Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης

Ενότητα 6: Επέκταση των Μαρκοβιανών μοντέλων

Μιχαήλ Λογοθέτης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σκοποί ενότητας

- Περιγραφή των διαδικασιών «γέννησης – θανάτου»
- Περιγραφή και ανάλυση των Μαρκοβιανών μοντέλων M/M/s(m) και M(n)/M/s

Περιεχόμενα ενότητας

- Διαδικασίες «γέννησης – θανάτου»
- Το μοντέλο M/M/s(m)
- Το μοντέλο M(n)/M/s

Διαδικασίες «γέννησης - θανάτου» (1)

Βασικοί ορισμοί

Στοχαστική διαδικασία (stochastic process): Ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών $\{N(t)\ ;\ t \geq 0\}$ με παράμετρο τον χρόνο t και N(t) τον αριθμό των υπαρχουσών κλήσεων στο σύστημα σε χρόνο t.

Μαρκοβιανή διαδικασία (Markov process): Ονομάζεται μια στοχαστική διαδικασία που έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα, π.χ. η κατάσταση μετά από το χρόνο t εξαρτάται μόνο από την κατάσταση στον χρόνο t.

Διαδικασίες «γέννησης - θανάτου» (2)

Μια Μαρκοβιανή διαδικασία στην οποία η μετάβαση καταστάσεων γίνεται κατά ένα βήμα κάθε φορά, λέγεται **διαδικασία γέννησης-θανάτου** (**Birth-Death Process**) και περιγράφεται από την σχέση (12), για $\Delta t \to 0$

$$P\left\{N\left(t+\Delta t\right)=k \middle| N\left(t\right)=j\right\}=\begin{cases}\lambda_j \Delta t, & k=j+1 \\ \mu_j \Delta t, & k=j-1 \\ 0, & \left|k-j\right|\geq 2 \quad j,k=0,1,2,...\end{cases} \quad \textbf{(12)}$$

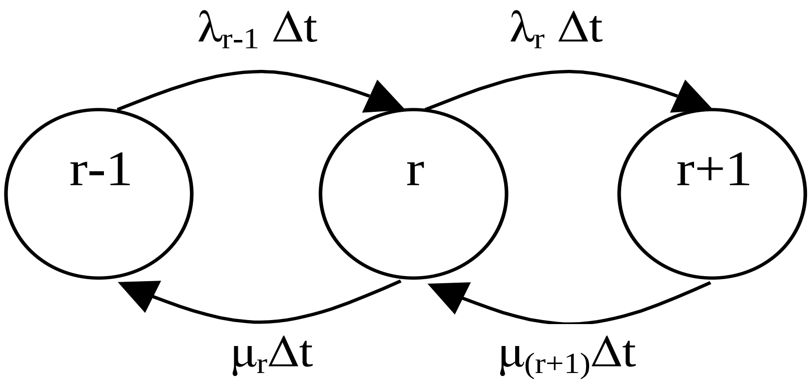
όπου λ_j καλείται ρυθμός γέννησης και μ_j, ρυθμός θανάτου με $\mu_0=0$.

Επίσης, με $N(t)=j$ συμβολίζουμε την περίπτωση η διαδικασία να βρίσκεται στην κατάσταση j στον χρόνο t.

Σημείωση: Η αρίθμηση των σχέσεων συνεχίζεται από την ενότητα 5!!

Διαδικασίες «γέννησης - θανάτου» (3)

Το διάγραμμα μετάπτωσης καταστάσεων, σε διαδικασία γέννησης-θανάτου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Από την σχέση «ρυθμός εξόδου = ρυθμός εισόδου» έχουμε την εξίσωση μονίμου καταστάσεως (steady-state equation):

$$\lambda_{r-1}P_{r-1}-(\lambda_r+\mu_r)P_r+\mu_{r+1}P_{r+1}=0, \quad r=0,1,\ldots. \text{ και } P_{-1}=0 \quad \textbf{(13)}$$

Διαδικασίες «γέννησης - θανάτου» (4)

Αθροίζοντας τις εξισώσεις που προκύπτουν από την (13) για κάθε r και χρησιμοποιώντας την συνθήκη κανονικοποίησης έχουμε:

$$\mathrm{P_r} = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{r-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}\mathrm{P_0},\ \ P_0 = \left(1+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{r-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}\right)^{-1} \quad \textbf{(14)}$$

Το μοντέλο M/M/s(m)   (1)

Έστω σύστημα αναμονής M/M/s, με s εξυπηρετητές, κλήσεις που ακολουθούν την κατανομή Poisson, εκθετικά κατανεμημένο χρόνο εξυπηρέτησης και <u>περιορισμένες θέσεις αναμονής, έστω m θέσεις</u>. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιώντας την (14) και θέτοντας:

$$\lambda_r = \begin{cases} \lambda & (0 \le r < m) \\ 0 & (r \ge m) \end{cases}, \quad \mu_r = \begin{cases} r\mu & (1 \le r \le s) \\ s\mu & (s \le r \le m) \end{cases}$$

προκύπτει ότι:

$$P_r = \begin{cases} \dfrac{1}{r!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^r P_0 & (0 \le r < s) \\[2ex] \dfrac{1}{s^{r-s}s!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^r P_0 & (s \le r \le m) \end{cases} \qquad \textbf{(15)}$$

Το μοντέλο M/M/s(m) (2)

Με βάση την οριακή συνθήκη:

$$\sum_{r=0}^{m} P_r = 1$$

προκύπτει τελικά ότι:

$$P_0 = \begin{cases} \left[\sum_{r=0}^{s-1} \frac{1}{r!}(\alpha)^r + \frac{\alpha^s}{s!} \frac{1-\left(\frac{\alpha}{s}\right)^{m-s+1}}{1-\frac{\alpha}{s}} \right]^{-1} & \left(\frac{\alpha}{s} \neq 1\right) \\ \left[\sum_{r=0}^{s-1} \frac{1}{r!}(\alpha)^r + \frac{\alpha^s}{s!}(m-s+1) \right]^{-1} & \left(\frac{\alpha}{s} = 1\right) \end{cases} \qquad \textbf{(16)}$$

Το μοντέλο M/M/s(m)   (3)

Με την βοήθεια των (15), (16) υπολογίζουμε το μέσο μήκος L της ουράς αναμονής:

$$L = \sum_{r=s}^{m}(r-s)P_r = \frac{P_0}{s!}\sum_{r=s}^{m}\frac{r-s}{s^{r-s}}\alpha^r = \ldots = \frac{P_0\left(s\rho_1\right)^s\rho_1}{s!}\frac{d}{d\rho_1}\left[\frac{1-\rho_1^{m-s+1}}{1-\rho_1}\right]$$

$$= \frac{P_0\left(s\rho_1\right)^s\rho_1}{s!\left(1-\rho_1\right)^2}\left[1-\rho_1^{m-s+1}-\left(1-\rho_1\right)^{(m-s+1)}\rho_1^{m-s}\right] \qquad \textbf{(17)}$$

όπου $\rho_1 = \alpha/s$.

Σημείωση: Αν $\boldsymbol{\rho_1=1}$ τότε είναι δύσκολο να καταλήξουμε σε τύπο για το L, άρα και για τα υπόλοιπα μεγέθη. Προκειμένου να ξεπεραστεί η δυσκολία αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση (17) θέτοντας όπου $\boldsymbol{\rho_1=0.99}$.

Το μοντέλο M/M/s(m) (4)

Η μέση τιμή των κλήσεων σε όλο το σύστημα υπολογίζεται ως εξής:

$$L = \sum_{r=s}^{m}(r-s)P_r = \sum_{r=s}^{m} rP_r - s\sum_{r=s}^{m} P_r = \sum_{r=0}^{m} rP_r - \sum_{r=0}^{s-1} rP_r - s\sum_{r=s}^{m} P_r \Rightarrow$$

$$L = \overline{N} - \sum_{r=0}^{s-1} rP_r - s\left(1 - \sum_{r=0}^{s-1} P_r\right) = \overline{N} - \sum_{r=0}^{s-1}(r-s)P_r - s \Rightarrow$$

$$\overline{N} = L + s - \sum_{r=0}^{s-1}(s-r)P_r \qquad \textbf{(18)}$$

Από τον νόμο του Little, προκύπτει ο μέσος χρόνος παραμονής των κλήσεων στο σύστημα ως:

$$T = \frac{\overline{N}}{\lambda'} = \frac{\overline{N}}{\lambda(1\text{-}\alpha)} \qquad \textbf{(19)}$$

Το μοντέλο M/M/s(m) (5)

Από την (19) υπολογίζουμε τον μέσο χρόνο αναμονής στην ουρά, W:

$$W = T - \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda'} \qquad \textbf{(20)}$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου *s*=1. Τότε:

$$P_r = \begin{cases} \dfrac{(1-\alpha)\alpha^r}{1-\alpha^{m+1}} & (\alpha \neq 1) \\ \dfrac{1}{m+1} & (\alpha = 1) \end{cases} \qquad \textbf{(21)}$$

$$P_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha^{m+1}} & (\alpha \neq 1) \\ \dfrac{1}{m+1} & (\alpha = 1) \end{cases} \qquad \textbf{(22)}$$

Το μοντέλο M/M/s(m) (6)

Επίσης:

$$\overline{N} = \frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{(m+1)\alpha^{m+1}}{1-\alpha^{m+1}} \quad \textbf{(23)}$$

$$L = \overline{N} - \frac{\alpha(1-\alpha^{m})}{1-\alpha^{m+1}} \quad \textbf{(24)}$$

Τέλος, ο υπολογισμός της πιθανότητας απωλείας των κλήσεων στο σύστημα δίνεται από την (25) και (26) (η τελευταία όταν s=1):

$$B = P_0 \frac{\alpha^{s}}{s!} \rho_1 \quad \textbf{(24)}$$

$$B = P_0 \alpha^2 \quad \textbf{(25)}$$

Το μοντέλο M/M/s(m) (6)

Παράδειγμα 1

Έστω ένα σύστημα μετάδοσης πακέτων όπου τα πακέτα έχουν μεταβλητό μήκος που ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με μέση τιμή L bits, και μεταφέρονται με ταχύτητα u bps. Τότε ο χρόνος μετάδοσης (με άλλα λόγια ο χρόνος εξυπηρέτησης) μπορεί να προσεγγιστεί με μια εκθετική κατανομή με μέση τιμή $h=(L/u)$sec. Υποθέτοντας ότι τα πακέτα καταφθάνουν τυχαία, και ότι παρέχεται καταχωρητής πακέτων χωρητικότητας m, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το μοντέλο M/M/s(m).

Π.χ., αν $L=1200$ bits και $u=2400$ bps, έχουμε $h=1200/2400=0.5$sec. Επίσης, αν ο ρυθμός αύξησης είναι $\lambda=4$ πακέτα/sec και ο αριθμός των γραμμών είναι $s=3$, τότε το φορτίο κίνησης είναι $\alpha = \lambda h = 4\times 0.5 = 2$erl.

Για $m=10$, προκύπτει ότι $W = 0.207$ sec και $B = 0.0026$

Για $m = 20$, προκύπτει ότι $W = 0.222$ sec και $B = 0.00004$

Το μοντέλο M(n)/M/s (1)

Στο μοντέλο αυτό θεωρούμε ότι οι κλήσεις προέρχονται από περιορισμένο αριθμό πηγών ενώ το σύστημα έχει άπειρη ουρά αναμονής. Χρησιμοποιώντας την θεωρία «γέννησης-θανάτου» και την (14) και θέτοντας:

$$\lambda_r = \begin{cases} (n-r)\lambda & (0 \le r \le n) \\ 0 & (r \ge n) \end{cases} \qquad \mu_r = \begin{cases} r\mu & (0 \le r < s) \\ s\mu & (r \ge s) \end{cases}$$

προκύπτει ότι:

$$P_r = \begin{cases} \binom{n}{r} (\alpha)^r P_0 & (0 \le r \le s) \\ \binom{n}{r} \left(\frac{r!}{s^{r-s} s!} \right) (\alpha)^r P_0 & (s \le r \le n) \end{cases} \qquad \textbf{(26)}$$

$$P_0 = \left[\sum_{r=0}^{s-1} \binom{n}{r} (\alpha)^r + \sum_{r=s}^{n} \binom{n}{r} \frac{r!}{s^{r-s} s!} (\alpha)^r \right]^{-1} \qquad \textbf{(27)}$$

Το μοντέλο M(n)/M/s (2)

Η μέση τιμή των κλήσεων στο σύστημα και στην ουρά αναμονής υπολογίζεται από τις σχέσεις (28) και (29), αντιστοίχως, ως εξής:

$$\overline{N} = \sum_{r=0}^{n} rP_r = P_0\left[\sum_{r=0}^{s-1} r\binom{n}{r}(\alpha)^r + \frac{1}{s!}\sum_{r=s}^{n} r\binom{n}{r}\frac{r!}{s^{r-s}}(\alpha)^r\right] \qquad \textbf{(28)}$$

$$L = \sum_{r=s}^{n}(r-s)P_r = \sum_{r=s}^{n} rP_r - s\sum_{r=s}^{n} P_r = \overline{N} - s + \sum_{r=0}^{s-1}(s-r)P_r \Rightarrow$$

$$L = \overline{N} - s + P_0\sum_{r=0}^{s-1}(s-r)\binom{n}{r}(\alpha)^r \qquad \textbf{(29)}$$

Το μοντέλο M(n)/M/s (3)

Ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα και ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά, υπολογίζονται από τις σχέσεις (30) και (31), αντίστοιχα:

$$T = \frac{\overline{N}}{\lambda(n - \overline{N})} \qquad \textbf{(30)}$$

$$W = \frac{L}{\lambda(n - \overline{N})} \qquad \textbf{(31)}$$

όπου ο παρονομαστής εκφράζει τον μέσο ρυθμό των κλήσεων που πραγματικά εισέρχονται στο σύστημα.

Σημειώνουμε ότι η προηγούμενη ανάλυση ισχύει για εξωτερικό παρατηρητή!

Το μοντέλο M(n)/M/s (4)

<u>Για έναν εσωτερικό παρατηρητή</u>, θέτοντας τα λ_r, μ_r στην (14) και εφαρμόζοντας την ιδιότητα PASTA (Π[n]=P[n-1]) προκύπτουν οι σχέσεις:

$$W = \frac{h}{s}\Pi_0 \binom{n-1}{s}(vh)^s \sum_{r=0}^{n-s-1}(r+1)(n-s-1)_r \left(\frac{vh}{s}\right)^r \quad \textbf{(32)}$$

$$M(0) = \Pi_0 \binom{n-1}{s}(vh)^s \sum_{r=0}^{n-s-1}(n-s-1)_r \left(\frac{vh}{s}\right)^r \quad \textbf{(33)}$$

$$M(t) = \Pi_0 \binom{n-1}{s}(vh)^s \cdot e^{-st/h} \sum_{r=0}^{n-s-1}(n-s-1)_r \left(\frac{vh}{s}\right)^r \sum_{r=0}^{r}\frac{(st/h)^i}{i!} \quad \textbf{(34)}$$

$$\Pi_0 = \left[\sum_{r=0}^{s-1}\binom{n-1}{r}(vh)^r + \binom{n-1}{s}(vh)^s \sum_{r=0}^{n-s-1}(n-s-1)_r \left(\frac{vh}{s}\right)^r\right]^{-1} \quad \textbf{(35)}$$

Το μοντέλο M(n)/M/s (5)

Προκειμένου να υπολογίσουμε το προσφερόμενο φορτίο κίνησης α, θέτουμε λ τον ρυθμό αφίξεων, οπότε α=λh, όπου h είναι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης.

Συμβολίζοντας τον μέσο αριθμό κλήσεων στο σύστημα ως $\overline{\mathrm{N}}$

Έχουμε από την επέκταση του νόμου του Little: $\overline{\mathrm{N}} = \lambda T = \lambda(h + W)$

Επειδή, $a = vh(n - \overline{\mathrm{N}})$ και $\overline{\mathrm{N}} = a + \lambda W$ **(36)**

$$a = vh(n - a - \lambda W) = vhn - vha - vh\lambda W \Rightarrow$$

$$a = vhn - vha - vaW$$

προκύπτει τελικά ότι: $\alpha = nvh/[1+v(W+h)]$ **(37)**

η οποία αντιστοιχεί στην $vh = \dfrac{\alpha}{n - \alpha\left[1 - B(s, n, vh)\right]}$ του μοντέλου M(n)/M/s(0):

$$a = (n - \overline{\mathrm{N}})vh \Rightarrow \overline{\mathrm{N}} = (nvh - a)/(vh) = a_c = a(1 - B)$$

$$\Rightarrow a = nvh/(1 + vh(1 - B))$$

Το μοντέλο M(n)/M/s (6)

Παράδειγμα 2

Έστω τηλεπικοινωνιακό σύστημα στο οποίο προσφέρεται φορτίο κίνησης 0.1 erl από 5 πηγές κλήσεων. Αν ο χρόνος εξυπηρέτησης των κλήσεων είναι 0.333 sec και ο αριθμός των εξυπηρετητών είναι ίσος με 2 να υπολογισθούν :

α) Η μέση τιμή των κλήσεων στο σύστημα.

β) Ο μέσος χρόνος αναμονής των κλήσεων στο σύστημα.

Το μοντέλο M(n)/M/s (7)

ΛΥΣΗ

α) Η μέση τιμή των κλήσεων στο σύστημα υπολογίζεται από την σχέση:

$$\overline{N} = \sum_{r=0}^{n} r P_r = P_0 \left[\sum_{r=0}^{s-1} r \binom{n}{r} (\alpha)^r + \frac{1}{s!} \sum_{r=s}^{n} r \binom{n}{r} \frac{r!}{s^{r-s}} (\alpha)^r \right]$$

για n=5, α=0.1 και s=2, όπου:

$$P_0 = \left[\sum_{r=0}^{s-1} \binom{n}{r} (\alpha)^r + \sum_{r=s}^{n} \binom{n}{r} \frac{r!}{s^{r-s} s!} (\alpha)^r \right]^{-1} = 0.62$$

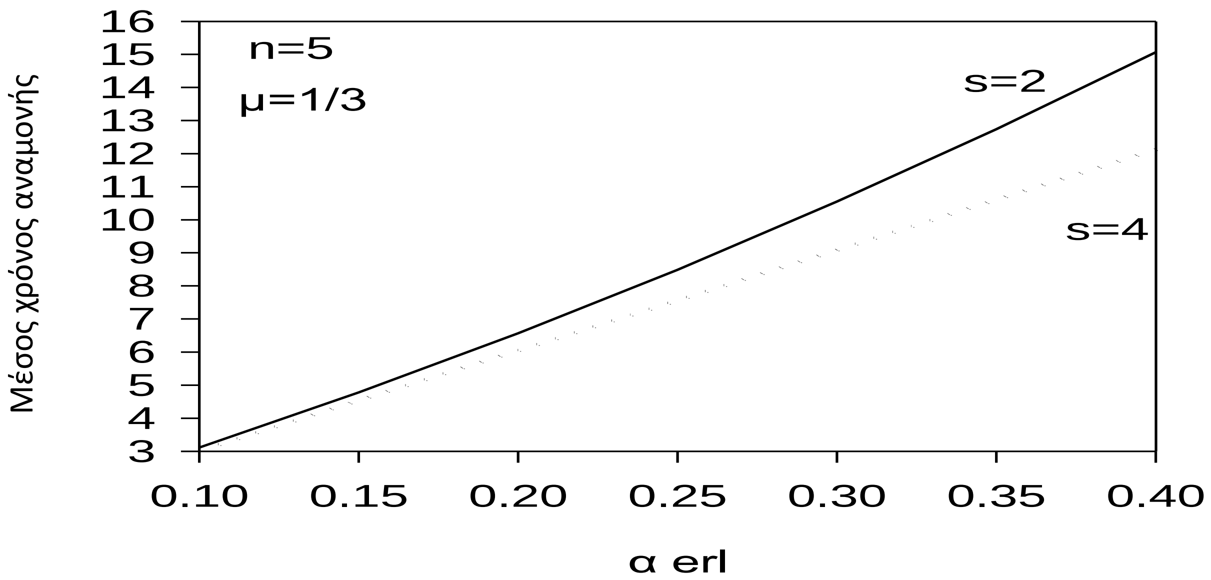
Προκύπτει τελικά ότι: $\overline{N} = 0.47$

Το μοντέλο M(n)/M/s (8)

β) Από την σχέση $T = \dfrac{\overline{N}}{\lambda(n - \overline{N})}$

υπολογίζουμε T = 3.11 sec.

Στην γραφική παράσταση του σχήματος φαίνεται η μεταβολή του μέσου χρόνου αναμονής των κλήσεων στο σύστημα σε sec για διάφορες τιμές του α και για δύο τιμές του s.



Τέλος Ενότητας