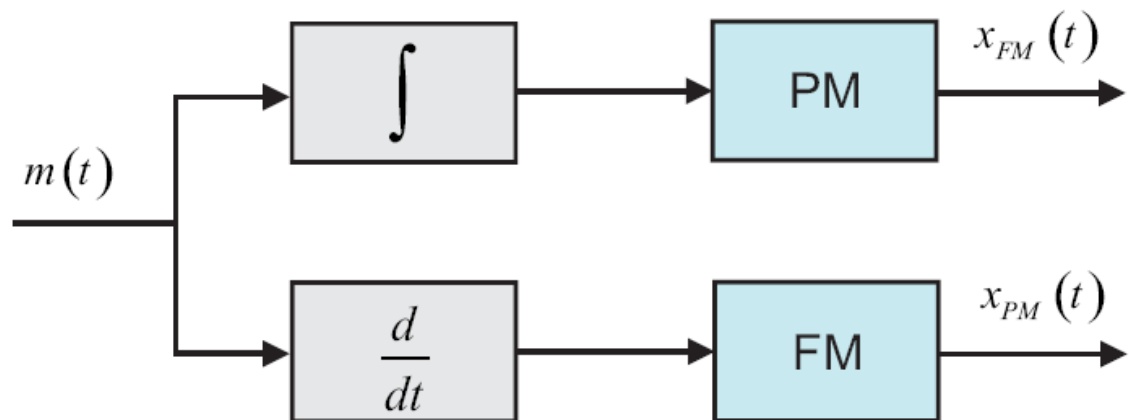
Συμπεράσματα για την διαμόρφωση γωνίας (1/2)

$$x(t) = A_c \cos 2\pi f_c t \cos \phi(t) - A_c \sin 2\pi f_c t \sin \phi(t)$$

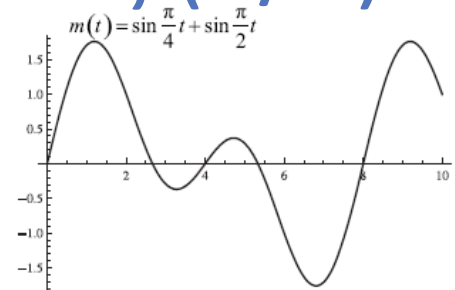
- ✓ Σε αντίθεση με τις διαμορφώσεις πλάτους, τα δύο ορθογώνια φέρονται διαμορφώνονται κατά πλάτος από τις μη-γραμμικές συναρτήσεις $\cos \phi(t)$ και $\sin \phi(t)$. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η διαμόρφωση γωνίας να είναι μία έντονα μη-γραμμική διαδικασία, στην οποία δεν ισχύει η αρχή της υπέρθεσης.
- ✓ Οι διαμορφώσεις PM και FM παρουσιάζουν την ιδιότητα της δυϊκότητας (duality)

$$K_p = 2\pi K_f$$

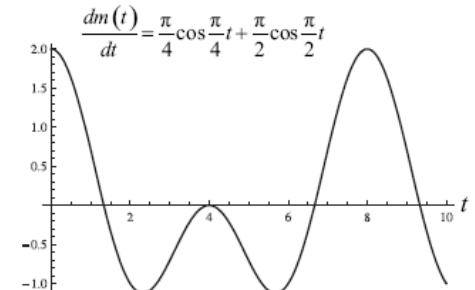
$$\phi(t) = \begin{cases} K_p m(t), & \text{PM} \\ 2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau, & \text{FM.} \end{cases}$$



Συμπεράσματα για την διαμόρφωση γωνίας (2/2)



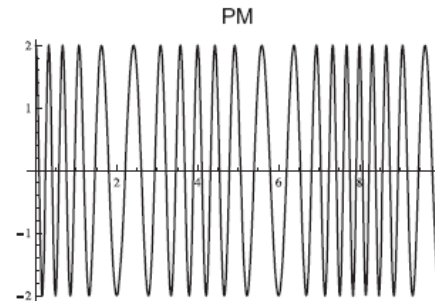
(α)



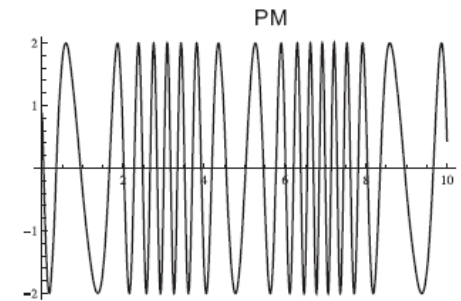
(β)

$$K_p = 2\pi K_f$$

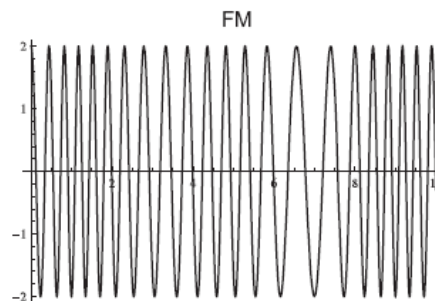
$$\phi(t) = \begin{cases} K_p m(t), & \text{PM} \\ 2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau, & \text{FM} \end{cases}$$



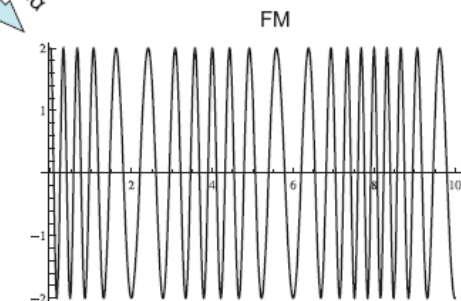
(γ)



(δ)



(ε)



(στ)

Ισοδυναμία



Παράδειγμα

Αν το σήμα πληροφορίας βασικής ζώνης είναι:

$$m(t) = a \cos 2\pi f_m t,$$

να βρεθούν οι αναλυτικές σχέσεις στο πεδίο του χρόνου για τα σήματα PM και FM.

$$\begin{aligned} x_{PM}(t) &= A_c \cos[2\pi f_c t + K_p m(t)] \\ &= A_c \cos[2\pi f_c t + K_p a \cos 2\pi f_m t] \\ &= A_c \cos[2\pi f_c t + \beta_p \cos 2\pi f_m t] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{FM}(t) &= A_c \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right] \\ &= A_c \cos \left[2\pi f_c t + \frac{K_f a}{f_m} \sin 2\pi f_m t \right] \\ &= A_c \cos[2\pi f_c t + \beta_f \sin 2\pi f_m t], \end{aligned}$$



Περιεχόμενα ενότητας

☐ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ

☒ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ ΣΤΕΝΟΥ ΕΥΡΟΥΣ ΖΩΝΗΣ

☐ ΦΑΣΜΑ ΚΑΙ ΙΣΧΥΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ

☐ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ ΑΠΟ ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΕΣ ΣΗΜΑ

☐ ΔΙΑΜΟΡΦΩΤΕΣ FM



N B F M

FM σε απλ. φέρων

$$f_{FM} = A \cos(\omega_c t + k_{FM} \int s(t) dt) = A \cos \omega_c t \cos(k_{FM} \int s(t) dt) - A \sin \omega_c t \sin(k_{FM} \int s(t) dt) \quad (2)$$

$$\text{αν } k_{FM} \int s(t) dt \ll \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(k_{FM} \int s(t) dt) = 1, \sin(k_{FM} \int s(t) dt) = k_{FM} \int s(t) dt$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |s(t)| < 1 \\ k_{FM} < 1 \end{array} \right. \text{ άρα: } f_{FM} = A \cos \omega_c t - A k_{FM} \int s(t) dt \sin \omega_c t$$

↓ Fourier Transform.

$$F_{FM}(\omega) = \pi \cdot A \left[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c) \right] + \frac{j\pi A k_{FM}}{2} \left[\frac{S(\omega - \omega_c)}{j(\omega - \omega_c)} - \frac{S(\omega + \omega_c)}{j(\omega + \omega_c)} \right]$$



$$\cos(\omega_c t) \leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$$

$$\sin(\omega_c t) \leftrightarrow -j\pi [\delta(\omega - \omega_c) - \delta(\omega + \omega_c)]$$

$$\int_0^t f(\lambda) d\lambda \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi f(0) \delta(\omega)$$

$$\sin \omega_c t \hat{=} \frac{e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{2j}$$

FM wide band

$$s(t) = \alpha \cos \omega_s t \Rightarrow \int s(t) dt = \frac{\alpha}{\omega_s} \sin \omega_s t$$

$$f_{FM}(t) = A \cos \omega_c t + \frac{\alpha k_{FM}}{\omega_s} \sin \omega_s t \sin \omega_c t$$

$$\omega_c(t) = \omega_c + (\alpha k_{FM}) \cos \omega_s t$$

$$m_{FM} = \frac{\alpha k_{FM}}{\omega_s} \equiv \text{δείκτης διαμόρφωσης}$$

$$f_{FM}(t) = \alpha \cos \omega_c t \cos(m_{FM} \sin \omega_s t) - A \sin \omega_c t \sin(m_{FM} \sin \omega_s t) \Rightarrow \text{Re} \{ V_0 e^{j m_{FM} \sin \omega_s t} e^{j \omega_c t} \}$$

$$f_{FM}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(m_f) \cos(\omega_c + n\omega_s)t$$

ex. $m_f = 2$ τότε $J_0, J_1, J_2, J_3 \neq 0$

$$f_{FM}(t) = A \sum_{n=-3}^3 J_n(2) \cos(\omega_c + n\omega_s)t$$

$$B = 2 \times n\omega_s = 2 \cdot 3 \cdot \omega_s$$



$$B = 2 \times (m_{FM} + 1) \omega_s$$

$$= 2(m_f \omega_s + \omega_s) =$$

$$= 2(\alpha k_{FM} + \omega_s)$$

$$B = 2(\Delta \omega + \omega_s)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \omega = 75 \text{ kHz} \\ \omega_s = 15 \text{ kHz} \end{array} \right\} \Rightarrow B = 180 \text{ kHz}$$

↓
πλάτος 200 kHz



N B P M

NBFM

$\frac{d}{dt} e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}$

$$f_{FM}(t) = A \cos \omega_c t - A K_{FM} \int s(t) dt \sin \omega_c t$$

$$A \cos \omega_c t \xrightarrow{M.F.} A \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] = \frac{A}{2} [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$$

$$g(t) = A K_{FM} \int s(t) dt \xrightarrow{M.F.} \frac{A K_{FM} S(\omega)}{j\omega} \quad \text{v} \quad S(0) = 0$$

$$\sin \omega_c t = \frac{e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{2j}$$

$$+ g(t) \cdot \frac{e^{j\omega_c t}}{2j} - g(t) \frac{e^{-j\omega_c t}}{2j} \xrightarrow{+} \frac{1}{2j} G(\omega - \omega_c) - \frac{1}{2j} G(\omega + \omega_c)$$

$$F_{FM}(\omega) = \pi A [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] - \frac{A K_{FM}}{2j} \frac{S'(\omega - \omega_c)}{j(\omega - \omega_c)} + \frac{A K_{FM}}{2j} \frac{S'(\omega + \omega_c)}{j(\omega + \omega_c)}$$

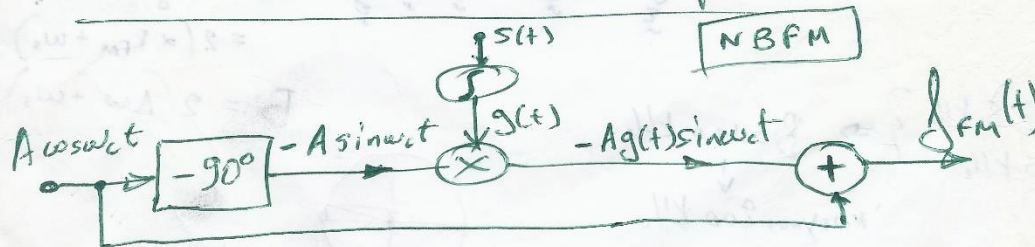
$$= \pi A [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \frac{A K_{FM}}{2} \frac{S'(\omega - \omega_c)}{\omega - \omega_c} - \frac{A K_{FM}}{2} \frac{S'(\omega + \omega_c)}{\omega + \omega_c}$$

$$f_{PM}(t) = A \cos \omega_c t - A K_{PM} S(t) \sin \omega_c t$$

$$F_{PM}(\omega) = A \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] - \frac{A K_{PM}}{2j} \frac{S'(\omega - \omega_c)}{\omega - \omega_c} + \frac{A K_{PM}}{2j} \frac{S'(\omega + \omega_c)}{\omega + \omega_c}$$

$$= A \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \frac{j A K_{PM}}{2} \frac{S'(\omega - \omega_c)}{\omega - \omega_c} - \frac{j A K_{PM}}{2} \frac{S'(\omega + \omega_c)}{\omega + \omega_c}$$

$$\left| j \frac{A K_{PM}}{2} \right| = \left| 0 + j \frac{A K_{PM}}{2} \right| = \sqrt{0^2 + \frac{A^2 K_{PM}^2}{4}} = \frac{A K_{PM}}{2}$$



Διαμόρφωση γωνίας στενού εύρους ζώνης (1/3)

$$\phi(t) = K_p m(t)$$

$$\beta_p = \Delta\phi_{\max} = K_p \max |m(t)|$$

$$x(t) = A_c \cos 2\pi f_c t - A_c \frac{\phi^2(t)}{2!} \cos 2\pi f_c t + \dots - A_c \phi(t) \sin 2\pi f_c t + A_c \frac{\phi^3(t)}{3!} \sin 2\pi f_c t - \dots$$

$\beta \ll 1$



$$x(t) \simeq A_c \cos 2\pi f_c t - A_c \phi(t) \sin 2\pi f_c t$$

$$X(f) \simeq \mathcal{F}[A_c \cos 2\pi f_c t] - \mathcal{F}[A_c \phi(t) \sin 2\pi f_c t]$$
$$\simeq \frac{A_c}{2} \delta(f - f_c) + \frac{A_c}{2} \delta(f + f_c) + \frac{jA_c}{2} \Phi(f - f_c) - \frac{jA_c}{2} \Phi(f + f_c)$$

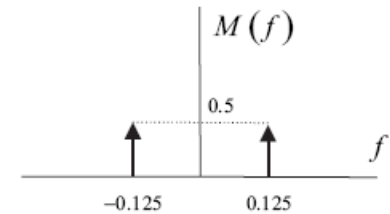
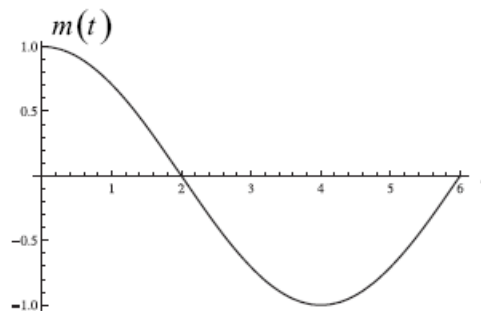


Διαμόρφωση γωνίας στενού εύρους ζώνης (2/3)

- ✓ Το $x(t)$ αποτελείται από 2 όρους: α) ένα φέρον, $A_c \cos 2\pi f_c t$, το οποίο δεν μεταβάλλεται με το σήμα πληροφορίας και β) τον όρο $A_c \varphi(t) \sin 2\pi f_c t$, ο οποίος είναι ένα DSB-AM-SC σήμα.
- ✓ Οι πλευρικές φασματικές ζώνες του DSB-AM-SC παρουσιάζουν διαφορά φάσης $\pi/2$ με τη συνιστώσα του φέροντος. Συγκεκριμένα, το $\Phi(f - f_c)$ προηγείται ενώ το $\Phi(f + f_c)$ έπεται κατά $\pi/2$ της φασματικής συνιστώσας του φέροντος.
- ✓ Οι πλευρικές ζώνες του DSB-AM-SC παρουσιάζουν μεταξύ τους διαφορά φάσης ίση με π .
- ✓ Το εύρος ζώνης είναι σχεδόν ίδιο με αυτό του AM, δηλαδή $2W$.



Διαμόρφωση γωνίας στενού εύρους ζώνης (3/3)



$$m(t) = a \cos 2\pi f_m t$$
$$a = 1, f_m = 1/8, f_c = 3,$$
$$\theta_f = 0.12, A_c = 2.$$

