



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Συστήματα Επικοινωνιών

Ενότητα: Ασκήσεις για τις ενότητες 8 – 13 Παλμοκωδική Διαμόρφωση – Ψηφιακή Μετάδοση

Ιωάννης Βαρδάκας

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά **ΠΠ**
μαθήματα

Περιεχόμενα

1. Σκοποί ενότητας	5
2. Περιεχόμενα ενότητας.....	5
3. Ασκήσεις για τις Ενότητες 8-13: PCM - Ψηφιακή Μετάδοση	7
4. Λύσεις των ασκήσεων	17

1. Σκοποί ενότητας

Ο βασικός σκοπός αυτής της ενότητας είναι η παρουσίαση ασκήσεων για την κατανόηση της ύλης των ενότητων 8 έως και 13 της θεωρίας του μαθήματος Συστήματα Επικοινωνιών. Οι ασκήσεις που παρουσιάζονται καλύπτουν όλο το φάσμα της αντίστοιχης ύλης της θεωρίας, ενώ κάθε άσκηση συνοδεύεται από λεπτομερή περιγραφή της διαδικασίας επίλυσης.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται ασκήσεις, καθώς και οι λύσεις τους, για την κατανόηση της διαμόρφωσης πλάτους. Οι ασκήσεις αυτές αναφέρονται στην διαμόρφωση γωνίας (Angle Modulation), όσο και στις ειδικές περιπτώσεις της διαμόρφωσης συχνότητας (Frequency Modulation – FM), και την διαμόρφωση φάσης (Phase Modulation – PM). Θα πρέπει να τονιστεί ότι οι προτεινόμενες ασκήσεις αναφέρονται όχι μόνο στην ανάλυση σημάτων στο πεδίο του χρόνου, αλλά και στο πεδίο της συχνότητας, ώστε να δίνεται η δυνατότητα της πλήρους κατανόησης της διαδικασίας διαμόρφωσης γωνίας. Τέλος, τμήμα των ασκήσεων λαμβάνουν υπόψη την παρουσία θορύβου στα συστήματα διαμόρφωσης γωνίας, ώστε να γίνεται κατανοητή η επίδραση του θορύβου στα συστήματα αυτά.

3. Ασκήσεις για τις Ενότητες 8-13: Παλμοκωδική Διαμόρφωση – Ψηφιακή Μετάδοση

Άσκηση 1:

Δίδεται ότι η μετρούμενη τάση κυμαίνεται ισοπίθανα μεταξύ των τιμών 1 mV και 5 mV. Τιμή τάσεως εκτός αυτών των ορίων θεωρείται απίθανη. Ποια είναι η μέση τιμή, ποια η μέση τετραγωνική τιμή, ποια η διασπορά και ποια η τυπική απόκλιση της μετρούμενης τάσεως; Αν θεωρήσουμε ότι τροφοδοτούμε αντίσταση 1 Ohm με την τάση αυτή, ποια είναι η ισχύς πάνω στην αντίσταση αυτή;

[Λύση](#)

Άσκηση 2:

Σε ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα, πομποδέκτη, όπου ο πομπός στέλνει το bit 1 ως έναν θετικό παλμό +3 Volts και το bit 0 ως έναν αρνητικό παλμό -3 Volts, υπεισέρχεται Γκαουσιανός θόρυβος $N(0, 3)$ (δηλ. με μέση τιμή $\mu=0$, και διασπορά $\sigma^2=3$). Ο δέκτης λαμβάνει το R , δηλ. παλμό + θόρυβο, και προσπαθεί να ανιχνεύσει τι έστειλε ο πομπός (-3V ή +3V). Το κατώφλι αναγνώρισης του R στο δέκτη, είναι η τιμή της τάσης (Volts) βάσει της οποίας ξεχωρίζει ο δέκτης αν έλαβε bit 1 ή bit 0, και καθιστά ελαχίστη την πιθανότητα λάθους αυτής της εκτίμησης. Πιθανότητα λάθους είναι η πιθανότητα ο δέκτης να θεωρήσει ότι έλαβε το bit 1, δεδομένου ότι ο πομπός έστειλε το bit 0, ή να θεωρήσει ότι έλαβε το bit 0 ενώ ο πομπός έστειλε το bit 1.

Η τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) $S=\{s: s=-3 \text{ ή } s=3\}$, είναι ασυσχέτιστη με τον θόρυβο N (ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές). Λόγω της ανεξαρτησίας, και αφού $R = S+N$, ισχύει: $P[R=r|S=s] = P[S+N=r|S=s] = P[s+N=r|S=s] = P[N=r-s|S=s] = P[N=r-s]$ - όπου η ανεξαρτησία ελήφθη υπόψη στο τελευταίο ίσον (=). Επομένως, η τ.μ. R δεσμευμένη ως προς S , θα έχει επίσης Γκαουσιανή πυκνότητα πιθανότητας (π.π.) (όπως ο θόρυβος – προσδιοριστέα: η μέση τιμή και η διασπορά).

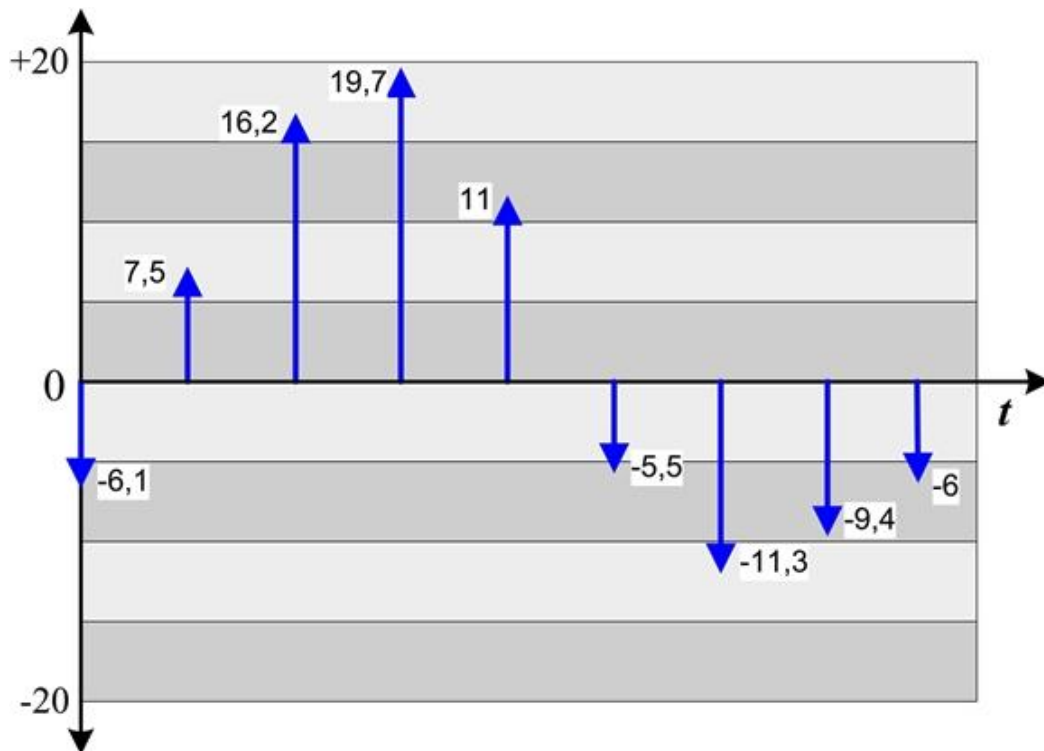
- i) Να βρείτε τη μέση τιμή και την διασπορά της Γκαουσιανής τ.μ. όταν α) $S=-3$ και β) $S=3$.
- ii) Αν τα bits 1 (+3V) και 0 (-3V) εκπέμπονται με την ίδια πιθανότητα (δηλ. $P(1) = P(0) = 50\%$), εξηγήστε γιατί το κατώφλι αναγνώρισης του R είναι το 0.
- iii) Πόση είναι η πιθανότητα λάθους;

[Λύση](#)

Άσκηση 3:

Στο κατωτέρω σχήμα φαίνονται 9 τιμές από δειγμάτων ενός σήματος PAM, και οι οποίες πρόκειται να κωδικοποιηθούν αφού κβαντιστούν στις ενδιάμεσες τιμές των επιπέδων κβαντισμού. Στο σχήμα

φαίνονται ότι ο κβαντιστής χρησιμοποιεί 8 στρώματα κβαντισμού. Επίσης, ο κβαντιστής θεωρεί ότι $V_{pp} = 40 \text{ Volts}$ (δηλ. $V_{max} = +20\text{V}$, $V_{min} = -20\text{V}$).



A) Να ευρεθούν: το βήμα κβαντισμού Δ , οι κανονικοποιημένες κβαντισμένες τιμές του PAM, καθώς και το αντίστοιχο σφάλμα κβαντισμού (προσημασμένες, κανονικοποιημένες τιμές). Η κανονικοποίηση γίνεται ως προς το Δ .

B) Να κωδικοποιηθούν τα δείγματα με δυαδικό κώδικα που λαμβάνει υπ' όψη πρόσημο έτσι ώστε κωδικές λέξεις με το 1ο bit="0" δηλώνουν θετικές τιμές).

Γ) Να υπολογισθεί ο SNR σε dB, στην έξοδο του κβαντιστή, αν η ισχύς του σήματος PAM είναι 200 W. Το αποτέλεσμα να συγκριθεί με τον SNR που προκύπτει από τις 9 μετρήσεις για το ανωτέρω σήμα PAM (δηλ. υπολογίστε το πηλίκο της μέσης τετραγωνικής τιμής προς την μέση τετραγωνική τιμή σφάλματος που προκύπτει από τις 9 μετρήσεις).

Δ) Αν αυξήσουμε τα bits κατά 1, να αποδειχθεί ότι θα βελτιωθεί ο SNR κατά 6 dB.

[Λύση](#)

Άσκηση 4:

Ένας υπολογιστής παράγει δυαδικές λέξεις των 16 bit, με ρυθμό 40000 λέξεις το λεπτό. Να υπολογιστούν:

- i) Το απαραίτητο εύρος ζώνης για την μετάδοση της πληροφορίας ως ένα δυαδικό PAM σήμα.
- ii) Η τιμή της παραμέτρου M , ώστε η πληροφορία να μεταδοθεί ως ένα M -PAM σήμα σε ένα κανάλι εύρους ζώνης $B=120 \text{ KHz}$.

Άσκηση 5:

Έστω ένα σύστημα ASK με on-off keying, στο οποίο το σύμβολο 1 αναπαριστάται με τη μετάδοση ημιτονοειδούς σήματος πλάτους $\sqrt{2E_b/T_b}$, όπου E_b είναι η ενέργεια σήματος ανά bit και T_b είναι η διάρκεια του bit, ενώ το σύμβολο 0 αναπαριστάται διακόπτοντας την εκπομπή του φέροντος. Θεωρείται ότι τα σύμβολα 1 και 0 εμφανίζονται με την ίδια πιθανότητα. Για ένα AWGN κανάλι να υπολογιστεί η μέση πιθανότητα σφάλματος για την περίπτωση της σύμφωνης λήψης.

[Λύση](#)Άσκηση 6:

Θεωρείται σύστημα PAM για τη διαμόρφωση δυαδικών δεδομένων πλάτους $\pm A$ και διάρκειας T_b , που μεταδίδονται με ρυθμό $R_b=10^5$ bits/sec. Εάν η πυκνότητα φασματικής ισχύος είναι $N_0/2$, με $N_0=10^{-2}$ W/Hz, να υπολογιστεί η τιμή του A , ώστε η πιθανότητα λάθους να είναι μικρότερη από 10^{-6} .

[Λύση](#)Άσκηση 7:

Ένα σύμφωνο σύστημα PSK δημιουργεί το σήμα:

$$s(t) = A_c k \sin(2\pi f_c t) \pm A_c \sqrt{1-k^2} \cos(2\pi f_c t)$$

όπου ο πρώτος όρος αναφέρεται στο φέρον, το οποίο αποστέλλεται για με το σήμα ώστε να συγχρονίσει το δέκτη, ο δεύτερος όρος με το σύμβολο "+" αντιστοιχεί στο σύμβολο 1, ενώ με το σύμβολο "-" αντιστοιχεί στο 0.

- i) Σχεδιάστε το διάγραμμα σήματος-χώρου και σχολιάστε.
- ii) Δείξτε ότι η παρουσία AWGN με μηδενική μέση τιμή και πυκνότητας φασματικής ισχύος $N_0/2$, η μέση πιθανότητα λάθους είναι:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0} (1-k^2)} \right)$$

[Λύση](#)Άσκηση 8:

Για την περίπτωση ενός διαμορφωτή π/4 DQPSK, το παραγόμενο σήμα εξόδου είναι το παρακάτω:

$$s(t) = s_I(t) \cos(2\pi f_c t) - s_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Υπολογίστε τις συναρτήσεις $s_I(t)$ και $s_Q(t)$.

[Λύση](#)

Άσκηση 9:

Έστω ότι σε ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι μεταδίδονται δεδομένα με ρυθμό 10^6 bits/sec, ενώ στο δέκτη η πυκνότητα φασματικής ισχύος του θορύβου είναι 10^{-10} W/Hz. Να καθοριστεί η ενέργεια ανά bit, η οποία απαιτείται ώστε η μέση πιθανότητα λάθους $P_e \leq 10^{-4}$ για τις παρακάτω περιπτώσεις:

- i) Σύμφωνο BPSK
- ii) DPSK

[Λύση](#)

Άσκηση 10:

Στην αποδιαμόρφωση ενός σήματος BPSK, το οποίο λαμβάνεται στον αντίστοιχο δέκτη με παρουσία λευκού Γκαουσιανού θορύβου, χρησιμοποιείται μία διάταξη PLL (Phased Locked Loop) για την εκτίμηση της φάσης φ .

- i) Καθορίστε την επίδραση του σφάλματος φάσης $\varphi - \hat{\varphi}$ στην πιθανότητα σφάλματος.
- ii) Ποιες είναι οι απώλειες στο SNR εάν $\varphi - \hat{\varphi} = 45^\circ$;

[Λύση](#)

Άσκηση 11:

Έστω ένα σύστημα FSK, το οποίο μεταδίδει δεδομένα με ρυθμό 2.5×10^6 bits/second. Η μετάδοση του σήματος γίνεται σε κανάλι, στο οποίο προστίθεται λευκός Γκαουσιανός θόρυβος με μηδενική μέση τιμή, ενώ πυκνότητα φασματικής ισχύος του θορύβου είναι ίση με 10^{-20} W/Hz. Στην περίπτωση απουσίας του θορύβου, το πλάτος του λαμβανόμενου ημιτονοειδούς σήματος για τα σύμβολα 1 και 0 είναι και στις δύο περιπτώσεις ίσο με 1 mV. Να καθοριστεί η μέση πιθανότητα λάθους για τις παρακάτω περιπτώσεις της FSK:

- i) Σύμφωνο BFSK
- ii) Μη σύμφωνο BFSK

[Λύση](#)

Άσκηση 12:

Έστω ένα σύστημα M-FSK, στο οποίο αποστέλλεται το παρακάτω σήμα:

$$u_0(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T$$

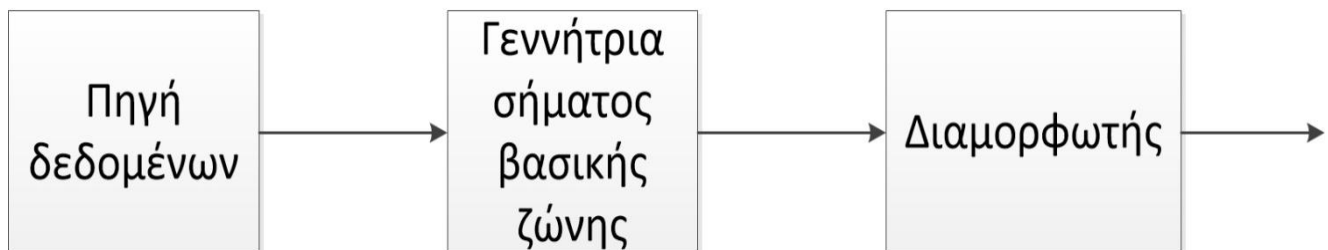
Να καθοριστεί η έξοδος των M-1 συσχετιστών στο δέκτη τη χρονική στιγμή $t=T$, που αντιστοιχεί στα σήματα $u_m(t)$, $m=1,2,\dots,M-1$, όταν $\varphi_m \neq \hat{\varphi}_m$

[Λύση](#)

Άσκηση 13:

Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει έναν διαμορφωτή. Η γεννήτρια του σήματος βασικής ζώνης χρησιμοποιεί πολική σηματοδότηση με παλμούς πλήρους πλάτους, ενώ ο ρυθμός μετάδοσης είναι 1 Mbit/sec.

- Εάν ο διαμορφωτής δημιουργεί ένα σήμα BPSK, να βρεθεί το εύρος ζώνης της διαμορφωμένης εξόδου της διάταξης.
- Εάν ο διαμορφωτής δημιουργεί ένα σήμα BFSK με διαφορά συχνοτήτων $f_{c1}-f_{c0}=100$ KHz, να βρεθεί το εύρος ζώνης της διαμορφωμένης εξόδου της διάταξης.



[Λύση](#)

Άσκηση 14:

Έστω ότι απαιτείται η μετάδοση ψηφιακής πληροφορίας μέσω καναλιού εύρους ζώνης 100 KHz, υπό την επίδραση λευκού Γκαουσιανού θορύβου με $N_0=10^{-10}$ W/Hz. Να καθοριστεί ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης εάν θεωρήσουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- PSK 4 φάσεων
- Μη σύμφωνη BFSK
- Μη σύμφωνη FSK 4 συχνοτήτων

[Λύση](#)

Άσκηση 15:

Να συγκριθούν τα συστήματα 16-PSK και 16-QAM, από την άποψη του λόγου σήματος προς θόρυβο, όταν η απαίτηση για πιθανότητα λάθους είναι 10^{-3} και για τα 2 συστήματα.

[Λύση](#)

Άσκηση 16:

Να υπολογιστεί η μείωση του εύρους ζώνης, καθώς και της μέσης ενέργειας σήματος, ενός 256-QAM, σε σχέση με ένα 64-QAM.

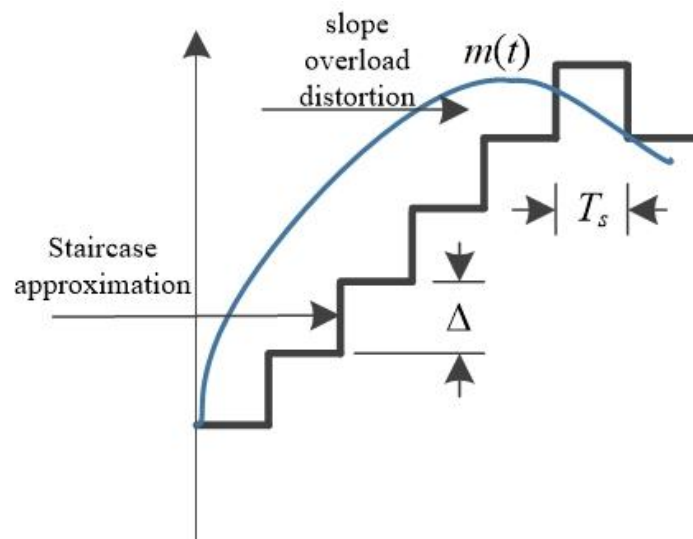
[Λύση](#)

Άσκηση 17:

Στη διαμόρφωση Δέλτα, το σφάλμα κβαντοποίησης γνωστό ως “slope overload distortion” εμφανίζεται όταν το εύρος της διαφοράς επιπέδων πλάτους Δ είναι τόσο μικρό, ώστε το λεγόμενο “staircase approximation” να αδυνατεί να εκφράσει αλλαγές του αναλογικού σήματος. Για την εξάλειψη αυτού του φαινομένου, θα πρέπει να ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{\Delta}{T_s} \geq \max \left| \frac{dm(t)}{dt} \right|$$

όπου T_s είναι η περίοδος δειγματοληψίας.



Έστω ένας διαμορφωτής Δέλτα, ο οποίος χρησιμοποιείται για τη διαμόρφωση σημάτων ομιλίας, τα οποία περιορίζονται στα 3.4 KHz. Ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι $10 \times f_{Nyquist}$, όπου $f_{Nyquist}$ είναι η συχνότητα Nyquist του σήματος ομιλίας, ενώ το βήμα δειγματοληψίας είναι $\Delta = 100$ mV. Ο

διαμορφωτής ελέγχεται με ένα ημιτονοειδές σήμα συχνότητας 1 KHz. Να καθοριστεί το μέγιστο πλάτος αυτού του σήματος ελέγχου, ώστε να εξαλειφθεί το φαινόμενο "slope distortion".

[Λύση](#)

Άσκηση 18:

Έστω ότι σε ένα σύστημα, το οποίο χρησιμοποιεί διαμόρφωση Δέλτα, εφαρμόζονται αναλογικά σήματα εύρους ζώνης έως $W=5$ KHz. Ένα σήμα $m(t)=A_m \sin(2\pi f_m t)$ $A_m=1$ V, $f_m=1$ KHz, εφαρμόζεται σε αυτό το σύστημα. Ο ρυθμός δειγματοληψίας του συστήματος είναι 50 KHz. Να υπολογιστούν:

- i) Η μέγιστη τιμή του βήματος Δ , ώστε να εξαλειφθεί το φαινόμενο "slope distortion".
- ii) Η μέγιστη τιμή της μέσης ισχύος του σήματος.

[Λύση](#)

Άσκηση 19:

Ένα σήμα τηλεόρασης, περιορισμένο στα 4.5 MHz, μεταδίδεται με τη χρήση δυαδικής PCM. Στο δέκτη, ο λόγος σήματος προς θόρυβο κβαντοποίησης απαιτείται να είναι τουλάχιστον 55 dB. Θεωρείται ότι διαφορετικά επίπεδα φωτεινότητας της μεταδιδόμενης εικόνας εκφράζονται με διαφορετικά πλάτη του αρχικού σήματος.

- i) Εάν όλα τα επίπεδα φωτεινότητας της εικόνας είναι ισοπίθανα, δηλαδή τα πλάτη των σημάτων $m(t)$ είναι ομοιόμορφα κατανομημένα στο εύρος $(-m_p, m_p)$, να υπολογιστεί ο ελάχιστος αριθμός L των απαιτούμενων επιπέδων κβαντοποίησης. Να επιλεγεί ο κατάλληλος αριθμός L , ώστε αυτός να είναι δύναμη του 2.
- ii) Για την τιμή L που υπολογίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα, να υπολογιστεί ο λόγος σήματος προς θόρυβο του δέκτη στην έξοδο, καθώς και το εύρος ζώνης.
- iii) Εάν απαιτείται αύξηση του SNR κατά 6 dB, ποιες είναι οι νέες τιμές των L και του εύρους ζώνης;

[Λύση](#)

Άσκηση 20:

Ένα αναλογικό σήμα με εύρος ζώνης $W=15$ KHz δειγματοληπτείται με τη χρήση $q \geq 200$ επίπεδα και μεταδίδεται με ένα σήμα M -PCM, όπου $M=2^n$, (με $n=\log_2 M$). Βρείτε τις μέγιστες τιμές των n , h και της συχνότητας δειγματοληψίας f_s , όταν το διαθέσιμο εύρος ζώνης είναι $B_T=50$ KHz.

[Λύση](#)

Άσκηση 21:

Σήματα εύρους ζώνης 4 KHz, 8 KHz και 12 KHz μεταδίδονται μετά από δειγματοληψία που γίνεται με κοινή συχνότητα, η οποία μάλιστα είναι κατά 10% μεγαλύτερη της απαιτούμενης. Η μετάδοση είναι PCM των 8 bits.

- i) Ποια είναι η κοινή συχνότητα δειγματοληψίας;
- ii) Να σχεδιασθεί η διάταξη των σημάτων σε (περιστρεφόμενο) διακόπτη δειγματοληψίας. Ποια είναι η ταχύτητα περιστροφής του διακόπτη.
- iii) Ποια η ψηφιακή παροχή του σήματος PCM σε bps;
- iv) Ποιο το απαιτούμενο εύρος ζώνης καναλιού για την μετάδοση του PCM σήματος; (θεωρητικά και στην πράξη).
- v) Αν χρησιμοποιηθεί roll-off factor $r=0,4$ πόσο είναι το απαιτούμενο εύρος ζώνης καναλιού για την μετάδοση του PCM σήματος;

[Λύση](#)

Άσκηση 22:

Ένα σήμα ομιλίας έχει χρονική διάρκεια 10 δευτερολέπτων. Το σήμα αυτό δειγματοληπτείται με συχνότητα 8 KHz και στη συνέχεια κωδικοποιείται χρησιμοποιώντας την PCM. Ο λόγος σήματος προς θόρυβο κβαντοποίησης είναι ίσος με 40 dB. Να υπολογιστεί ο όγκος του σήματος αυτού (σε bits).

[Λύση](#)

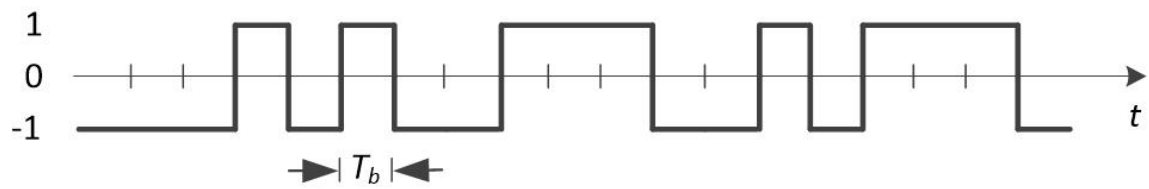
Άσκηση 23:

Ένα σύστημα PCM χρησιμοποιεί ομοιόμορφη κβαντοποίηση και κωδικοποίηση με 7 bit. Ο ρυθμός bit του συστήματος είναι 50×10^6 bits/sec. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εύρους ζώνης, για την οποία λειτουργεί ικανοποιητικά το σύστημα.

[Λύση](#)

Άσκηση 24:

Το παρακάτω σχήμα δείχνει ένα σήμα PCM, του οποίου τα επίπεδα πλάτους +1 V και -1 V χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση των bits 1 και 0, αντίστοιχα. Η κωδική λέξη που χρησιμοποιείται, αποτελείται από 3 bits. Βρείτε το αναλογικό σχήμα (μετά την δειγματοληψία) αυτού του σήματος.



[Λύση](#)

Άσκηση 25:

Βρείτε τον απαιτούμενο SNR ώστε ομιλία περιορισμένη στα 4 KHz, να μεταδίδεται με σύστημα PCM των 8 bits και ρυθμό μετάδοσης 64 kbps.

[Λύση](#)

4. Λύσεις των ασκήσεων

Άσκηση 1

Έχουμε ομοιόμορφη κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας $1/(5-1)=1/4$, αφού όλες οι τιμές είναι μεταξύ 1 και 5.

Από τον ορισμό της μέσης τιμής (ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 5 $\times (1/4)$), προκύπτει ότι $E[X] = 3$.

Η μέση τετραγωνική τιμή είναι το ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΑΠΟ 1 ΜΕΧΡΙ 5 $\times 2(1/4) = 10.333 = E[X^2]$

Διασπορά:

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = E[X^2 - 2X\mu - \mu^2] = E[X^2] - 2E[X]\mu + \mu^2 = E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 = E[X^2] - \mu^2 = E[X^2] - (E[X])^2 = 10.333 - 3 = 7.333$$

Τυπική απόκλιση: $\sigma = \sqrt{7.333} = 2.708$

Ισχύς σε αντίσταση 1 Ohm: 10.333 W (δηλ. ίση με $E[X^2]$).

Άσκηση 2:

i) α) Όταν $S=-3$ σημαίνει ότι ο θόρυβος προστέθηκε σε παλμό $-3V$ (που εκφράζει το bit 0). Επομένως, ο μέσος όρος της τ.μ. R όταν $S=-3$, είναι $\mu=-3$ και η διασπορά $\sigma^2=3$.

β) Όταν $S=+3$ σημαίνει ότι ο θόρυβος προστέθηκε σε παλμό $+3V$ (που εκφράζει το bit 1). Επομένως, ο μέσος όρος της τ.μ. R όταν $S=+3$, είναι $\mu=+3$, και η διασπορά $\sigma^2=3$.

Ουσιαστικά κάνουμε χρήση των εξής ιδιοτήτων της μέσης τιμής και της διασποράς:

- Μέση τιμή, $E[X+c] = E[X]+c$
- Διασπορά, $VAR(c) = 0$
- Διασπορά, $VAR(X+c) = VAR(X)$

Όπου $c =$ σταθερά (π.χ. -3 ή 3) και X τ.μ. (π.χ. ο Γκαουσιανός θόρυβος).

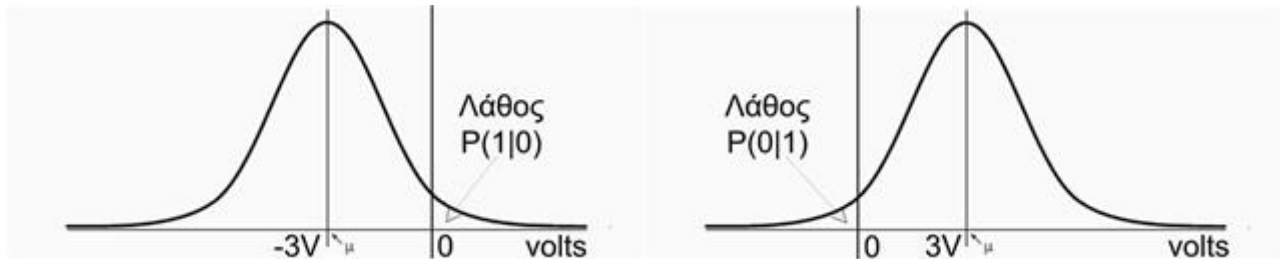
ii) Δεδομένου ότι τα bits 1 και 0 εκπέμπονται με την ίδια πιθανότητα, ο δέκτης είναι "λογικό" να θέσει ως κατώφλι αναγνώρισης του R , την ενδιάμεση τιμή μεταξύ των αναμενομένων τιμών $-3V$ και $+3V$, δηλ. $0 V$. Επομένως, αν ο παλμός είναι θετικός θα εκλαμβάνεται ως $+3V$ (bit 1), ενώ αν είναι αρνητικός ως $-3V$ (bit 0).

iii) Πιθανότητα λάθους είναι η πιθανότητα ο δέκτης να θεωρήσει ότι έλαβε το bit 1, δεδομένου ότι ο πομπός έστειλε το bit 0 (αυτό γίνεται με πιθανότητα $P(0)$), ή να θεωρήσει ότι έλαβε το bit 0, ενώ ο πομπός έστειλε το bit 1 (αυτό γίνεται με πιθανότητα $P(1)$). Στην γλώσσα των πιθανοτήτων η πιθανότητα λάθους διατυπώνεται ως εξής:

$$P_{error} = P(1|0)P(0) + P(0|1)P(1) = P(1|0)*50\% + P(0|1)*50\%$$

Όπου $P(1|0) = P(0|1)$, διότι όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, τα αντίστοιχα εμβαδά της Γκαουσιανής κατανομής είναι λόγω συμμετρίας είναι ίσα. Άρα:

$$P_{error} = P(1|0)*0.5 + P(1|0)*0.5 = P(1|0) = P(0|1)$$



Ας υπολογίσουμε την $P(0|1)$. Λόγω της συμμετρίας της Γκαουσιανής κατανομής, η $P(0|1)$ μπορεί να υπολογισθεί βάσει του σχήματος που ακολουθεί.

Από το σχήμα αυτό λόγω της συμμετρίας της Γκαουσιανής κατανομής, έχουμε ότι:

$$P(0|1) = P(X \geq 6) = \int_{(6)}^{(\infty)} \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Επειδή ολοκληρώματα αυτής της μορφής, που εκφράζουν την πιθανότητα μια μεταβλητή X (που ακολουθεί την Γκαουσιανή κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$), να λάβει τιμή μεγαλύτερη ή ίση με x_0 , $P(X \geq x_0)$, εμφανίζονται συχνά στις τηλεπικοινωνίες, οι τιμές τους έχουν καταχωρηθεί σε πίνακα. Μάλιστα, για τις τιμές αυτές έχει επινοηθεί ειδική συνάρτηση που λέγεται Q-function: $Q(a) = \int_{(a)}^{(\infty)} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Ισχύει: $P(X \geq x_0) = Q((x_0 - \mu) / \sigma) = Q(a)$ όπου $a = ((x_0 - \mu) / \sigma)$

Τελικά, $P(0|1) = P(X \geq 6) = Q((6-3)/\sqrt{3}) = Q(1,732)$

Από τον πίνακα με τις τιμές της Q-function, παίρνουμε $Q(1,732) \approx 0,042$.

Δηλαδή η ζητούμενη πιθανότητα λάθους είναι 4,2%.

Άσκηση 3:

A) ΤΟ ΒΗΜΑ ΚΒΑΝΤΙΣΜΟΥ: $\Delta = 40 / 8 = 5$ Volts

Τα επίπεδα κβαντισμού είναι: [-20,-15), [-15,-10), [-10,-5), [-5,0), [0,5), [5,10), [10,15), [15,20]

ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΒΑΝΤΙΣΜΟΥ: [-4, -3), [-3, -2), [-2, -1), [-1, 0), [0, 1), [1,2), [2,3), [3, 4]

Οι κανονικοποιημένες κβαντισμένες τιμές του PAM: -1,5 +1,5 +3,5 +3,5 +2,5 -1,5 -2,5 -1,5 -1,5

ΤΟ ΣΦΑΛΜΑ ΚΒΑΝΤΙΣΜΟΥ:

$$-1,5 - (-1,22) = -0,28$$

$$1,5 - 1,5 = 0$$

$$3,5 - 3,24 = +0,26$$

$$3,5 - 3,94 = -0,44$$

$$2,5 - 2,2 = +0,3$$

$$-1,5 + 1,1 = -0,4$$

$$-2,5 + 2,26 = -0,24$$

$$-1,5 + 1,88 = +0,38$$

$$-1,5 + 1,20 = -0,3$$

B) [-4, -3), [-3, -2), [-2, -1), [-1, 0), [0, 1), [1,2), [2,3), [3, 4]

111 110 101 100 000 001 010 011

Γ) $SNR = 12\sigma_x^2/\Delta^2 = 12 * 200 / 25 = 96$. Άρα $10 \log 96 = \mathbf{19,82 \text{ dB}}$

ΤΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ ΚΒΑΝΤΙΣΜΟΥ:

$$0,28^2 = 0,0784$$

$$0$$

$$0,26^2 = 0,0676$$

$$0,44^2 = 0,1939$$

$$0,3^2 = 0,09$$

$$0,4^2 = 0,16$$

$$0,24^2 = 0,0576$$

$$0,38^2 = 0,1444$$

$$0,3^2 = 0,09$$

Κανονικοποιημένες τετραγωνικές τιμές PAM:

$$1,22^2 = 1,4884$$

$$1,5^2 = 2,25$$

$$3,24^2 = 10,4976$$

$$3,94^2 = 15,5236$$

$$2,20^2 = 4,84$$

$$1,1^2 = 1,21$$

$$2,26^2 = 5,1076$$

$$1,88^2 = 3,5344$$

$$1,20^2 = 1,44$$

$$\text{SNR} = 45,8916/0,8816 = 52,055 \text{ Άρα } 10 \log 52,055 = \mathbf{17,16 \text{ dB}}$$

Αν θεωρήσουμε γνωστή την ισχύ του σήματος δηλ. 200 W και υπολογίσουμε το σφάλμα κβαντισμού από τις μετρήσεις (μη κανονικοποιημένο), δηλ. $(0,8816/9)^{25} = 2,4489$

$$\text{τότε: } \text{SNR} = 200 / 2,4489 = 81,67 \text{ Άρα } 10 \log 81,67 = \mathbf{19,12 \text{ dB}} \text{ (πολύ κοντά στα } 19,82 \text{ dB).}$$

$$\Delta) \text{ Το } \text{SNR (dB)} = 10 \log(12\sigma_x^2/\Delta^2) \text{ (σχέση 1)}$$

όπου, για ομοιόμορφη κβάντιση σήματος με τιμές από $-X_{\max}$ μέχρι X_{\max} , η διασπορά (δηλ. η ισχύς του σήματος) σ_x^2 υπολογίζεται ως το ολοκλήρωμα από $-X_{\max}$ μέχρι X_{\max} του $x^2/(2X_{\max})$, και προκύπτει:
 $\sigma_x^2 = X_{\max}^2 / 3$

$$\text{Άρα, η (σχέση 1) γίνεται: } \text{SNR (dB)} = 10 \log(4 X_{\max}^2 / \Delta^2) = 10 \log [(2X_{\max})^2 / \Delta^2] = 10 \log M^2 \text{ (σχέση 2).}$$

όπου $M = 2X_{\max}/\Delta$ είναι ο αριθμός των επιπέδων (στρωμάτων) κβαντισμού. Δηλ. με χρήση δυαδικού κώδικα των n bits, $M = 2^n$

$$\text{Άρα, η (σχέση 2) γίνεται: } \text{SNR (dB)} = 10 \log (2^n)^2 = 20 \log 2^n = 20n \log 2 = 20n 0.301 = 6.02 n$$

Επομένως $\text{SNR (dB)} \approx 6n$ που σημαίνει ότι κάθε αύξηση των bits κατά 1, αυξάνει τον SNR κατά 6 dB περίπου.

Άσκηση 4:

$$\text{i) } r_b = 16 \times 40000 = 640000 \text{ bps} = 640 \text{ kbps}, B \geq \frac{1}{2} r_b = 320 \text{ kbps}$$

$$\text{ii) } r = \frac{640 \text{ kbps}}{\log_2 M} \leq 2B = 240 \text{ kbaud}$$

$$\log_2 M \geq 640 / 240 = 2.667 \Leftrightarrow M \geq 2^3 = 8$$

Άσκηση 5:

Θεωρώντας την εμφάνιση στην έξοδο του δέκτη των συμβόλων 1 και 0 με τις υποθέσεις H_1 και H_0 , αντίστοιχα, προκύπτει ότι:

$$H1: x(t) = s(t) + w(t)$$

$$H0: x(t) = w(t)$$

όπου $s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$ και $A_c = (2E_b/N_0)^{1/2}$

Επομένως, το σήμα το οποίο οδηγείται στο μηχανισμό απόφασης του δέκτη θα είναι:

$$y = \int_0^{T_b} x(t)s(t)dt$$

Εάν $y > E_b/2$ τότε η έξοδος του μηχανισμού απόφασης είναι 1, ενώ εάν $y < E_b/2$ η έξοδος είναι 0.

Οι συναρτήσεις πυκνότητας υπό-συνθήκης πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y , η οποία παίρνει τιμές y είναι:

$$f_{Y|0}(y|0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 E_b}} \exp\left(-\frac{y^2}{N_0 E_b}\right)$$

$$f_{Y|1}(y|1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 E_b}} \exp\left(-\frac{(y - E_b)^2}{N_0 E_b}\right)$$

Άρα η μέση πυκνότητα πιθανότητας είναι:

$$\begin{aligned} P_e &= P_0 \int_{E_b/2}^{\infty} f_{Y|0}(y|0)dy + P_1 \int_{-\infty}^{E_b/2} f_{Y|1}(y|1)dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{E_b/2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 E_b}} \exp\left(-\frac{y^2}{N_0 E_b}\right) dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{E_b/2} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 E_b}} \exp\left(-\frac{(y - E_b)^2}{N_0 E_b}\right) dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 E_b}} \int_{E_b/2}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{N_0 E_b}\right) dy = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{E_b / N_0}\right) \end{aligned}$$

Άσκηση 6:

Από τα δεδομένα της άσκησης προκύπτει ότι $T_b = 1/R_b = 10^{-5}$ sec. Η πιθανότητα λάθους στην PAM είναι:

$$P_e = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

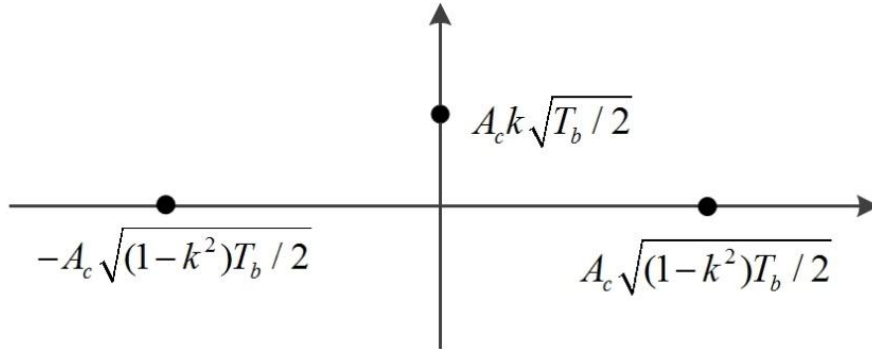
με $E_b = A^2 T_b$. Επομένως, για $P_e = 10^{-6}$, προκύπτει ότι:

$$10^{-6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \Rightarrow E_b = 0.1128$$

Άρα, $A^2 T_b = 0.1128$ ή $A = 106.2$

Άσκηση 7:

i) Το διάγραμμα σήματος-χώρου απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



Παρατηρούμε ότι το παραπάνω διάγραμμα διαφέρει από το αντίστοιχο διάγραμμα ενός συμβατικού συστήματος PSK, καθώς είναι δισδιάστατο (εμφανίζεται ο όρος στον άξονα y). Εάν η παράμετρος k γίνει μηδενική, τότε το παραπάνω διάγραμμα ταυτίζεται με το αντίστοιχο διάγραμμα της συμβατικής PSK.

ii) Στο δέκτη, το σήμα που δημιουργείται και στέλνεται στο μηχανισμό απόφασης είναι το παρακάτω:

$$y = \pm \frac{A_c}{2} \sqrt{1-k^2} T_b + \int_0^{T_b} w(t) \cos(2\pi f_c t) dt$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με αυτή που ακολουθείται στο συμβατικό PSK για τον υπολογισμό της πιθανότητας λάθους, προκύπτει η ζητούμενη πιθανότητα.

Άσκηση 8:

Καθώς μελετάται ο διαμορφωτής $\pi/4$ QPSK, θα πρέπει να ληφθούν υπόψη οι 8 πιθανές καταστάσεις φάσης του διαμορφωτή:

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(i\pi/4) \cos(2\pi f_c t) - \sqrt{\frac{2E}{T}} \sin(i\pi/4) \sin(2\pi f_c t)$$

Επομένως, στην παραπάνω περίπτωση οι καταστάσεις φάσης χωρίζονται σε 2 ομάδες QPSK, οι οποίες μετατοπίζονται κατά $\pi/4$ η μία σε σχέση με την άλλη. Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν οι ζητούμενες δύο συναρτήσεις.

Άσκηση 9:

Για την περίπτωση της BPSK ισχύει:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right) \Rightarrow 10^{-4} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}} \right) \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} \approx 7, \quad \text{χρησιμοποιώντας την προσέγγιση}$$

$$\operatorname{erfc}(x) \approx \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}x}$$

Επομένως, η ενέργεια ανά bit είναι $E_b=3.5 \times 10^{-10}$ W.

Για την περίπτωση της DPSK, ισχύει:

$$P_e = \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{E_b}{N_0} \right) \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} \approx 8.5$$

Επομένως, η ενέργεια ανά bit είναι $E_b=4.3 \times 10^{-10}$ W.

Άσκηση 10:

Το λαμβανόμενο σήμα είναι:

$$s(t) = \pm g_T(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi) + n(t)$$

Ενώ το σήμα στην έξοδο του PLL είναι:

$$y(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g_t(t) \cos(2\pi f_c t + \hat{\varphi})$$

Η ετεροσυσχέτιση αυτών των δύο σημάτων είναι:

$$\begin{aligned} \int_0^T s(t)y(t)dt &= \pm \sqrt{\frac{2}{E_g}} \int_0^T g_T^2(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi) \cos(2\pi f_c t + \hat{\varphi}) dt + \int_0^T n(t) \sqrt{\frac{2}{E_g}} g_t(t) \cos(2\pi f_c t + \hat{\varphi}) dt = \\ &\pm \sqrt{\frac{2}{E_g}} \int_0^T \frac{g_T^2(t)}{2} (\cos(2\pi 2f_c t + \varphi + \hat{\varphi}) + \cos(\varphi + \hat{\varphi})) dt + n = \\ &\pm \sqrt{\frac{2}{E_g}} \cos(\varphi + \hat{\varphi}) + n \end{aligned}$$

όπου n είναι η τυχαία γκαουσιανή μεταβλητή με μέση τιμή 0 και διασπορά $N_0/2$.

Έστω ότι μεταδίδεται το σήμα $s(t) = +g_T(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi)$. Η πιθανότητα λάθους θα είναι:

$$P(\text{error} | s_1(t)) = P\left(\sqrt{\frac{2}{E_s}} \cos(\varphi - \hat{\varphi}) < 0\right) =$$

$$Q\left(\sqrt{\frac{E_s \cos^2(\varphi - \hat{\varphi})}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s \cos^2(\varphi - \hat{\varphi})}{N_0}}\right)$$

όπου $Q(x)$ είναι η Q-function του x και $E_s = E_b/2$ είναι η ενέργεια του σήματος. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η σχέση του SNR με τη διαφορά $(\varphi - \hat{\varphi})$ είναι:

$$SNR = -10 \log(\cos^2(\varphi - \hat{\varphi}))$$

Επομένως, εάν $(\varphi - \hat{\varphi}) = 45^\circ$, οι απώλειες λόγω αυτού του σφάλματος είναι:

$$SNR = -10 \log(\cos^2(45^\circ)) = 3.01 \text{ dB}$$

Άσκηση 11:

Και στις δύο διαμορφώσεις ισχύουν τα παρακάτω:

$$\text{Διάρκεια bit: } T_b = \frac{1}{2.5 \times 10^6} = 0.4 \mu \text{ sec}$$

$$\text{Ενέργεια σήματος ανά bit: } E_b = \frac{1}{2} A_c^2 T_b = 2 \times 10^{-19} \text{ J}$$

i) Σύμφωνο BFSK:

Η μέση πιθανότητα λάθους είναι:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{5}) \approx 85 \times 10^{-5}, \quad \text{χρησιμοποιώντας την προσέγγιση}$$

$$\operatorname{erfc}(x) \approx \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi} x}$$

ii) Μη σύμφωνο BFSK:

Η μέση πιθανότητα λάθους είναι:

$$P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right) \approx 337 \times 10^{-5},$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ένα σημαντικό πλεονέκτημα της σύμφωνης διαμόρφωσης, καθώς η μη σύμφωνη BPSK έχει σχεδόν 4 φορές μεγαλύτερη πιθανότητα λάθους, σε σχέση με την σύμφωνη BPSK.

Άσκηση 12:

Εφόσον αποστέλλεται το σήμα: $u_0(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi f_c t)$, $0 \leq t \leq T$

Τότε στο δέκτη λαμβάνεται το σήμα: $r(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi f_c t + \varphi) + n(t)$

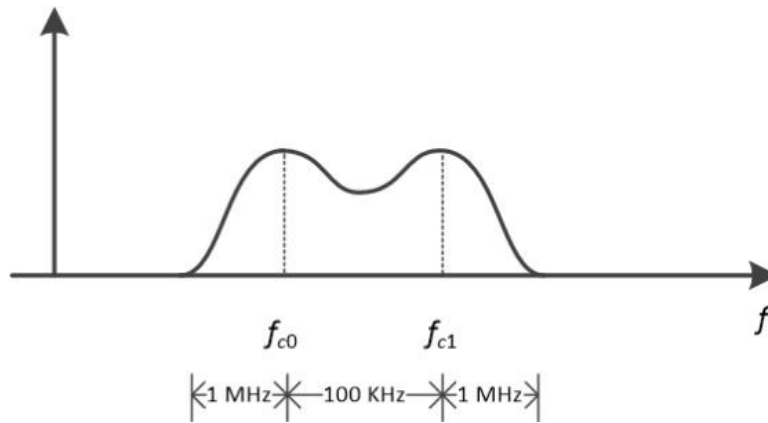
Στην αποδιαμόρφωση σύμφωνης φάσης ενός σήματος M -FSK, το λαμβανόμενο σήμα συσχετίζεται με κάθε ένα από M πιθανά λαμβανόμενα σήματα της μορφής $\cos(2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t + \hat{\varphi}_m)$, όπου $\hat{\varphi}_m$ είναι η εκτίμηση της φάσης του φορέα. Το αποτέλεσμα της συσχέτισης για το m -th σήμα είναι:

$$\begin{aligned} r_m &= \int_0^T r(t) \cos(2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t + \hat{\varphi}_m) dt = \\ &= \int_0^T \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi f_c t + \varphi) \cos(2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t + \hat{\varphi}_m) dt + \int_0^T n(t) \cos(2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t + \hat{\varphi}_m) dt = \\ &= \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \int_0^T \frac{1}{2} (\cos(2\pi 2f_c t + 2\pi m \Delta f t + \hat{\varphi}_m + \varphi) + \cos(2\pi m \Delta f t + \hat{\varphi}_m - \varphi)) dt + n = \\ &= \sqrt{\frac{E_s}{2T}} \int_0^T (\cos(2\pi m \Delta f t + \hat{\varphi}_m - \varphi)) dt + n \end{aligned}$$

όπου n είναι τυχαία γκαουσιανή μεταβλητή με μέση τιμή 0 και διασπορά $N_0/2$.

Άσκηση 13:

- i) Σήματα βασικής ζώνης με πολική σηματοδότηση με παλμούς πλήρους πλάτους και ρυθμό μετάδοσης 1 Mbit/sec απαιτούν εύρος ζώνης 1 MHz. Στην περίπτωση της BPSK, το εύρος ζώνης διπλασιάζεται, επομένως είναι 2 MHz.
- ii) Η FSK μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα 2 σημάτων ASK, όπου το καθένα χρησιμοποιεί 2 MHz (για ρυθμό μετάδοσης 1 Mbit/sec). Αντιστοιχίζοντας τις δύο συχνότητες f_{c0} και f_{c1} της BFSK στις φέρουσες συχνότητες των 2 σημάτων ASK, και λαμβάνοντας υπόψη και τη διαφορά συχνοτήτων, τότε το συνολικό εύρος ζώνης είναι $2 \text{ MHz} + 100 \text{ KHz} = 2.1 \text{ MHz}$, όπως απεικονίζεται και στο παρακάτω σχήμα.



Άσκηση 14:

i) PSK 4 φάσεων:

Θεωρώντας τον παράγοντα rolloff α , ο ρυθμός συμβόλου είναι:

$$\frac{1}{2T}(1+\alpha) = 50000$$

Οπότε,

$$\frac{1}{T} = \frac{10^5}{(1+\alpha)}$$

όπου $W=10^5$ Hz είναι το εύρος ζώνης του καναλιού. Άρα, ο ρυθμός μετάδοσης είναι:

$$\frac{2}{T} = \frac{2 \times 10^5}{(1+\alpha)} \text{ bits/sec}$$

ii) Μη σύμφωνη BPSK

Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούνται 2 συχνότητες με διαφορά $1/T$, όπου $1/T$ είναι ο ρυθμός συμβόλου. Επομένως,

$$f_1 = f_c - \frac{1}{2T}$$

$$f_2 = f_c + \frac{1}{2T}$$

όπου f_c είναι η συχνότητα του φορέα στο κέντρο της ζώνης του καναλιού. Άρα

$$\frac{1}{2T} = 50000 \Rightarrow \frac{1}{T} = 10^5 \text{ bits/sec}$$

iii) FSK με μη σύμφωνη ανάκτηση και χρήση 4 συχνοτήτων:

Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούνται 4 συχνότητες με διαφορά $1/T$. αυτές οι συχνότητες θα πρέπει να είναι:

$$f_1 = f_c - \frac{1.5}{2T}, f_2 = f_c - \frac{1}{2T}, f_3 = f_c + \frac{1}{2T}, f_4 = f_c + \frac{1.5}{T}$$

όπου f_c είναι η συχνότητα του φορέα. Άρα $1/2T=25000$ ή $1/T=50000$, ο οποίος είναι ο ρυθμός συμβόλου. Καθώς κάθε σύμβολο αποτελείται από 2 bits, ο ρυθμός μετάδοσης είναι 10^5 bits/sec.

Άσκηση 15:

Για την περίπτωση του 16-PSK, η πιθανότητα λάθους δίνεται από τη σχέση:

$$P_e = \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E}{N_0}} \sin(\pi/16) \right) \Rightarrow 10^{-3} = \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E}{N_0}} \sin(\pi/16) \right) \Rightarrow \frac{E}{N_0} \approx 142 = 21.5\text{dB}$$

Ενώ για την περίπτωση του 16-QAM, η πιθανότητα λάθους θα είναι:

$$P_e = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{16}} \right) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3E_{av}}{2(16-1)N_0}} \right) \Rightarrow 10^{-3} = \frac{3}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_{av}}{10N_0}} \right) \Rightarrow \frac{E}{N_0} \approx 58 = 17.6\text{dB}$$

Επομένως, ένα σύστημα 16-PSK απαιτεί 21.5-17.6=3.9 dB περισσότερη ενέργεια συμβόλου για να επιτευχθεί η ίδια πιθανότητα λάθους 10^{-3} . Ωστόσο, αυτό το πλεονέκτημα της 16-QAM επιτυγχάνεται σε γραμμικό μόνο κανάλι.

Άσκηση 16:

Το εύρος ζώνης ενός 256-QAM είναι:

$$B_{256} = \frac{2R_b}{\log_2 256} = \frac{2(1/T_b)}{8} = \frac{1}{4T_b}$$

Ομοίως, για την περίπτωση του 64-QAM, προκύπτει ότι:

$$B_{64} = \frac{2R_b}{\log_2 64} = \frac{2(1/T_b)}{6} = \frac{1}{3T_b}$$

Επομένως, η μείωση στο εύρος ζώνης είναι:

$$\frac{1}{3T_b} - \frac{1}{4T_b} = \frac{1}{12T_b}$$

Η μέση ενέργεια για την περίπτωση του 256-QAM είναι:

$$E_{256} = \frac{2(256-1)E_0}{3} = 170E_0$$

Ενώ για την περίπτωση του 64-QAM:

$$E_{64} = \frac{2(64-1)E_0}{3} = 42E_0$$

Επομένως, η αύξηση της μέσης ενέργειας είναι $128E_0$, ενώ η σχετική μείωση είναι:

$$10 \log \left(\frac{170E_0}{42E_0} \right) \approx 6.072 \text{ dB}$$

Άσκηση 17:

Καθώς η συχνότητα Nyquist του σήματος ομιλίας είναι $2 \times 3.4 = 6.8$ KHz, ο ρυθμός δειγματοληψίας του διαμορφωτή Δέλτα θα είναι $10 \times 6.8 = 68$ KHz.

Για την εξάλειψη του φαινομένου "slope distortion" θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$\frac{\Delta}{T_s} \geq \max \left| \frac{dm(t)}{dt} \right|$$

Θεωρώντας το σήμα ελέγχου το $m(t) = A_m \sin(2\pi f_m t)$, προκύπτει ότι $\frac{dm(t)}{dt} = 2\pi A_m f_m \cos(2\pi f_m t)$

$$\text{οπότε: } \left| \frac{dm(t)}{dt} \right|_{\max} = |2\pi A_m f_m \cos(2\pi f_m t)|_{\max} = |2\pi A_m f_m|_{\max}$$

από αυτή την σχέση και την παραπάνω ανίσωση προκύπτει ότι:

$$\frac{\Delta}{T_s} \geq |2\pi A_m f_m|_{\max} \Rightarrow |A_m|_{\max} = \frac{\Delta}{T_s 2\pi f_m} = 1.08 \text{ V}$$

Άσκηση 18:

i) Από την επίλυση της άσκησης 18 προκύπτει ότι:

$$\frac{\Delta}{T_s} \geq 2\pi A_m f_m \Rightarrow A_m \leq \frac{\Delta}{T_s 2\pi f_m} \Rightarrow \Delta \geq \frac{A_m 2\pi f_m}{f_s} = 0.126 \text{ V}$$

ii) Η μέση ισχύς είναι $\frac{A_m^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta f_s}{2\pi f_m} \right)^2$, η οποία για την μέγιστη τιμή του Δ θα παίρνει την τιμή: 0.5032.

Άσκηση 19:

Ισχύει $S/N = 55$ dB ή $S/N = 316200$

Καθώς θεωρείται ομοιόμορφη κατανομή για τα πλάτη των σημάτων, η μέση τιμή τους είναι:

$$\bar{m}^2 = \frac{1}{2m_p} \int_{-m_p}^{m_p} m^2 dm = \frac{1}{3} m_p$$

i) Από τα παραπάνω δεδομένα ισχύει:

$$316200 = 3(2)^{2n} \left(\frac{\bar{m}^2}{m_p^2} \right) = 2^{2n} \Rightarrow n = 9.135,$$

Επομένως, καθώς θα πρέπει το n να είναι ακέραιος, επιλέγεται $n=10$ και $L=1024$.

ii) Καθώς $L=1024$, προκύπτει ότι ο λόγος σήματος προς θόρυβο είναι:

$$\frac{S}{N_0} = 3(2)^{20} \frac{1}{3} = 1.048576 \times 10^6 = 60.16\text{dB}$$

Επίσης, θεωρώντας διπολική σηματοδοσία, το εύρος ζώνης θα είναι:

$$B_{PCM} = 2nB = 90 \text{ MHz}$$

iii) Αν αυξηθεί το SNR κατά 6 dB, τότε ακολουθώντας την ίδια διαδικασία προκύπτει ότι $n=11$.

Σε αυτή την περίπτωση το νέο εύρος ζώνης θα είναι $B_{PCM} = 2nB = 99 \text{ MHz}$

Άσκηση 20:

Ισχύει $\frac{1}{2} \nu f_s \leq B_T$ και $f_s \geq 2W$, οπότε συνδυάζοντας αυτές τις δύο σχέσεις προκύπτει ότι:

$\nu \leq \frac{2B_T}{2W} = 3.34$, άρα θα πρέπει να ισχύει $\nu=3$. Η συχνότητα δειγματοληψίας θα περιορίζεται:

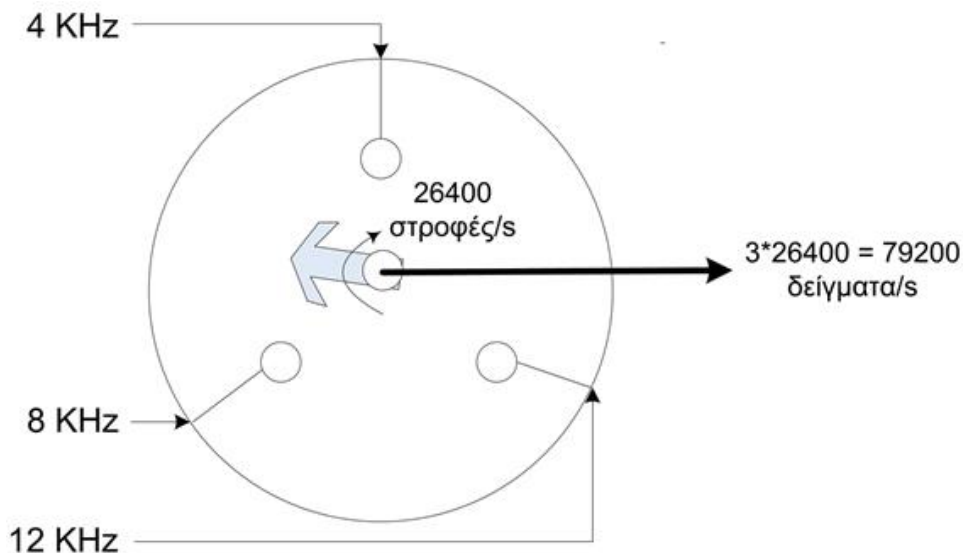
$$f_s \leq \frac{2B_T}{\nu} = 33.4 \text{ kHz}$$

Ισχύει $q=M^3 \geq 200$ και $M=2^n$, άρα από αυτές τις δύο σχέσεις προκύπτει ότι $n=3$.

Άσκηση 21:

A) Ως κοινή συχνότητα δειγματοληψίας, επιλέγεται αυτή που αντιστοιχεί στο σήμα με το μεγαλύτερο εύρος ζώνης: $2 \cdot 12 \cdot 1,1 = 26,4 \text{ KHz}$

B) $26,4 \text{ cycles/s}$ είναι η ταχύτητα περιστροφής του διακόπτη.



Γ) Ο διακόπτης σε μία περιστροφή θα παίρνει 3 δείγματα, άρα η συχνότητα $3 \cdot 26,4 = 79,2$ KHz

Παροχή PCM = $79200 \text{ δείγματα/s} \cdot 8 \text{ bits/δείγμα} = 633600 \text{ bps}$

Δ) $v/f = 2/(1+r) = (\text{ψηφιακή παροχή})/(\text{εύρος ζώνης B}) \rightarrow B = 633600 (1+r) / 2 \text{ Hz}$

Άρα θεωρητικά, όταν $r = 0 \rightarrow B = 316,8 \text{ KHz}$

Στην πράξη, όταν $r = 1 \rightarrow B = 633,6 \text{ KHz}$

Όταν $r = 0,4 \rightarrow B = 633,6 \cdot 0,7 \text{ KHz} = 443,52 \text{ KHz}$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

- Για το PCM σύστημα με συχνότητα δειγματοληψίας f_s , κωδικοποίηση με n bits, έχουμε:
 - $BW = [(1+r)/2] \cdot f_s \cdot n \text{ Hz} = [(1+r)/2] \cdot R \text{ Hz}$
 - $r = \text{"rolloff factor"} , 0 \leq r \leq 1,$
- Ειδικές περιπτώσεις:
 - $r = 0$, είναι απλά ο παλμός $\text{sinc}(\cdot)$
 - $r = 1$, είναι η μέγιστη δυνατή τιμή της παραμέτρου r και το φάσμα παίρνει την μορφή υπερυψωμένου συνημίτονου
 - $r = 0.35$, είναι η τιμή που χρησιμοποιείται στα Βόρειο-Αμερικανικά ψηφιακά συστήματα κινητής τηλεφωνίας NA-TDMA και CDMA (πρότυπο IS-54/136).

Άσκηση 22:

Καθώς ο λόγος σήματος προς θόρυβο κβαντοποίησης είναι 40 dB, απαιτούνται 7 bits ανά δείγμα. Επομένως, ο συνολικός αριθμός δειγμάτων είναι $8000 \times 10 = 80000$ δείγματα, και αφού κάθε δείγμα αναπαριστάται με 7 bits, απαιτούνται συνολικά $7 \times 80000 = 560000$ bits = 560 kbits.

Άσκηση 23:

Έστω το εύρος ζώνης του μηνύματος είναι W . Επομένως, με δειγματοληψία του μηνύματος με ρυθμό Nyquist και χρησιμοποιώντας κωδικοποίηση των R bits, προκύπτει ότι η διάρκεια κάθε bit είναι:

$$T_b = \frac{T_s}{R} = \frac{1}{2WR} \Leftrightarrow \frac{1}{T_b} = 2WR$$

Επομένως, η μέγιστη τιμή για το εύρος ζώνης είναι:

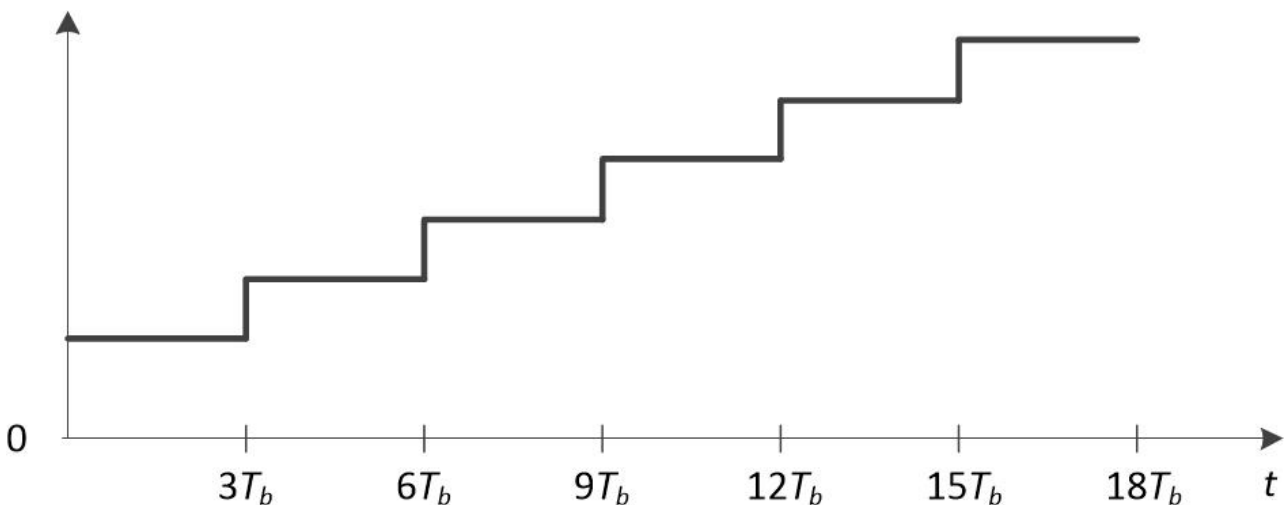
$$W_{\max} = \frac{50 \times 10^6}{2 \times 7} = 3.57 \times 10^6 \text{ Hz} = 3.57 \text{ MHz}$$

Άσκηση 24:

Οι κωδικές λέξεις, οι οποίες μεταδίδονται είναι:

t/T_b	Λέξη
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110

Και το αναλογικό σήμα, μετά την δειγματοληψία, απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



Άσκηση 25:

Κανάλι φωνής 4 KHz, απαιτεί συχνότητα δειγματοληψίας 8 KHz και κωδικοποιείται με PCM 8 bits. Οπότε έχουμε ρυθμό μετάδοσης 64 Kbps.

Αν $r = 0$, θεωρητικά απαιτείται **B= 32 KHz**.

Αν θέλουμε **64 Kbps** ρυθμό μετάδοσης, τότε:

$$64 \text{ Kbps} = 32 \log_2 (1+\text{SNR}) \rightarrow 2 = \log_2(1+\text{SNR}) \rightarrow 4 = 1+ \text{SNR} \rightarrow \text{SNR} = 3 \text{ (OXI ΣΕ DB)}$$

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, **Ιωάννης Βαρδάκας, 2015**.

Ιωάννης Βαρδάκας. «Συστήματα Επικοινωνιών, Ασκήσεις για τις ενότητες 8 –13: Παλμοκωδική Διαμόρφωση – Ψηφιακή Μετάδοση». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/courses/EE789/> .

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό δεν κάνει χρήση εικόνων/σχημάτων/διαγραμμάτων/φωτογραφιών ή πινάκων από έργα τρίτων:

Πηγές:

[1] B. P. Lathi, *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 3rd edition, Oxford University press, 1998.

[2] S. Haykin, *Communication Systems*, 4th edition, John Wiley & Sons, 2001.

[3] J. G. Proakis and M. Salehi, *Communication Systems Engineering*, 2nd edition, Prentice Hall, 2002.

[4] Γ. Καραγιαννίδης, *Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα*, 2^η έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλα, 2010.

[5] Γ. Κοκκινάκης, *Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα*, 1^η έκδοση, Εκδόσεις Αθανασόπουλος, 1998.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

