Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης

Ενότητα 8: Αναδρομικός τύπος Kaufman-Roberts

Μιχαήλ Λογοθέτης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Τεχνολογίας Υπολογιστών

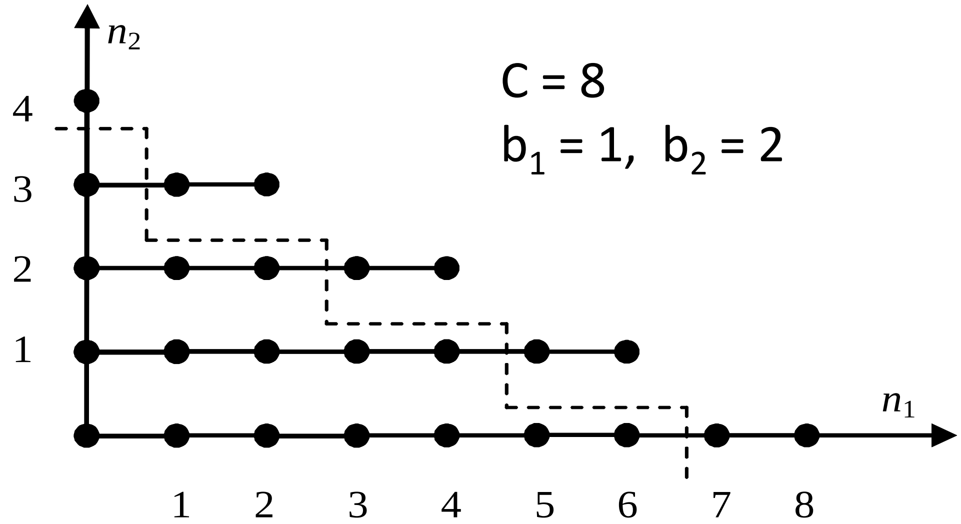
Σκοποί ενότητας

- Ανάλυση συστήματος πολυδιάστατης κίνησης
- Απόδειξη του αναδρομικού τύπου Kaufman-Roberts για τον υπολογισμό της πιθανότητας απωλείας κλήσεως
- Περιγραφή και ανάλυση της πολιτικής δέσμευσης εύρους ζώνης

Περιεχόμενα ενότητας

- Ανάλυση συστήματος πολυδιάστατης κίνησης
- Αναδρομικός τύπος Kaufman-Roberts
- Πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης
- Παραδείγματα

Χώρος κατάστασης δισδιάστατης κίνησης



$$\mathbf{\Omega} = \{\mathbf{n} : 0 \le \mathbf{nb} \le C\}, \quad \acute{o}\pi o\upsilon \;\; \mathbf{nb} = \sum_{i=1}^{K} n_i b_i$$

$$\mathbf{\Omega}_i = \left\{\mathbf{n} \in \mathbf{\Omega} : \mathbf{nb} \le C - b_i\right\}$$

Το σύνολο $\mathbf{\Omega}_2$ (κάτω από την διακεκομμένη γραμμή) είναι το σύνολο των καταστάσεων στο οποίο όταν βρίσκεται το σύστημα κάνει δεκτή μία κλήση τύπου 2 (b_2 =2).

Ανάλυση συστήματος πολυδιάστατης κίνησης (1)

Σκοπός μας είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας απωλείας κλήσεως τύπου i, P_{b_i}, που φθάνει στο σύστημα και απαιτεί b_i μονάδες εύρους ζώνης. Αν **Ω** είναι το σύνολο των καταστάσεων του συστήματος, η πιθανότητα αυτή δίνεται από την σχέση:

$$P_{b_i} = \sum_{n \in B_i^+} P(\mathbf{n}) \ , \ \ B_i^+ = \left\{ \mathbf{n} \in \mathbf{\Omega} : \mathbf{n}_i^+ \notin \mathbf{\Omega} \right\} \qquad \textbf{(11)}$$

$$\mathbf{n}_i^+ = (n_1, n_2, ..., n_{i-1}, n_i + 1, n_{i+1}, ..., n_K)$$

Η μορφή της *P*(**n**) για αυθαίρετα επιλεγμένο τρόπο διάθεσης των πόρων του συστήματος δίνεται από την σχέση:

$$P(\mathbf{n}) = G^{-1} \left(\prod_{i=1}^{K} \frac{a_i^{n_i}}{n_i\,!} \right), \ \ a_i = \lambda_i \,/\, \mu_i \qquad \textbf{(12)}$$

Όπου (συνθήκη κανονικοποίησης):

$$G \equiv G(\mathbf{\Omega}) = \sum_{n \in \Omega} \left(\prod_{i=1}^{K} \frac{a_i^{n_i}}{n_i\,!} \right) \qquad \textbf{(13)}$$

Σημείωση: *Η αρίθμηση συνεχίζεται από την ενότητα 7!!!*

Ανάλυση συστήματος πολυδιάστατης κίνησης (2)

Η απόδειξη της σχέσεως (12) γίνεται χρησιμοποιώντας την έννοια της σφαιρικής ισορροπίας που προκύπτει από το διάγραμμα μετάβασης των καταστάσεων μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας K-διαστάσεων.

Χάριν ευκολίας, θα θεωρήσουμε δύο κατηγορίες κίνησης (K = 2).

Συμβολίζουμε με λ_1, λ_2 τους ρυθμούς άφιξης των κλήσεων και με μ_1, μ_2 τους ρυθμούς εξυπηρέτησής τους. Στην κατάσταση ισορροπίας θεωρούμε ότι έχουμε n_1 κλήσεις της 1ης υπηρεσίας και n_2 κλήσεις της 2ης υπηρεσίας. Άρα η κατάσταση ισορροπίας περιγράφεται από το διάνυσμα $\mathbf{n} = \{n_1, n_2\}$.

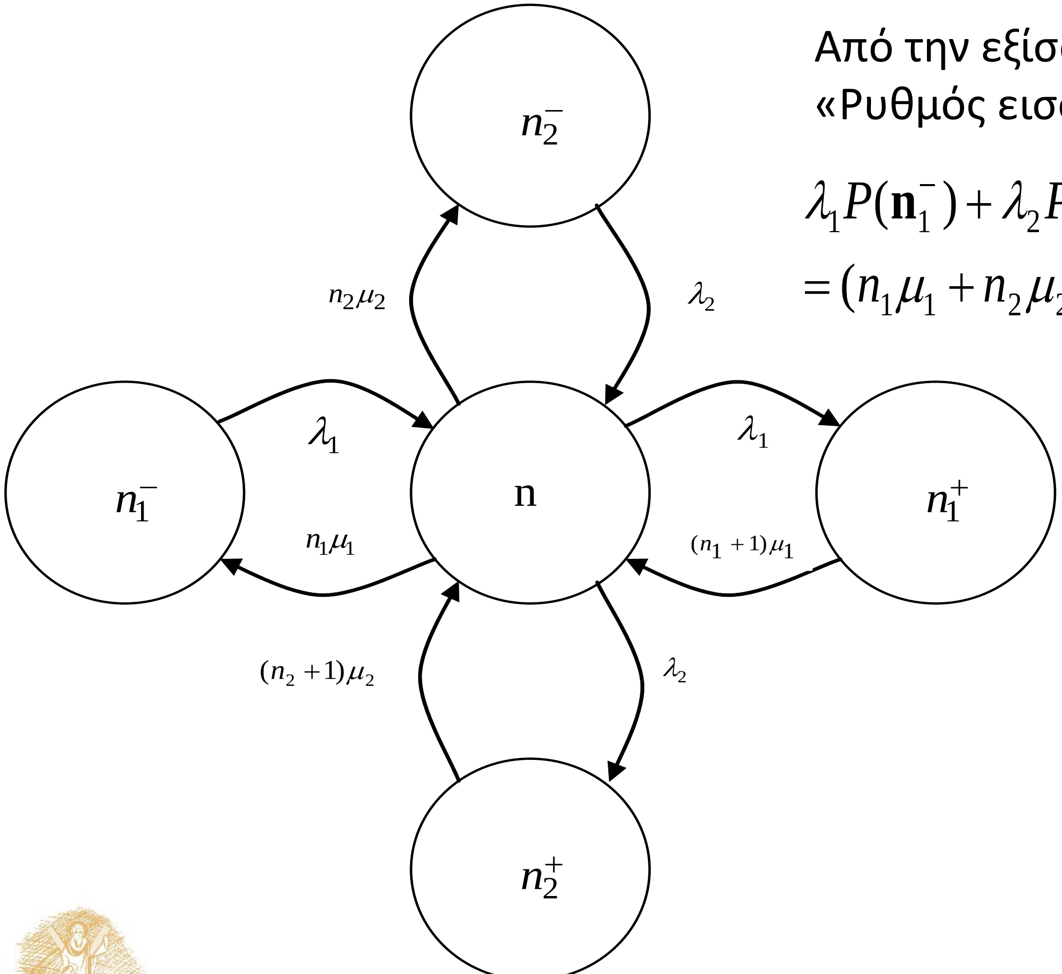
Επίσης:

$$\mathbf{n}_1^+ = \{n_1 + 1, n_2\}, \mathbf{n}_2^+ = \{n_1, n_2 + 1\}, \mathbf{n}_1^- = \{n_1 - 1, n_2\}, \mathbf{n}_2^- = \{n_1, n_2 - 1\}$$

Προκύπτουν τελικά τρία διαγράμματα καταστάσεων που απεικονίζονται στις επόμενες τρεις διαφάνειες!

Ανάλυση συστήματος πολυδιάστατης κίνησης (3)

Το πρώτο σχήμα εκφράζει την περίπτωση όπου δεν έχουμε απώλεια κλήσεων.

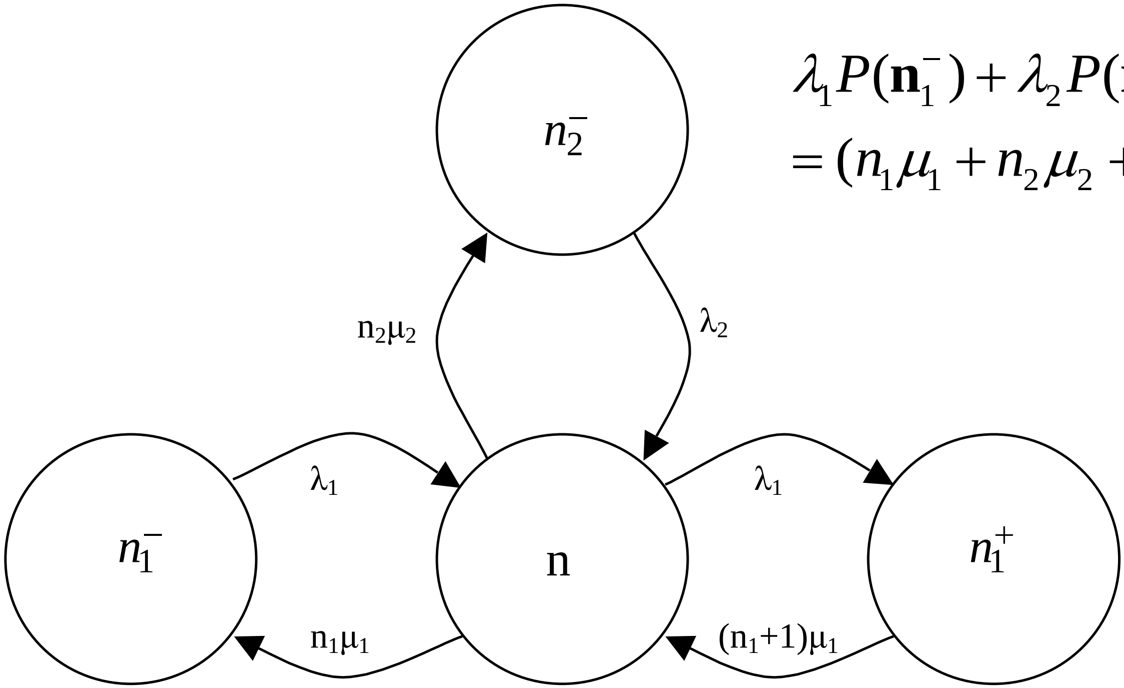


Από την εξίσωση της σφαιρικής ισορροπίας,
«Ρυθμός εισόδου» = «Ρυθμός εξόδου», προκύπτει:

$$\lambda_1 P(\mathbf{n}_1^-) + \lambda_2 P(\mathbf{n}_2^-) + (n_1+1)\mu_1 P(\mathbf{n}_1^+) + (n_2+1)\mu_2 P(\mathbf{n}_2^+) = $$
$$= (n_1\mu_1 + n_2\mu_2 + \lambda_1 + \lambda_2) P(\mathbf{n}) \quad \textbf{(14)}$$

Ανάλυση συστήματος πολυδιάστατης κίνησης (4)

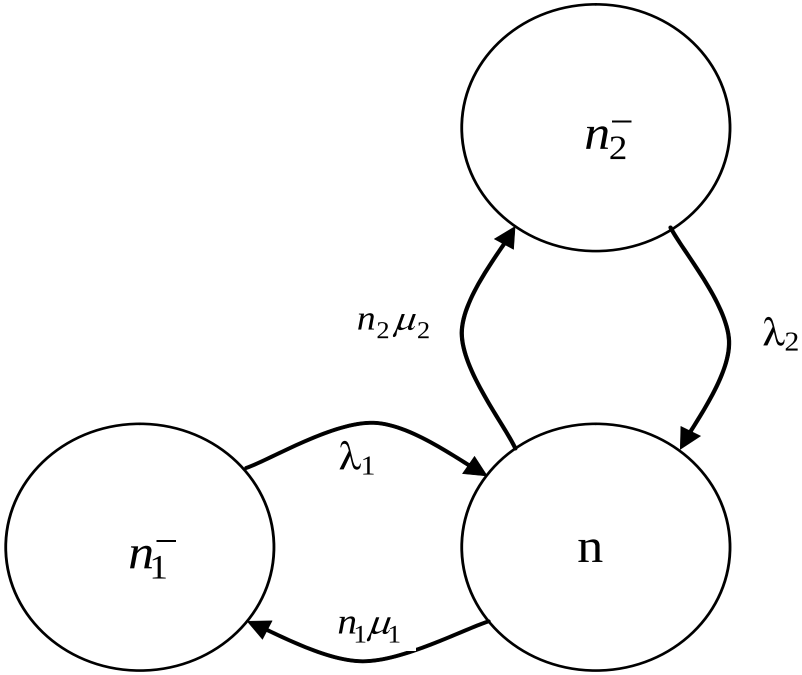
Το δεύτερο σχήμα εκφράζει την περίπτωση όπου έχουμε απώλεια κλήσεων της 2ης κατηγορίας. Από την εξίσωση της σφαιρικής ισορροπίας, «Ρυθμός εισόδου» = «Ρυθμός εξόδου», προκύπτει:



$$\lambda_1 P(\mathbf{n}_1^-) + \lambda_2 P(\mathbf{n}_2^-) + (n_1+1)\mu_1 P(\mathbf{n}_1^+) = \\ = (n_1\mu_1 + n_2\mu_2 + \lambda_1) P(\mathbf{n}) \qquad \textbf{(15)}$$

Ανάλυση συστήματος πολυδιάστατης κίνησης (5)

Το τρίτο σχήμα εκφράζει την περίπτωση όπου έχουμε απώλεια κλήσεων και των δύο κατηγοριών. Από την εξίσωση της σφαιρικής ισορροπίας, «Ρυθμός εισόδου» = «Ρυθμός εξόδου», προκύπτει:



$$\lambda_1 P(\mathbf{n}_1^-) + \lambda_2 P(\mathbf{n}_2^-) = \\ = (n_1\mu_1 + n_2\mu_2) P(\mathbf{n}) \qquad \textbf{(16)}$$

Ανάλυση συστήματος πολυδιάστατης κίνησης (6)

Προκειμένου τώρα να εκφράσουμε τις εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας (14), (15) και (16) μέσω μιας μόνο εξίσωσης, εισάγουμε τους συμβολισμούς:

$$\delta_i^+(\mathbf{n}) = \begin{cases} 1 & \varepsilon\acute{\alpha}\nu \quad n_i^+ \in \Omega \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \qquad \delta_i^-(\mathbf{n}) = \begin{cases} 1 & \varepsilon\acute{\alpha}\nu \quad n_i^- \in \Omega \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

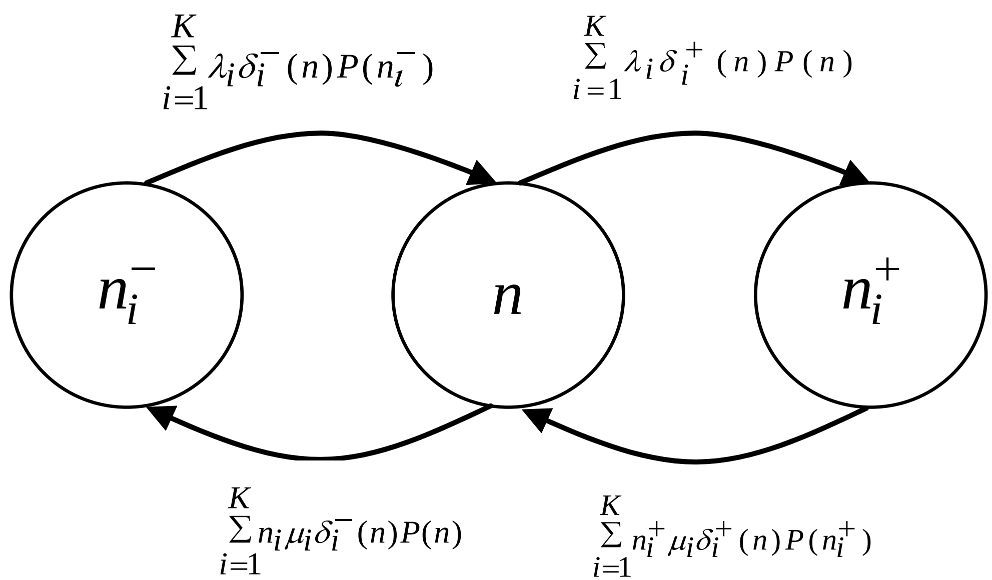
Έχοντας ως δεδομένο την κατάσταση $\mathbf{n} = \{n_1, n_2\}$, οι παραπάνω συμβολισμοί δ εκφράζουν την πιθανή ύπαρξη των καταστάσεων $\mathbf{n}_i^+, \mathbf{n}_i^-$

Ανάλυση συστήματος πολυδιάστατης κίνησης (7)

Έχοντας τους συμβολισμούς δ μπορούμε να καταλήξουμε στην παρακάτω εξίσωση σφαιρικής ισορροπίας (Ρυθμός εισόδου= Ρυθμός εξόδου):

$$\sum_{i=1}^{K}\lambda_i\delta_i^-(\mathbf{n})P(\mathbf{n}_i^-)+\sum_{i=1}^{K}(\mathbf{n}_i+1)\mu_i\delta_i^+(\mathbf{n})P(\mathbf{n}_i^+)=\left[\sum_{i=1}^{K}\lambda_i\delta_i^+(\mathbf{n})+\sum_{i=1}^{K}n_i\mu_i\delta_i^-(\mathbf{n})\right]P(\mathbf{n}) \quad \textbf{(17)}$$

Μέσω της (17) καταλήγουμε στο παρακάτω διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων:



Ανάλυση συστήματος πολυδιάστατης κίνησης (8)

Βάσει του προηγούμενου σχήματος, η τοπική ισορροπία εκφράζεται από την σχέση:

$$\lambda_i \delta_i^-(\mathbf{n}) P(\mathbf{n}_i^-) = n_i \mu_i \delta_i^- P(\mathbf{n}), \qquad i = 1, \ldots, K \qquad \mathbf{n} \in \Omega \tag{18}$$

Αποδεικνύεται τελικά ότι η πιθανότητα μονίμου καταστάσεως υπολογίζεται από την σχέση:

$$P(\mathbf{n}) = \frac{\prod_{i=1}^{K} \frac{a_i^{n_i}}{n_i!}}{\sum_{\mathbf{n}\in\Omega}\left(\prod_{i=1}^{K} \frac{a_i^{n_i}}{n_i!}\right)} \tag{19}$$

που ικανοποιεί την (12) και την εξίσωση σφαιρικής ισορροπίας (17).

Παράδειγμα 1

Εφαρμογή των σχέσεων 12, 13

Έστω σύστημα απωλειών με δύο κατηγορίες κλήσεων και έστω ότι στην κατάσταση ισορροπίας $n_1 = 1$, $n_2 = 1$. Έστω $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $C = 2$ και υποθέσουμε πολιτική πλήρους διάθεσης τότε ζητούμε να βρούμε την πιθανότητα P(**n**), όπου $\mathrm{n} = \{n_1 = 1, n_2 = 1\}.$

Λύση

Επειδή: $\mathbf{\Omega} = \{\mathbf{n} : 0 \le \mathbf{nb} \le C\}, \ \mathbf{nb} = \sum_{i=1}^{K} n_i b_i$

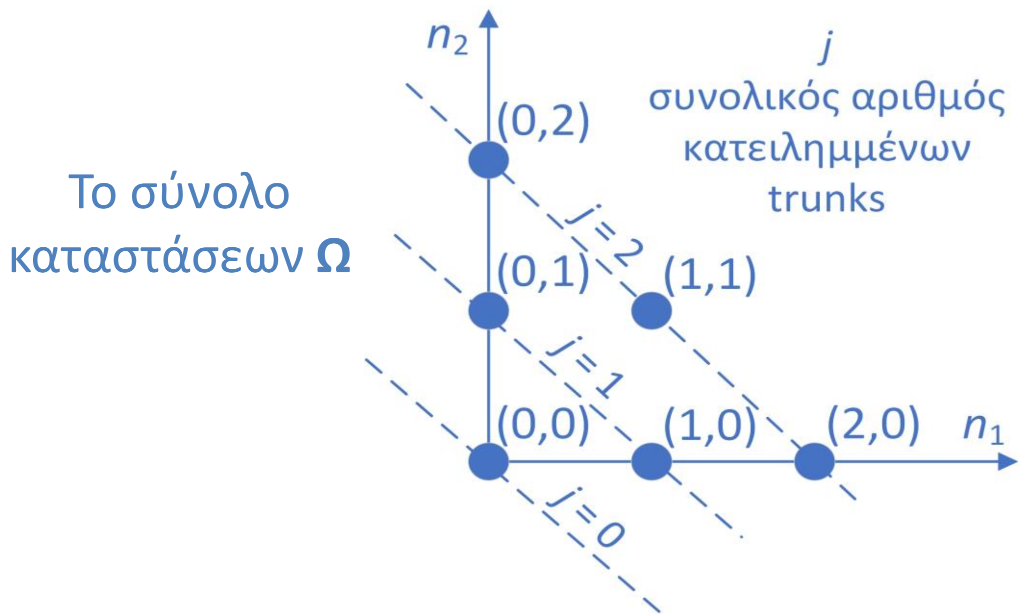
Καταστάσεις του συνόλου **Ω**:

$$(n_1 = 0, n_2 = 0), (n_1 = 0, n_2 = 1), (n_1 = 0, n_2 = 2),$$
$$(n_1 = 1, n_2 = 0), (n_1 = 1, n_2 = 1), (n_1 = 2, n_2 = 0).$$

Άρα από την (19): $P(\mathbf{n}) = \dfrac{\dfrac{a_1^{n_1=1}}{1!} \dfrac{a_2^{n_2=1}}{1!}}{\dfrac{a_1^0}{0!}\dfrac{a_2^0}{0!} + \dfrac{a_1^0}{0!}\dfrac{a_2^1}{1!} + \dfrac{a_1^0}{0!}\dfrac{a_2^2}{2!} + \dfrac{a_1^1}{1!}\dfrac{a_2^0}{0!} + \dfrac{a_1^1}{1!}\dfrac{a_2^1}{1!} + \dfrac{a_1^2}{2!}\dfrac{a_2^0}{0!}}$

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

Δηλ. P(**n**) = P(1,1) = $\dfrac{a_1 a_2}{1+a_2+a_2^{\,2}/2+a_1+a_2 a_2+a_1^{\,2}/2}$



Παρατηρήστε ότι η πιθανότητα απωλείας κλήσεων, B_1, B_2, των δύο κατηγοριών κλήσεων n_1, n_2, προκύπτει αθροίζοντας της πιθανότητες στις οποίες ο συνολικός αριθμός *j* των κατειλημμένων trunks του συστήματος είναι $j = C = 2$:

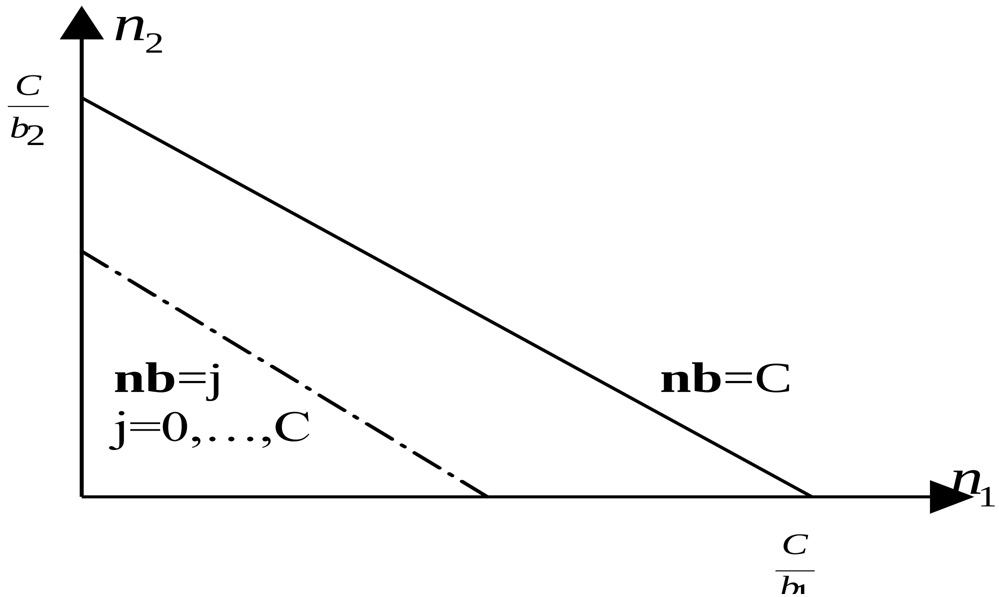
$B_1 = B_2 = P(2,0) + P(1,1) + P(0,2)$

Αναδρομικός τύπος Kaufman-Roberts (1)

Προκειμένου να υπολογίσουμε τις πιθανότητες απωλείας κλήσεων με κάποιο εύκολο τρόπο θεωρούμε αρχικά το σύνολο των καταστάσεων

$$\mathbf{\Omega}_j = \left\{ \mathbf{n} \in \mathbf{\Omega}_j : \ \mathbf{nb} = \mathrm{j} \right\}$$

Το σύνολο αυτό εκφράζει τις καταστάσεις στις οποίες είναι κατειλημμένες ακριβώς j γραμμές. Οι δυνατές καταστάσεις του συνόλου αυτού βρίσκονται πάνω στην διαγώνιο **nb** = j (όπου j = 0,1,2,…,C) (βλ. σχήμα για 2 κατηγορίες)



Αναδρομικός τύπος Kaufman-Roberts (2)

Η πιθανότητα να έχουμε j κατειλημμένες γραμμές (στην κατάσταση ισορροπίας) δίνεται από την σχέση:

$$q(j) = \sum_{n \in \Omega_j} P(\mathbf{n}) \qquad \textbf{(20)}$$

Η πιθανότητα απωλείας κλήσεως P_{bi} μπορεί να εκφρασθεί και ως:

$$P_{b_i} = \sum_{\{\mathbf{n}:\mathbf{nb} > C - b_i\}} P(\mathbf{n}) \qquad \textbf{(21)}$$

Όταν οι “κατειλημμένες” γραμμές είναι j = **nb** > C-b_i έχουμε απώλεια των κλήσεων τύπου i. Άρα η P_{bi} μπορεί να εκφρασθεί και ως:

$$P_{b_i} = \sum_{j=C-b_i+1}^{C} q(j) = \sum_{j=0}^{b_i-1} q(C-j) \qquad \textbf{(22)}$$

Αναδρομικός τύπος Kaufman-Roberts (3)

Βλέπουμε επομένως ότι ο υπολογισμός της πιθανότητας P_{bi} έγκειται στην εύρεση ενός αναδρομικού τύπου για τον υπολογισμό του q(j). Για τον σκοπό αυτό κάνουμε τις παρακάτω σκέψεις. Θεωρούμε αρχικά ότι η P_{bi} μπορεί να γραφεί ως:

$$P_{b_i} = \frac{a_i - a_i^*}{a_i} \qquad \textbf{(23)}$$

όπου α_i το προσφερόμενο φορτίο κίνησης των κλήσεων τύπου i και α_i^* το φορτίο κίνησης που διεκπεραιώνεται από το σύστημα.

Έχοντας αρχικά ορίσει ως n_i τον αριθμό των κλήσεων τύπου i στην κατάσταση ισορροπίας, τότε από τις ιδιότητες του φορτίου κίνησης, το φορτίο κίνησης α_i που διεκπεραιώνεται από το σύστημα είναι η μέση τιμή του n_i. Επομένως:

$$E\left[n_i\right] = a_i(1 - P_{b_i}) = a_i^* \qquad \textbf{(24)}$$

Αναδρομικός τύπος Kaufman-Roberts (4)

$$E\left[n_i\right] = a_i(1 - P_{b_i}) = a_i^* \qquad \textbf{(24)}$$

Πολλαπλασιάζοντας το αριστερό μέλος της (24) με b_i και παίρνοντας το άθροισμα για *i* =1,2,…,K προκύπτει η μέση τιμή των κατειλημμένων γραμμών του συστήματος, *E*(*j*).

$$E(j) = \sum_{i=1}^{K} b_i E(n_i) \qquad \textbf{(25)}$$

Αλλά από τον ορισμό της μέσης τιμής έχομε επίσης:

$$E(j) = \sum_{j=0}^{C} j q(j) \qquad \textbf{(26)}$$

Από την (24) έχομε:

$$E(n_i) = a_i(1 - P_{b_i}) = a_i \sum_{\mathrm{n} \in \Omega_i} P(\mathrm{n}) = a_i \sum_{j=0}^{C-b_i} q(j) \qquad \textbf{(27)}$$

Αναδρομικός τύπος Kaufman-Roberts (5)

Πολλαπλασιάζοντας το αριστερό και δεξιό μέλος της (27) επί b_i και παίρνοντας το άθροισμα για i =1,...,K έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{K} b_i E(n_i) = \sum_{i=1}^{K} a_i b_i \sum_{j=0}^{C-b_i} q(j) = \sum_{j=0}^{C} \sum_{i=1}^{K} a_i b_i q(j-b_i) \qquad \textbf{(28)}$$

Από (25),(26) $\Rightarrow \sum_{i=1}^{K} b_i \, E(n_i) = \sum_{j=0}^{C} j \, \mathrm{q}(j)$ και η (28) γίνεται:

$$\sum_{j=0}^{C} j q(j) = \sum_{j=0}^{C} \sum_{i=1}^{K} a_i \, b_i q(j-b_i) \qquad \textbf{(28α)}$$

Αναδρομικός τύπος Kaufman-Roberts (6)

Από την (28α), βγάζοντας τα εξωτερικά αθροίσματα (περιλαμβάνουν ίδιο αριθμό όρων), για τον υπολογισμό των q(*j*) προκύπτει η απλή αναδρομική σχέση (28β):

$$jq(j) = \sum_{i=1}^{K} a_i b_i q(j - b_i) \qquad \textbf{(28β)}$$

γνωστή και ως **αναδρομικός τύπος των Kaufman-Roberts.**
Η (28β) επακριβέστερα γράφεται:

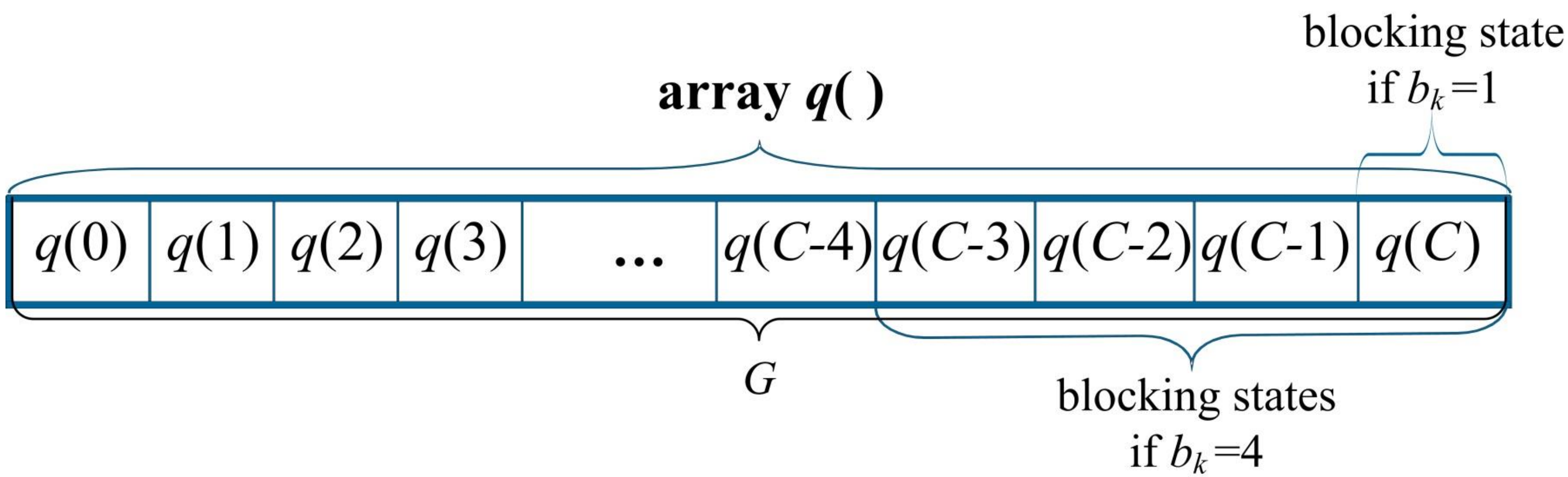
$$q(j) = \begin{cases} 1 & \text{για} \quad j = 0 \\ \dfrac{1}{j}\sum_{i=1}^{K} a_i b_i q\left(j - b_i\right) & \text{για} \quad j = 1,\ldots,C \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \qquad \textbf{(29)}$$

όπου τα *q*(*j*) πρέπει να κανονικοποιηθούν διαιρώντας με $\sum_{j=0}^{C} q(j)$.

Αναδρομικός τύπος Kaufman-Roberts (7)

Πιθανότητα απωλείας κλήσεων για την κατηγορία κίνησης *k*:

$$B_k = \sum_{j=C-b_k+1}^{C} \frac{q(j)}{G} \quad \text{or} \quad B_k = \sum_{j=0}^{b_k-1} \frac{q(C-j)}{G}$$



Επειδή, για τον υπολογισμό των απωλειών όταν έχουμε μία μόνο υπηρεσία (K=1), ο αναδρομικός τύπος των Kaufman-Roberts δίδει τα ίδια ακριβώς αποτελέσματα με την Erlang B-formula, τον ονομάζουμε επίσης ERLANG MULTORATE LOSS MODEL (EMLM).

Αναδρομικός τύπος Kaufman-Roberts (6)

Στο σημείο αυτό είναι δελεαστικό να ερμηνεύσουμε την (29) ως μια εξίσωση ισορροπίας μιας διαδικασίας γέννησης-θανάτου, όπου $\lambda_i q(j-b_i)$ είναι ο ρυθμός γέννησης των κλήσεων τύπου i και $\mu_i q(j)$ ο ρυθμός θανάτου τους. Θέτουμε την ποσότητα $\hat{n}_i(j)$ ως τον αριθμό των κλήσεων τύπου i που βρίσκονται στο σύστημα με δεδομένο ότι οι κατειλημμένες γραμμές είναι j.

Διαισθητικά περιμένουμε να ισχύει ότι (*rate up = rate down*):

$$\lambda_i q(j-b_i) = \hat{n}_i(j)\mu_i q(j)$$

Πράγματι μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει η σχέση:

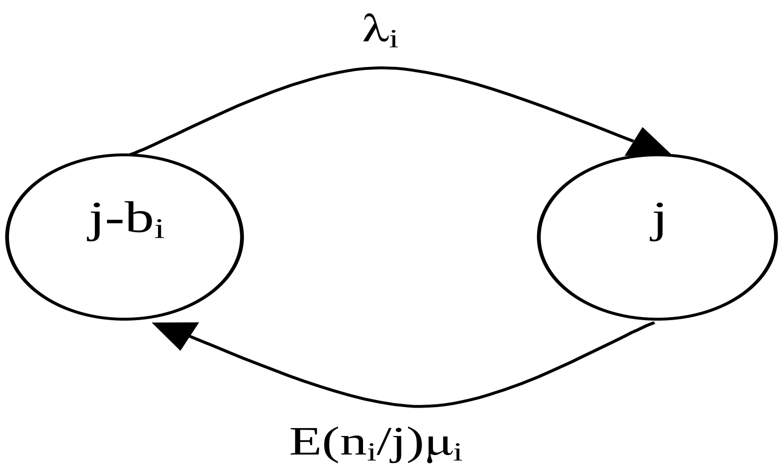
$$a_i q(j-b_i) = E(n_i | j) q(j) \qquad \textbf{(30)}$$

Αναδρομικός τύπος Kaufman-Roberts (7)

Η (30) μπορεί να εκφραστεί γραφικά μέσω του παρακάτω σχήματος.

Από την (30) αποδεικνύεται και η (29). Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (30) επί b_i και παίρνοντας το άθροισμα για i = 1,2,…,K προκύπτει ότι:

$$\sum_{i=1}^{K} a_i b_i q(j-b_i) = \left(\sum_{i=1}^{K} b_i E(n_i \mid j)\right) q(j) = E\left(\sum_{i=1}^{K} n_i b_i \mid j\right) q(j) = jq(j) \qquad \textbf{(31)}$$



Πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης (1)

Σκοπός της **πολιτικής δέσμευσης εύρους ζώνης (trunk/bandwidth reservation policy)** είναι η εξισορρόπηση των πιθανοτήτων απωλείας κλήσεως των διαφορετικών υπηρεσιών, όταν από κοινού μοιράζονται τους πόρους ενός συστήματος εξυπηρέτησης. Η εξισορρόπηση αυτή επιτυγχάνεται με το να δεσμεύσουμε εύρος ζώνης προς όφελος των κλήσεων εκείνων των υπηρεσιών που έχουν υψηλές απαιτήσεις εύρους ζώνης.

Πρακτικός κανόνας: Για να βρούμε πόσο εύρος ζώνης πρέπει να δεσμεύσουμε από κάθε υπηρεσία ώστε να εξισορροπήσουμε πλήρως τις πιθανότητες απωλείας κλήσεως μεταξύ των υπηρεσιών, θα πρέπει για κάθε υπηρεσία οι μονάδες εύρους ζώνης ανά κλήση μιας υπηρεσίας + το εύρος ζώνης που δεσμεύεται από την υπηρεσία, το άθροισμα αυτό, να είναι το ίδιο για κάθε υπηρεσία. Π.χ., αν έχουμε 3 υπηρεσίες με απαιτήσεις b_1=1, b_2=5 και b_3=10, τότε οι παράμετροι της πολιτικής δέσμευσης εύρους ζώνης που εξισώνουν τις πιθανότητες απωλείας κλήσεως των υπηρεσιών είναι t(1)=9, t(2)=5 και t(3)=0 trunks. Δηλαδή είναι σαν να λέμε ότι οι τρεις υπηρεσίες θα έχουν την ίδια πιθανότητα απωλείας κλήσεως, διότι έχουν τις ίδιες τελικά απαιτήσεις εύρους ζώνης ανά κλήση (b_1+t(1)=b_2+t(2)=b_3+t(3)= 10 trunks).

Πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης (2)

Ο αναδρομικός τύπος των Kaufman-Roberts (σχέση (29)) πρέπει να διατυπωθεί έτσι ώστε να μπορεί να ληφθεί υπ' όψη η πολιτική δέσμευσης του εύρους ζώνης που εφαρμόζουμε για να εξισορροπήσουμε την πιθανότητα απωλείας κλήσεως μεταξύ των διαφορετικών υπηρεσιών. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τα εξής σύμβολα:

K: το πλήθος των διαφορετικών υπηρεσιών.

i: κατηγορία υπηρεσιας *i* (*i* = 1,2,…,K).

b_i: το απαιτούμενο εύρος ζώνης ανά κλήση της υπηρεσίας *i*.

$α_i$: προσφερομένη κίνηση από την υπηρεσία *i*.

t(i): το εύρος ζώνης που δεσμεύεται εις βάρος των κλήσεων της υπηρεσίας *i*.

C: η χωρητικότητα του συστήματος σε εύρος ζώνης (αριθμός trunks).

Πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης (3)

Μέσω των (32), (33) υπολογίζουμε προσεγγιστικά τις πιθανότητες απωλείας κλήσεως για σύστημα δέσμευσης εύρους ζώνης.

$$q(j)=\begin{cases}1 & \text{για} \quad j=0\\ \dfrac{1}{j}\sum_{i=1}^{K} a_i D_i(j-b_i)q\left(j-b_i\right) & \text{για} \quad j=1,\ldots,C\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases} \qquad \textbf{(32)}$$

$$\text{όπου} \;\; D_i\left(j-b_i\right)=\begin{cases}b_i & \text{για} \;\; j\leq C-t\left(i\right)\\ 0 & \text{για} \;\; j>C-t(i)\end{cases} \qquad \textbf{(32α)}$$

$$P_{b_i} = \sum_{j=0}^{b_i+t(i)-1} G^{-1}q\left(C-j\right) \qquad \textbf{(33)}$$

όπου $G=\sum_{j=0}^{C} q\left(j\right)$

Παραδείγματα (1)

Παράδειγμα 2

Έστω ένα σύστημα με C = 5 μονάδες εύρους ζώνης το οποίο εξυπηρετεί δύο κατηγορίες κίνησης με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά: $b_1 = 1$, $\alpha_1 = 1$ erl, $b_2 = 2$, $\alpha_2 = 0.25$ erl.

α) Να σχεδιάσετε το σύνολο καταστάσεων Ω,

β) Να σχεδιάσετε την μονοδιάστατη αλυσίδα Markov με τις καταστάσεις j = 0,…,5 και

γ) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες απωλείας κλήσεων των δύο κατηγοριών κίνησης.

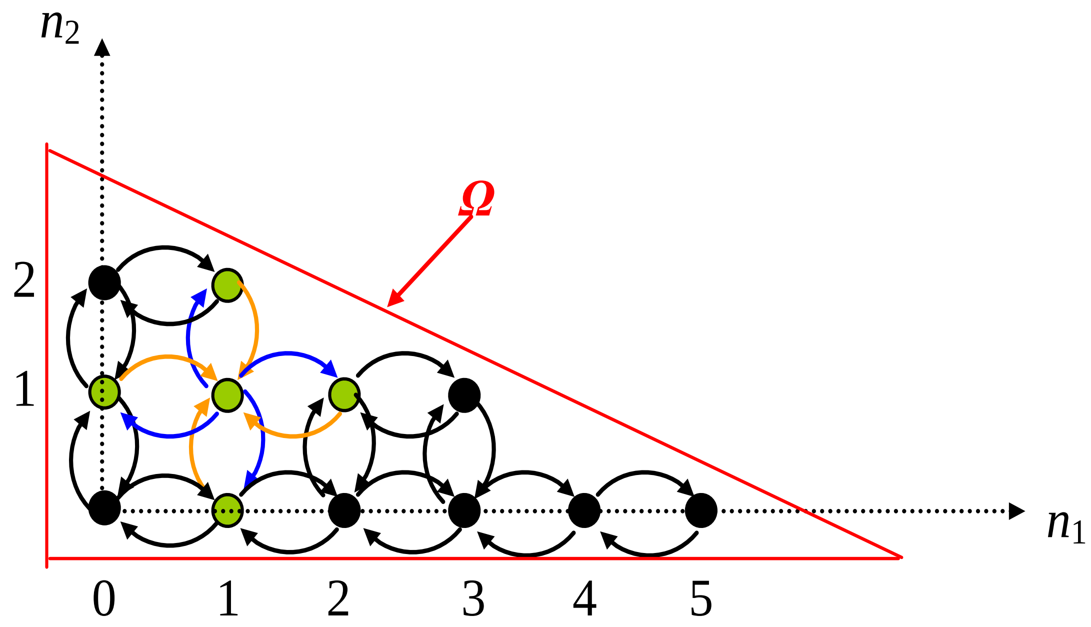
δ) Για ποιες τιμές των παραμέτρων δέσμευσης εύρους ζώνης επιτυγχάνεται εξισορρόπηση των πιθανοτήτων απωλείας κλήσεων; Να σχεδιάσετε το σύνολο καταστάσεων Ω (State Transition Diagram).

(ε) Με βάση το ερώτημα (δ) να υπολογίσετε την κοινή πιθανότητα απωλείας κλήσεων των δύο κατηγοριών κίνησης.

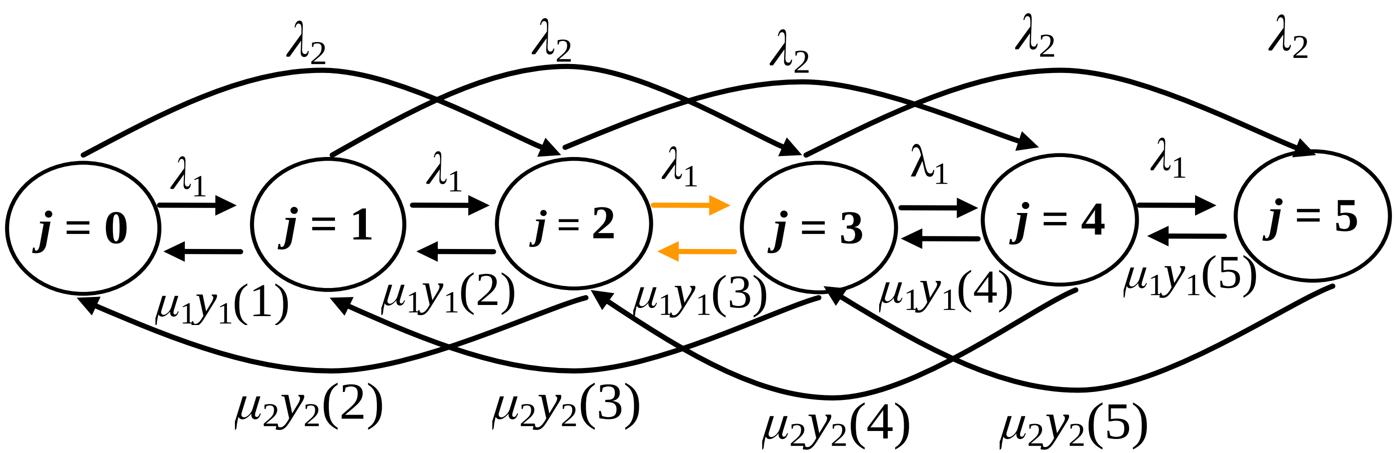
Παραδείγματα (2)

Λύση

α)



β)



Παραδείγματα (3)

γ)

Μη κανονικοποιημένα q(j) (μέσω της σχέσης (29)):

q(0)=1, q(1)=1, q(2) = 0.75, q(3)= 0.4166, q(4) = 0.1979, q(5)=0.08125

G = 3.4458 (σταθερά κανονικοποίησης)

Κανονικοποιημένα q(j):

Οι προηγούμενες τιμές διαιρούνται με G

q(0)=0.2902, q(1)=0.2902, q(2) = 0.21765, q(3)= 0.12092,

q(4) = 0.057436, q(5)=0.023579

Πιθανότητες απωλείας κλήσεων (μέσω της σχέσης (22)):

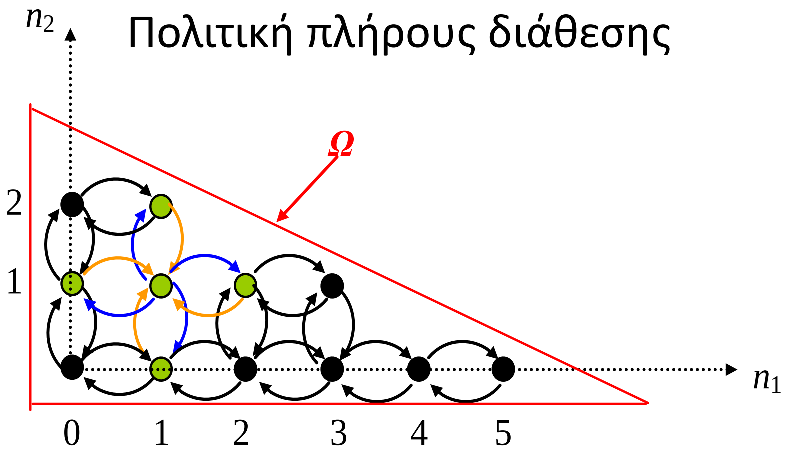
P_{b1} = q(5) = 0.023579

P_{b2} = q(4)+q(5)=0.08102

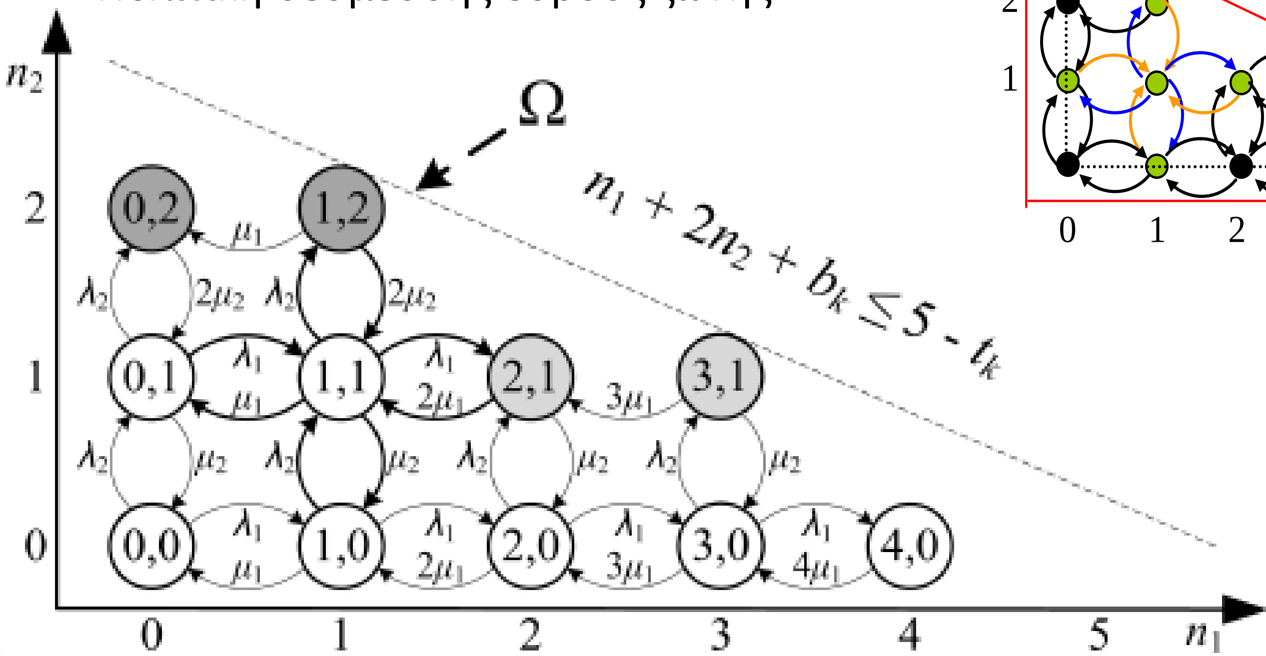
Παραδείγματα (4)

(δ) Με βάση τον κανόνα b_1+t(1)=b_2+t(2), προκύπτει ότι t(1) = 1 και t(2) = 0.

Πολιτική πλήρους διάθεσης



Πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης



Παραδείγματα (4)

ε) **Μη κανονικοποιημένα** q(j) (μέσω της σχέσης (32)):

q(0)=1, q(1)=1, q(2) = 0.75, q(3)= 0.4166, q(4) = 0.1979, q(5)=0.0417

G = 3.40625 (σταθερά κανονικοποίησης)

Κανονικοποιημένα q(j):

Οι προηγούμενες τιμές διαιρούνται με G

q(0)=0.293578, q(1)=0.293578, q(2) = 0.22018, q(3)= 0.1223,

q(4) = 0.0581, q(5)=0.01224

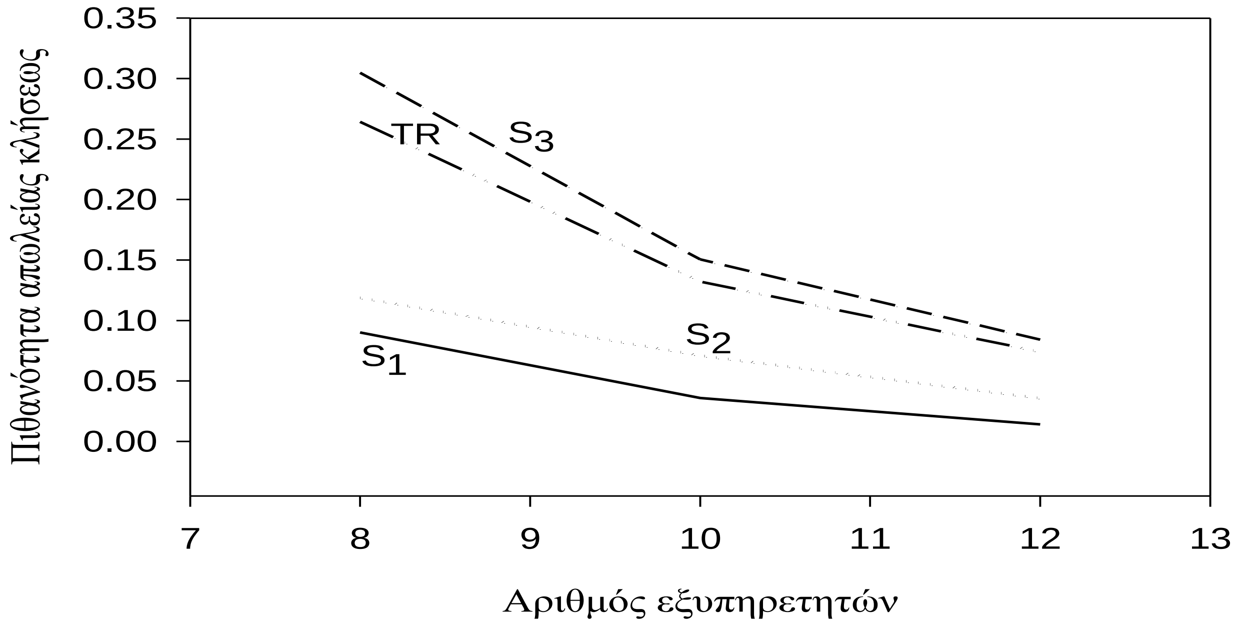
Πιθανότητες απωλείας κλήσεων (μέσω της σχέσης (33)):

$P_{b1} = P_{b2} = q(4)+q(5) = 0.07034$

Παραδείγματα (5)

Παράδειγμα 3

Έστω τρεις υπηρεσίες, s_1, s_2, και s_3 με προσφερόμενο φορτίο κίνησης 0.5, 0.33 και 0.2 erl, και απαιτήσεις σε εύρος ζώνης b_1=2, b_2=3 και b_3= 5 trunks, αντιστοίχως. Οι υπηρεσίες εξυπηρετούνται από 8, ή 9, ..., ή 12 εξυπηρετητές. Με χρήση των (29), (22) και (32), (33) λαμβάνουμε την γραφική παράσταση μεταβολής της πιθανότητας απωλείας κλήσεως κάθε υπηρεσίας, με ή χωρίς την πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης (στην περίπτωση αυτή δεσμεύονται 3, 2 και 0 trunks εις βάρος των s_1, s_2, και s_3, αντιστοίχως), συναρτήσει της μεταβολής του αριθμού των εξυπηρετητών του συστήματος.



Τέλος Ενότητας