Η Πολυεδρική Προσέγγιση στην Ανάλυση και Σύνθεση Συστημάτων Ελέγχου

Εργαστήριο Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου

Η Τετραγωνική Προσέγγιση

- Ευκλείδια Απόσταση (Euclidean distance)
- Ευκλείδια νορμ (Euclidean norm)
- Νορμ L_2 (L_2 norm)
- Τετραγωνικός δείκτης επιδόσεως (Quadratic performance index)

Η Πολυεδρική Προσέγγιση

•«Απειρη» απόσταση (Infinity distance)

•«Απειρη» νορμ (Infinity norm)

•Νορμ $L_{\propto}$ ($L\propto$ norm)

•«Απειρος» δείκτης επδόσεως (Infinity performance index)

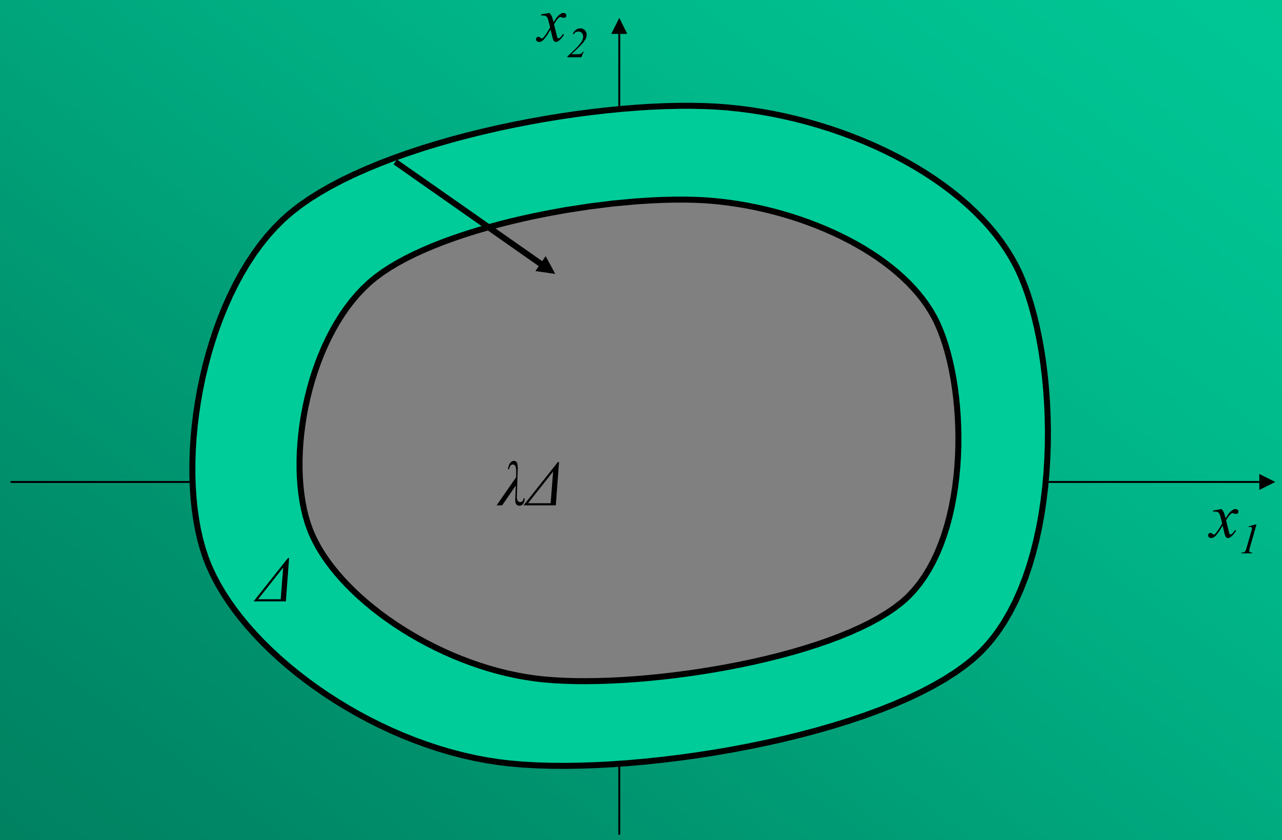
Ευστάθεια

$S: \quad x(t+1)=Ax(t) \qquad x \in \Re^n$

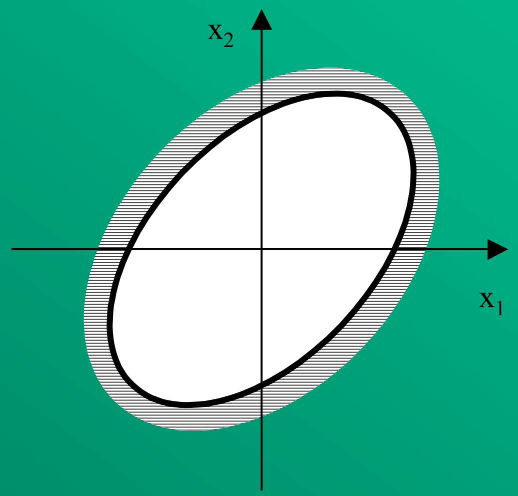
•Το σύνολο $\Delta \subset \Re^n$ είναι *θετικώς αμετάβλητο σύνολο* του συστήματος *S* αν για όλες τις αρχικές καταστάσεις $x_0 \in \Delta$ οι αντίστοιχες λύσεις $x(t;x_0) \in \Delta$ για όλα τα t

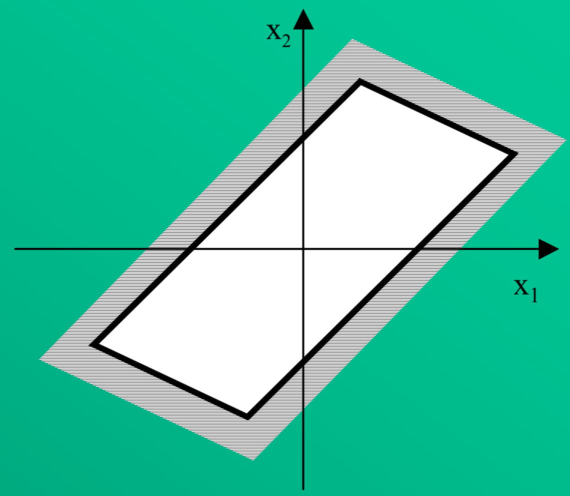
• Το σύνολο $\Delta \subset \Re^n$ είναι *συστολικό σύνολο* του συστήματος S αν υπάρχει $\lambda < 1$ τέτοιο ώστε όλες για όλες τις οι αρχικές καταστάσεις $x_0 \in \Delta$ οι αντίστοιχες λύσεις ικανοποιούν την σχέση $x(t;x_0) \in \lambda\Delta$ για όλα τα t

Θετικώς αμετάβλητα και συστολικά σύνολα



Ελλειψοειδή και Παραλληλεπίπεδα





$$D(P,c)=\left\{x\in R^n : x^T Px\le c\right\}$$

or

$$D(P,c)=\left\{x\in R^n : v(x)\le c\right\}$$

$$v(x)=x^T Px$$

$$R(G,w)=\left\{x\in R^n : -w\le Gx\le w\right\}$$

or

$$R(G,w)=\left\{x\in R^n : v(x)\le 1\right\}$$

$$v(x)=\max_i\left\{\frac{|(Gx)_i|}{w_i}\right\}$$

Τετραγωνική ευστάθεια

Συναρτήσεις Lyapunov

$$v(x) = x^T P x$$

Θετικώς αμετάβλητα σύνολα

$$D(P, c) = \left\{ x \in R^n : x^T P x \leq c \right\}$$

Συνθήκες υπό μορφή μητρικών εξισώσεων

$$A^T P A - P = -Q$$

Q: θετικώς ορισμένη

Συνθήκες φάσματος

$$\mu_i^2 + \sigma_i^2 < 1$$

Πολυεδρική ευστάθεια

Συναρτήσεις Lyapunov

$$v(x) = \max_i \left\{ \frac{\left|(Gx)_i\right|}{w_i} \right\}$$

Θετικώς αμετάβλητα σύνολα

$$R(G,w) = \left\{ x \in R^n : -w \le Gx \le w \right\}$$

Συνθήκες υπό μορφή μητρικών εξισώσεων

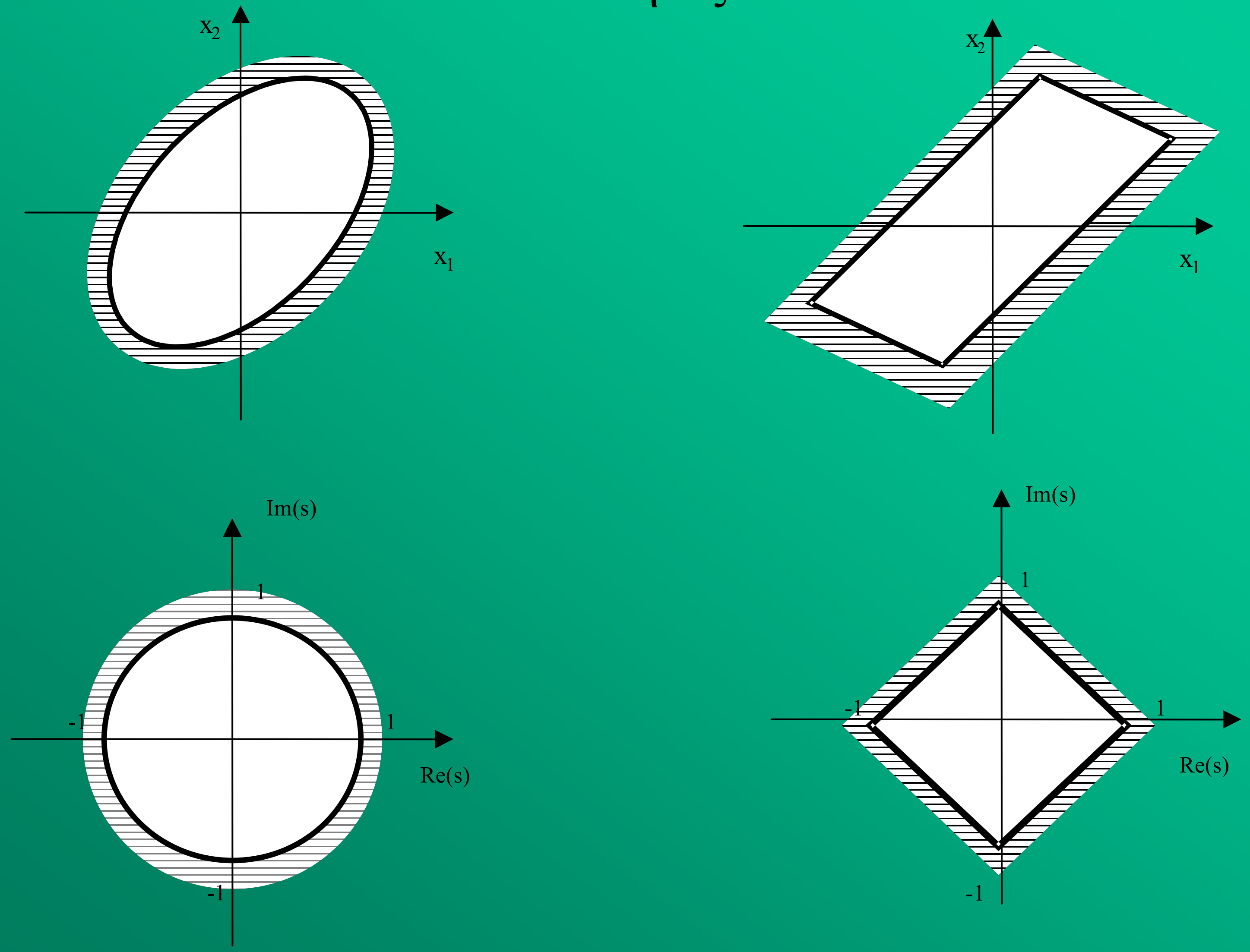
$$GA = HG$$

$$|H|w \le w$$

Συνθήκες φάσματος

$$|\mu_i| + |\sigma_i| < 1$$

Θετική αμεταβλητότητα και φασματικές ιδιότητες



Θετική αμεταβλητότητα πολυεδρικών συνόλων

$$S(G,w) = \left\{ x \in R^n : Gx \le w \right\}$$

$$v(x) = \max_i \left\{ \frac{(Gx)_i}{w_i} \right\}$$

Το πολυεδρικό σύνολο $S(G,w)$ είναι ένα θετικώς αμετάβλητο σύνολο του συστήματος S αν κα μόνο αν υπάρχει μήτρα H τέτοια ώστε

$$GA = HG$$

$$Hw \le w$$

$$H \ge 0$$

Το Πρόβλημα Ελέγχου με Περιορισμούς

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

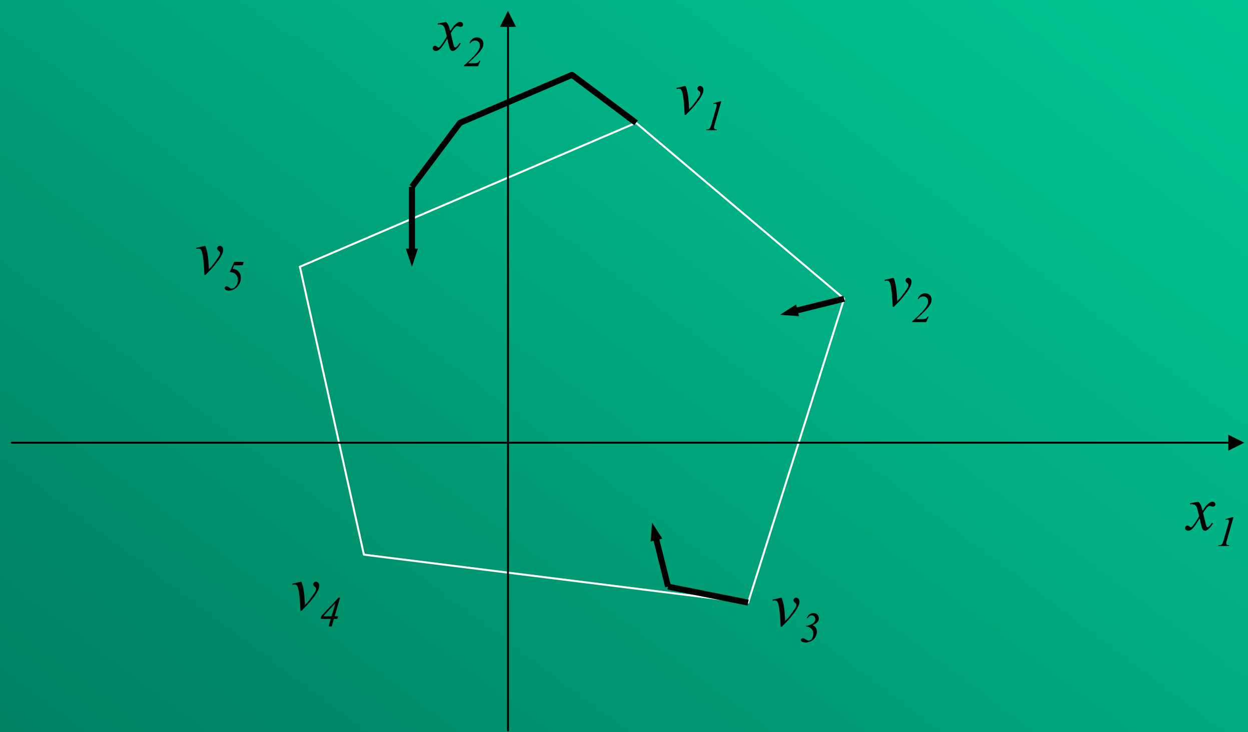
•Περιορισμοί στις μεταβλητές ελέγχου $Du(t) \leq \rho$

Ειδική περίπτωση $-\rho \leq u(t) \leq \rho$

Περιορισμοί στις μεταβλητές καταστάσεως $Cx(t) \leq d$

• Περιοχή ελκτικότητας $Gx_0 \leq w$

Συνθήκες ύπαρξης λύσης (γεωμετρική μορφή)



Όπου v_i είναι οι κορυφές του πολυέδρου $S(G,w)$

Συνθήκες ύπαρξης (αλγεβρική μορφή)

Υπάρχει λύση στο πρόβλημα ελέγχου με περιορισμούς αν υπάρχει χρονικός ορίζοντας T τέτοιος ώστε

$$x(t+1;v_i) = Ax(t;v_i) + Bu(t,v_i) \qquad t = 0,1,\ldots,T-1$$

όπου $\quad x(0,v_i) = v_i$

$$Du(t;v_i) \le \rho \qquad t = 0,1,\ldots,T-1$$

$$Cx(t;v_i) \le d \qquad t = 1,2,\ldots,T$$

$$Gx(T;v_i) \le w$$

Μία προσέγγιση σχεδιασμού

$$\min_{u(t;v_i),x(t;v_i),\varepsilon_i} \{\varepsilon_i\}$$

$$x(t+1;v_i) = Ax(t;v_i) + Bu(t,v_i) \qquad t = 0,1,\ldots,T-1$$

$$x(0,v_i) = v_i$$

$$Du(t;v_i) \le \rho \qquad t = 0,1,\ldots,T-1$$

$$Cx(t;v_i) \le d \qquad t = 1,2,\ldots,T$$

$$Gx(T;v_i) \le \varepsilon_i w$$

Το Γραμμικό Πρόβλημα Ρύθμισης με Περιορισμού (ΓΠΡΠ)

Δοθέντων

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

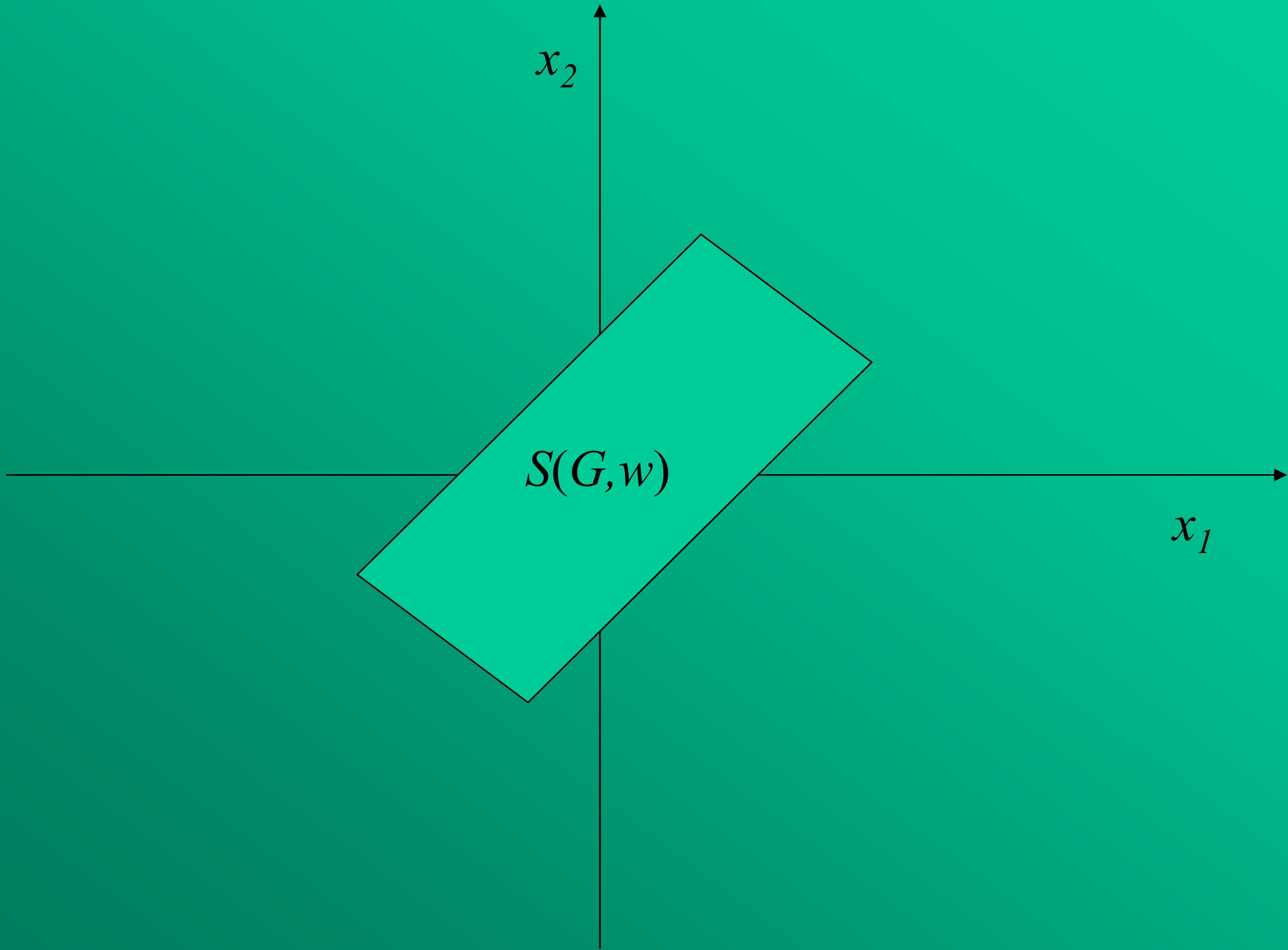
$$Du(t) \le \rho$$

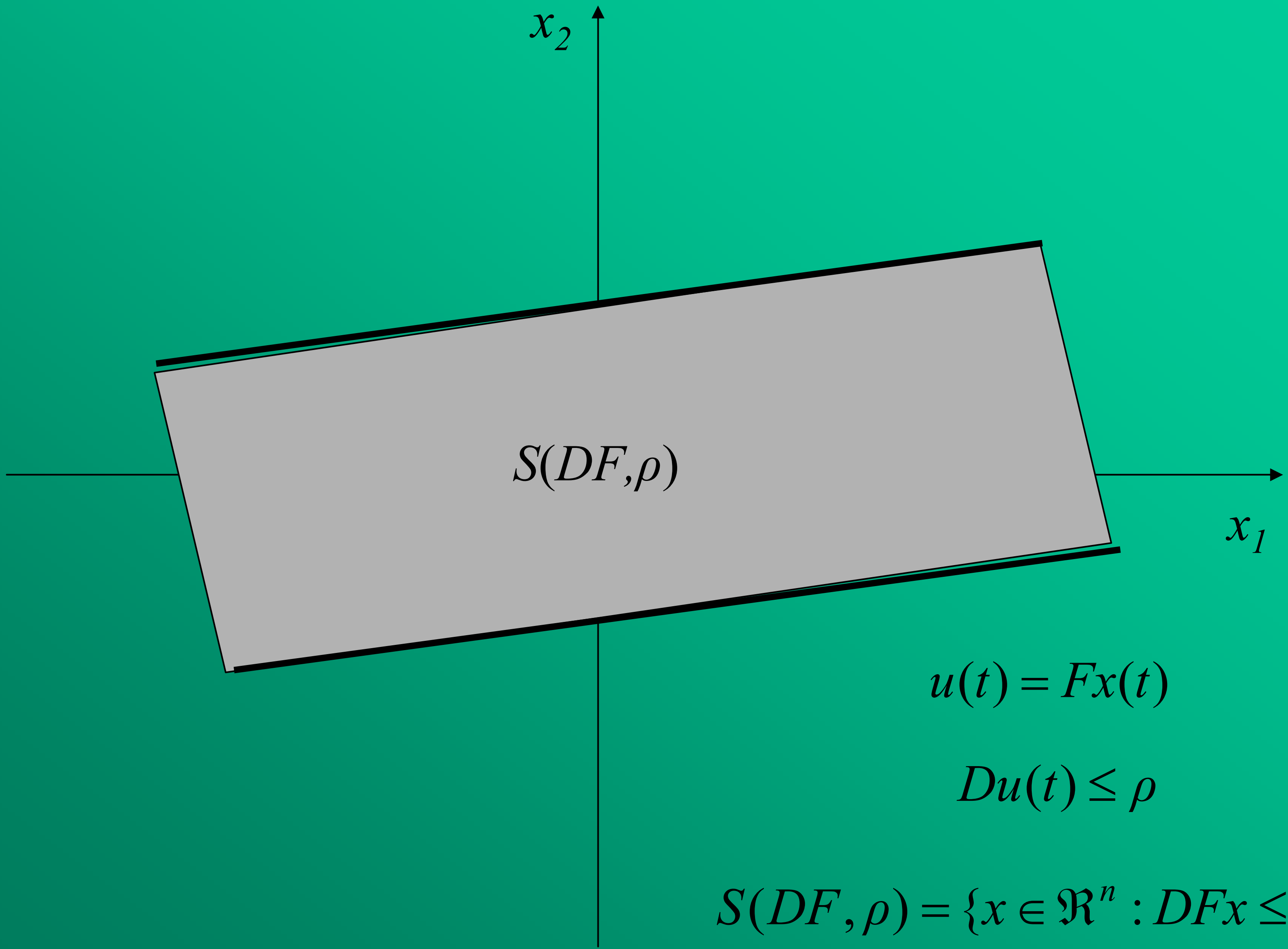
$$Cx(t) \le d$$

$$Gx_0 \le w$$

Να προσδιορισθεί ένας γραμμικός νόμος με ανατροφοδότηση καταστάσεως $u(t)=Fx(t)$ ώστε το σύνολο $S(G,w)$ να είναι μία περιοχή ελκτικότητας του συστήματος

$$x(t+1) = (A+BK)x(t)$$

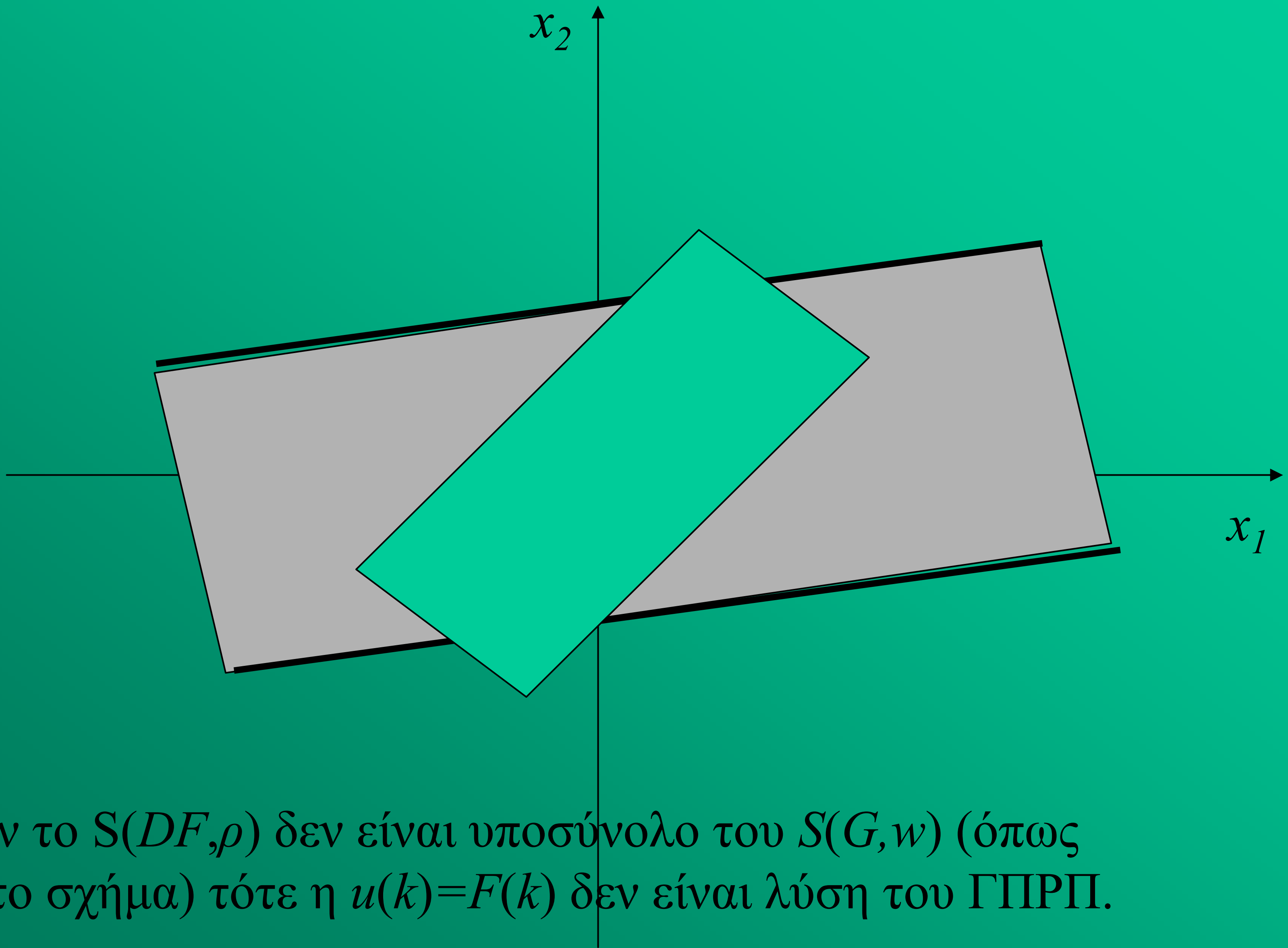

x_2
$S(G,w)$
x_1



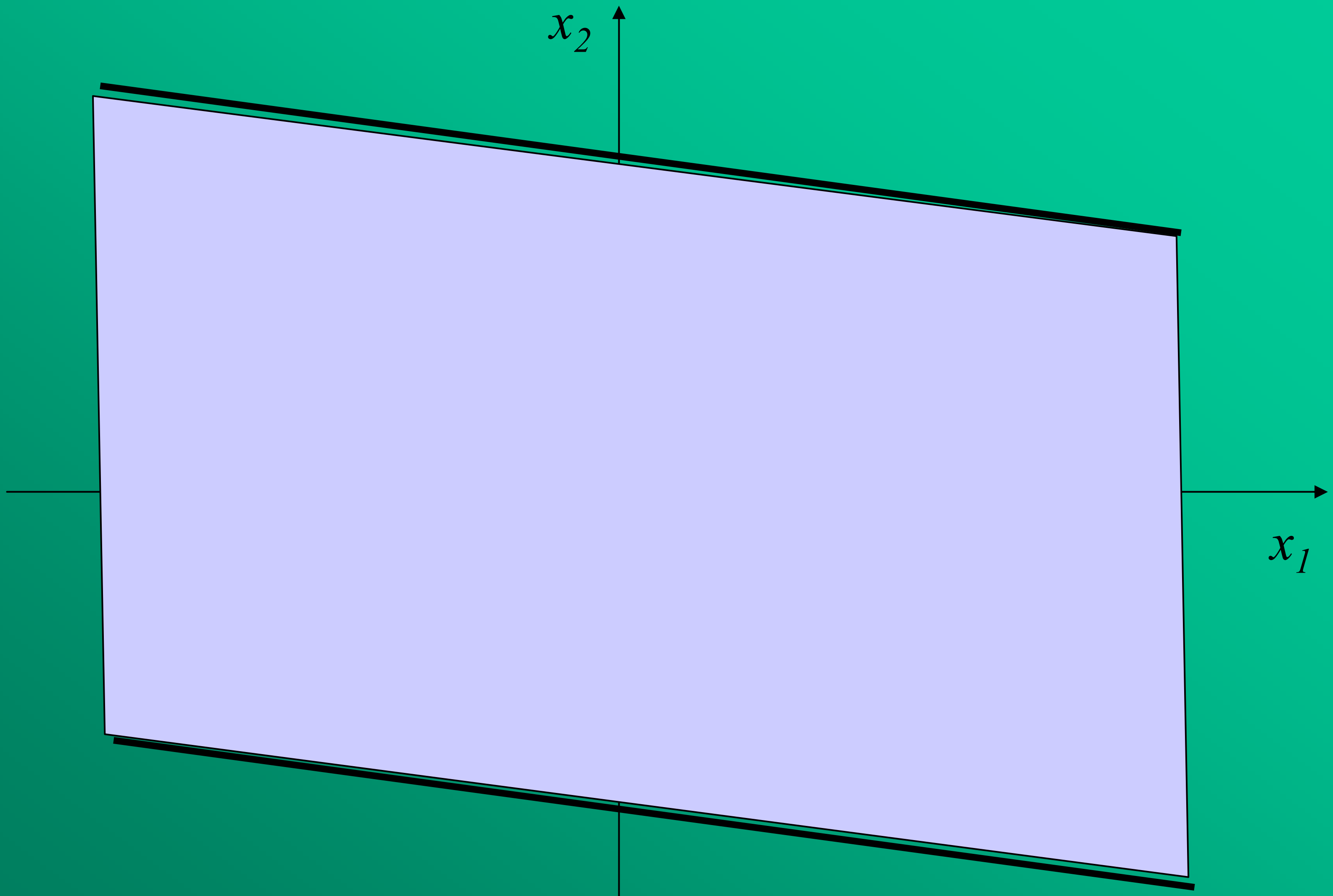
$$u(t) = Fx(t)$$

$$Du(t) \leq \rho$$

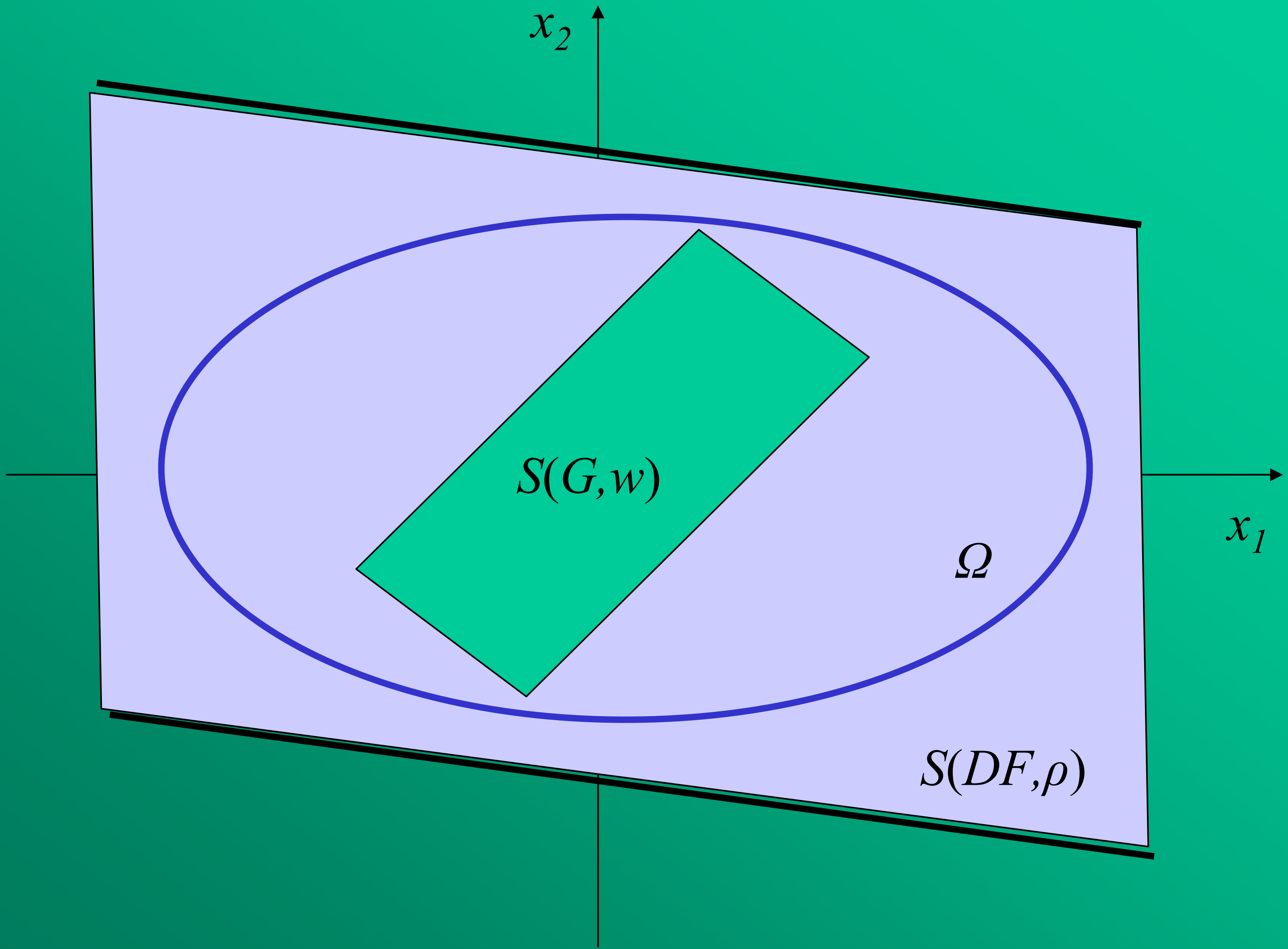
$$S(DF,\rho) = \{x \in \Re^n : DFx \leq \rho\}$$



Αν το S(DF,ρ) δεν είναι υποσύνολο του $S(G,w)$ (όπως στο σχήμα) τότε η $u(k)=F(k)$ δεν είναι λύση του ΓΠΡΠ.



Διευρύνουμε $S(DF, \rho)$ το επιλέγοντας άλλο F


x_2
$S(G,w)$
x_1
Ω
$S(DF,\rho)$

Το ΓΠΡΠ

Συνθήκες ύπαρξης λύσης

Ο γραμμικός νόμος ελέγχου $u(t)=Fx(t)$ είναι λύση του ΓΠΡΠ αν και μόνο αν

•Υπάρχει θετικώς αμετάβλητο σύνολο Ω τέτοιο ώστε

$$S(G,w)\subseteq\Omega\subseteq S(DF,\rho)$$

•Το προκύπτον σύστημα κλειστού βρόχου $x(t+1)=(A+BF)x(t)$ είναι ασυμπτωτικώς ευσταθές

Ο νόμος ελέγχου $u(t)=Fx(t)$ είναι λύση στο ΓΠΡΠ αν

• Το $S(G,w)$ είναι ένα θετικώς αμετάβλητο σύνολο του προκύπτοντος συστήματος κλειστού βρόχου $x(t+1)=(A+BF)x(t)$:

$$\boxed{\begin{gathered} H \geq 0 \\ GA + GBF - HG = 0 \\ Hw \leq w \end{gathered}}$$

$S(G,w) \subseteq S(DF,\rho)$:

$$\boxed{\begin{gathered} K \geq 0 \\ KG = DF \\ Kw \leq \rho \end{gathered}}$$

•Το προκύπτον σύστημα κλειστού βρόχου $x(t+1)=(A+BF)x(t)$ είναι ασυμπτωτικώς αμετάβλητο.

$$\boxed{Hw < w}$$

Επίλυση του ΓΠΡΠ με γραμμικό προγραμματισμό

$$\min_{F,K,\varepsilon}\{\varepsilon\}$$

$$H \geq 0$$

$$GA + GBF - HG = 0$$

$$Hw \leq \varepsilon w$$

$$0 < \varepsilon < 1$$

$$K \geq 0$$

$$KG = DF$$

$$Kw \leq \rho$$