Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης

Ενότητα 4: Εφαρμογή των τύπων Erlang και Engset

Μιχαήλ Λογοθέτης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σκοποί ενότητας

- Περιγραφή και αναλυτική επίλυση παραδειγμάτων εφαρμογής των τύπων Erlang και Engset.

- Περιγραφή της διαδικασίας γέννησης – θανάτου κλήσεων μέσω παραδείγματος σε σύστημα απωλειών.

Περιεχόμενα ενότητας

- Διαστασιολόγηση ζεύξης
- Erlang B formula
- Πιθανότητα συμφόρησης κλήσεως
- Συγκεντρωτής Γραμμών - Σύστημα M(n)/M/s
- Συγκεντρωτής Γραμμών – Σύγκριση M(n)/M/s με M/M/s
- Πιθανότητα Απώλειας Κλήσεως
- Κυψελωτό Δίκτυο Ασύρματης Τηλεφωνίας – Υπολογισμός Αριθμού Χρηστών
- Διαδικασία Γέννησης – Θανάτου, Σύστημα Απωλειών

Διαστασιολόγηση ζεύξης (1)

Ας υποθέσομε ότι σε ένα αστικό (τερματικό) τηλεφωνικό κέντρο που εξυπηρετεί 10000 συνδρομητές, η μέση κίνηση ανά καλούντα συνδρομητή είναι 0.04 erl (originating traffic load), από το οποίο το 10% κατευθύνεται σε υπεραστικό κέντρο.

(**a**) Να σχεδιασθεί η χωρητικότητα (σε trunks) της ζεύξης του αστικού αυτού κέντρου προς το υπεραστικό για ποιότητα εξυπηρέτησης 1%.

(**b**) Να υπολογισθεί ο βαθμός εξυπηρέτησης (grade-of-service) της ζεύξης αυτής όταν η κίνηση διπλασιασθεί λόγω κάποιων εκτάκτων συνθηκών.

Διαστασιολόγηση ζεύξης (2)

Λύση

(**a**) Αφού η μέση προσφερομένη κίνηση ανά συνδρομητή είναι 0.04 erl και το κέντρο έχει 10000 συνδρομητές, η μέση τιμή της συνολικής προσφερομένης κίνησης των συνδρομητών θα είναι:

$$\alpha = 0.04 * 10000 = 400 \text{ erl.}$$

Από την κίνηση αυτή μόνο το 10% κατευθύνεται προς το υπεραστικό κέντρο, δηλαδή: $\alpha_{υπερ} = 400*10\% = 40$ erl.

Θέλουμε $E_s(40.0) \leq 1\%$. Από τους πίνακες του Erlang (ή με την βοήθεια Η/Υ) προκύπτει χωρητικότητα s = **53 trunks**.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕΣΩ INTEPNET: *erlang B calculator* (google search)

https://www.erlang.com/calculator/erlb/ Erlangs 40.00, Blocking 0.01, Lines = **53**

(**b**) Όταν η κίνηση διπλασιασθεί θα γίνει $\alpha_{υπερ} = 2*40 = 80$ erl.

Τότε ο GoS της ζεύξης θα είναι: $E_{53}(80.0) = 0.3582 =$ **35.82%**.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕΣΩ INTEPNET: *erlang B calculator* (google search)

https://www.erlang.com/calculator/erlb/ Erlangs 80.00, Lines 53, Blocking **= 0.358**

Erlang B formula (1)

Ορίζουμε τον παρονομαστή του B τύπου του Erlang ως G(s,α) για τον οποίο ισχύει:

$$G(s,a) = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \ldots + \frac{a^s}{s!}$$

(**a**)   Να δειχθεί ότι ο B τύπος του Erlang μπορεί να γραφεί υπό την μορφή:

$$E(s,\alpha) = 1 - \frac{d}{d\alpha} \log G(s,\alpha)$$

(**b**) Χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση για τον B τύπο του Erlang να υπολογιστεί η πιθανότητα E(s, α) για α=2 erl και s=0,1,2,3,4.

Erlang B formula (2)

Λύση

(**a**)

$$1-\frac{d}{d\alpha}\log G\left(s,\alpha\right)=1-\frac{G^{'}(s,\alpha)}{G(s,\alpha)}=1-\frac{\sum_{i=0}^{s}\frac{i\alpha^{i-1}}{i!}}{\sum_{i=0}^{s}\frac{\alpha^{i}}{i!}}=\frac{\sum_{i=0}^{s}\frac{\alpha^{i}}{i!}-\sum_{i=1}^{s}\frac{\alpha^{i-1}}{(i-1)!}}{\sum_{i=0}^{s}\frac{\alpha^{i}}{i!}}=\frac{\frac{\alpha^{s}}{s!}}{\sum_{i=0}^{s}\frac{\alpha^{i}}{i!}}=E(s,\alpha)$$

(**b**) $E(s,\alpha) = E_s(\alpha) = \alpha E_0(\alpha)/(s+\alpha E_{s-1}(\alpha))$, $E_0(\alpha)=1$ Για α=2.0 erl και s = 1, 2, 3, 4 παίρνουμε:

$E_1(2.0) = 2.0\, E_0(2.0)/(1+2.0E_0(2.0)) = 2.0/3.0 = 0.667$

$E_2(2.0) = 2.0E_1(2.0)/(2+2.0E_1(2.0)) = 2.0*0.667/(2+2.0*0.667) = 0.4$

$E_3(2.0) = 2.0E_2(2.0)/(3+2.0E_2(2.0)) = 2.0*0.4/(3+2.0*0.4) = 0.21$

$E_4(2.0) = 2.0E_1(2.0)/(4+2.0E_1(2.0)) = 2.0*0.21/(4+2.0*0.21) = 0.095$

Πιθανότητα συμφόρησης κλήσεως (1)

Να υπολογισθεί η τιμή της πιθανότητας απωλείας κλήσεως (call congestion), όταν ο αριθμός των εισερχομένων γραμμών (traffic sources) είναι 20, ο αριθμός των εξερχομένων εξυπηρετητών (outlets) είναι 8, και η προσφερομένη κίνηση ανά εισερχομένη γραμμή είναι 0.15 erl.

Πιθανότητα συμφόρησης κλήσεως (2)

Λύση

Εφαρμόζουμε στον Η/Υ τον αναδρομικό τύπο του Engset (call congestion probability)

$$B(s,n,vh)=\frac{(n-s)vhB(s-1,n,vh)}{s+(n-s)vhB(s-1,n,vh)}$$

όπου, ακολούθως, α = vh = 0.15 erl, s = 8 και n = 20. Το βασικό λογισμικό:

B=1.0

do i=1,s

*B = (n-i)*α*B/(i+(n-i)*α*B)*

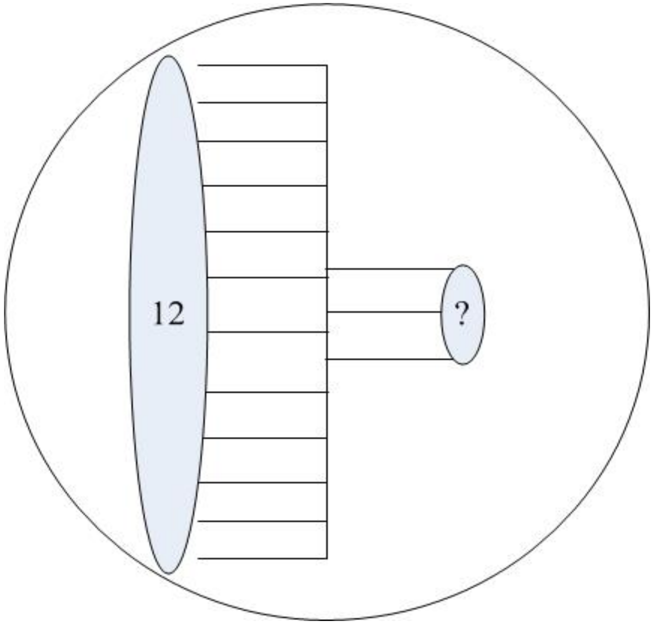
end do

Το προσφερόμενο φορτίο κίνησης συνολικά είναι: 8* 0.15 erl = 2.6 erl.

Οπότε προκύπτει: B = 0.136 %.

Συγκεντρωτής Γραμμών – Σύστημα M(n)/M/s (1)

Ένας συγκεντρωτής τηλεφωνικών γραμμών εξυπηρετεί 12 οικίες. Εκτιμάται ότι την ώρα μεγίστης αιχμής το προσφερόμενο φορτίο κίνησης είναι 2.4 erl. Αν ο επιθυμητός βαθμός εξυπηρέτησης της ζεύξης είναι 1%, πόσες γραμμές εξόδου πρέπει να έχει ο συγκεντρωτής;



Συγκεντρωτής Γραμμών – Σύστημα M(n)/M/s (2)

Λύση: Ο συγκεντρωτής γραμμών έχει περιορισμένες εισόδους (n=12), δηλ. πρόκειται για σύστημα M(n)/M/s. Πρέπει να υπολογίσουμε την χωρητικότητά του, s, με δεδομένα τον GoS≤1% και το συνολικό προσφερόμενο φορτίο κίνησης α=2.4 erl. Για την επίλυση του προβλήματος χρειαζόμαστε Η/Υ διότι έχουμε δύο επαναληπτικές διαδικασίες.

<u>1^{η} Επαναληπτική Διαδικασία:</u> Αφορά στον υπολογισμό της πιθανότητας απωλείας κλήσεως, Β, όταν δίδεται το συνολικό φορτίο κίνησης α (όχι το φορτίο κίνησης ανά ελεύθερη πηγή, vh).

<u>2^{η} Επαναληπτική Διαδικασία:</u> Αφορά στον υπολογισμό της ζητουμένης χωρητικότητας s του συστήματος. Αρχίζουμε με s = 1, και υπολογίζουμε την πιθανότητα απωλείας κλήσεως, Β, βάσει της 1^{ης} επαναληπτικής διαδικασίας. Όταν προκύπτει Β > GoS θα αυξάνουμε το s κατά 1, και θα υπολογίζουμε πάλι με την 1^{η} επαναληπτική διαδικασία, το Β. Αυτό θα επαναλαμβάνεται μέχρις ότου γίνει $B \leq$ GoS, δηλαδή: $B \leq 0.01$. Το πρόγραμμα FORTRAN που ακολουθεί, εκφράζει τις επαναληπτικές διαδικασίες (1^{η}: ENGSET και 2^{η}: NENGSET).

Συγκεντρωτής Γραμμών – Σύστημα M(n)/M/s (3)

```
program ENGS
external ENGSET
write(*,'(37H Key in:traffic, servers and sources ,$)')
read(*,*) a,is,n
IF (IS.EQ.0) THEN
write(*,'(37H Key in: Grade-of-Service:          ,$)')
READ(*,*) b
call NENGST(is,bn,b,a,n)
print *,' Servers=',is,' Blocking=',bn
ELSE
bn = ENGSET(a,is,n)
PRINT *, ' Blocking=',bn
END IF
stop
end
SUBROUTINE NENGST(IS,bn,b,a,n)
NMAX = 1000
DO IS =1,NMAX
```

```
        BN = ENGSET(A,IS,N)
        print *,' Number of Servers=',is,'     Blocking=',bn
        IF (B.GE.BN) RETURN
        END DO
        RETURN
        END
        REAL FUNCTION ENGSET(A,IS,N)
        ENGSET=0.0
1       aa=a/(n-a*(1-ENGSET))
        ENGSET=1.0
        do i=1,is
        ENGSET = (n-i)*aa*ENGSET/(i+(n-i)*aa*ENGSET)
        end do
        anew=n*aa/(1+aa*(1-ENGSET))
        if (abs(anew-a).gt.0.001) go to 1
        RETURN
        end
```

Συγκεντρωτής Γραμμών – Σύστημα M(n)/M/s (4)

Αν το «τρέξουμε» το πρόγραμμα FORTRAN (ENGS) στον H/Y μας, για δεδομένα εισόδου:

traffic a=2.4, **servers is=0**, **sources n=12** και **Grade-of-Service B=0.01**,

θα μας δώσει τελικά **6 γραμμές εξόδου** (και **blocking 0.00962 = 0.962% < 1%)**

Ακολουθεί η εκτύπωση της οθόνης του H/Y όταν τρέχουμε το πρόγραμμα, μέσω της εντολή print, της υπορουτίνας NENGST.

Key in: traffic, servers and sources 2.4 0 12

Key in: Grade-of-Service: 0.01

Number of Servers=	*1*	*Blocking=*	*0.7006748*
Number of Servers=	*2*	*Blocking=*	*0.4447946*
Number of Servers=	*3*	*Blocking=*	*0.2451970*
Number of Servers=	*4*	*Blocking=*	*0.1104983*
Number of Servers=	*5*	*Blocking=*	*3.8135383E-02*
Number of Servers=	*6*	*Blocking=*	*9.6186353E-03*
Servers=	*6*	*Blocking=*	*9.6186353E-03*

Συγκεντρωτής Γραμμών – Σύγκριση M(n)/M/s με M/M/s (1)

Ένας συγκεντρωτής τηλεφωνικών γραμμών εξυπηρετεί 20 οικίες, που προσφέρουν κίνηση 4.4 erl.

(a) Αν ο επιθυμητός βαθμός εξυπηρέτησης της ζεύξης είναι 1%, πόσες γραμμές εξόδου πρέπει να έχει ο συγκεντρωτής;

(**b**) Αν το φορτίο κίνησης μειωθεί σε 0.8 erl πόσες εξόδους πρέπει να έχει ο συγκεντρωτής;

(**c**) Αν χρησιμοποιηθεί το μοντέλο M/M/s (Erlang B-formula) πόσες εξόδους πρέπει να έχει ο συγκεντρωτής σε κάθε περίπτωση φορτίου (4.4 και 0.8 erl); Δικαιολογείστε τις διαφορές.

Συγκεντρωτής Γραμμών – Σύγκριση M(n)/M/s με M/M/s (2)

Λύση

(**a**) Ο συγκεντρωτής γραμμών έχει περιορισμένες εισόδους (n = 20), δηλ. πρόκειται για σύστημα M(n)/M/s. Πρέπει να υπολογίσουμε την χωρητικότητά του, s, με δεδομένα τον GoS ≤ 1% και το συνολικό προσφερόμενο φορτίο κίνησης α = 4.4 erl. Για την επίλυση του προβλήματος θα χρησιμοποιήσουμε το πρόγραμμα FORTRAN (ENGS) της προηγούμενης άσκησης, για δεδομένα εισόδου:

traffic a = 4.4, **servers is = 0**, **sources n = 20** και **Grade-of-Service B = 0.01**.

Θα μας δώσει (βλέπε εκτέλεση προγράμματος στην επομένη σελίδα):

9 γραμμές εξόδου (και **blocking 0.00921 = 0.921% < 1%)**.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕΣΩ ΙΝΤΕΡΝΕΤ: *Engset calculator* (google search)

https://www.erlang.com/calculator/engset/

*Number of traffic sources 20, Erlangs 4.4, Blocking = 0.01, Lines = **9***

Συγκεντρωτής Γραμμών – Σύγκριση M(n)/M/s με M/M/s (3)

Ακολουθεί η εκτύπωση της οθόνης του Η/Υ όταν τρέχουμε το πρόγραμμα αυτό (εντολή print, της υπορουτίνας NENGST).

Key in: traffic, servers and sources 4.4 0 20

Key in: Grade-of-Service: 0.01

Number of Servers= 1 Blocking= 0.8133950

Number of Servers= 2 Blocking= 0.6380733

Number of Servers= 3 Blocking= 0.4774245

Number of Servers= 4 Blocking= 0.3355517

Number of Servers= 5 Blocking= 0.2169355

Number of Servers= 6 Blocking= 0.1255822

Number of Servers= 7 Blocking= 6.2948100E-02

Number of Servers= 8 Blocking= 2.6508367E-02

Number of Servers= 9 Blocking= 9.2098489E-03

Servers= 9 Blocking= 9.2098489E-03

Συγκεντρωτής Γραμμών – Σύγκριση M(n)/M/s με M/M/s (4)

(b) «Τρέχουμε» στον Η/Υ μας το πρόγραμμα ENGS για δεδομένα εισόδου:

traffic a = 0.8, servers is = 0, sources n = 20 και Grade-of-Service B = 0.01.

Θα μας δώσει **4 γραμμές εξόδου** (και **blocking 0.00538 = 0.538% < 1%**). Ακολουθεί η εκτύπωση της οθόνης του Η/Υ:

Key in: traffic, servers and sources 0.8 0 20

Key in: Grade-of-Service: 0.01

Number of Servers= 1 Blocking= 0.4373662

Number of Servers= 2 Blocking= 0.1410258

Number of Servers= 3 Blocking= 3.2372974E-02

Number of Servers= 4 Blocking= 5.3828852E-03

Servers = 4 Blocking= 5.3828852E-03

ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕΣΩ ΙΝΤΕΡΝΕΤ: *Engset calculator* (google search)

https://www.erlang.com/calculator/engset/

Number of traffic sources 20, Erlangs 0.8, Blocking = 0.01, Lines = ***4***

Συγκεντρωτής Γραμμών – Σύγκριση M(n)/M/s με M/M/s (5)

(**c**) Αν αντί του μοντέλου M(n)/M/s χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο M/M/s, και επομένως αντί του τύπου του Engset για τον υπολογισμό της πιθανότητας απωλείας κλήσεως χρησιμοποιήσουμε την B-Formula του Erlang, για $E_s(4.4) \leq 1\%$, από τους πίνακες του Erlang (ή με την βοήθεια Η/Υ) θα βρούμε **10 γραμμές εξόδου** (έναντι **6**).

Για προσφερόμενο φορτίο κίνησης α = 0.8 erl, από την B-Formula του Erlang, για $E_s(0.8) \leq 1\%$, βρίσκουμε s = **4 γραμμές εξόδου**, όπως και μέσω του M(n)/M/s.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕΣΩ ΙΝΤΕΡΝΕΤ: *erlang B calculator* (google search)

https://www.erlang.com/calculator/erlb/

Erlangs 4.40, Blocking 0.01, Lines = **10** και Erlangs 0.8, Blocking 0.01, Lines = **4**

Δικαιολόγηση: Επειδή το συνολικό φορτίο των 0.8 erl είναι πολύ μικρό, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι 20 γραμμές εισόδου είναι πάρα πολλές (πρακτικά άπειρες) και επομένως ο υπολογισμός της χωρητικότητας του συστήματος (γραμμές εξόδου του συγκεντρωτή) βάσει του τύπου απωλειών του Engset, δίδει τα ίδια αποτελέσματα με τον B τύπο του Erlang. Όσο το προσφερόμενο φορτίο κίνησης μικραίνει, τόσο τα αποτελέσματα των δύο μοντέλων θα τείνουν να συμπίπτουν, ενώ αντιθέτως όσο το προσφερόμενο φορτίο κίνησης μεγαλώνει τόσο τα αποτελέσματα των δύο μοντέλων θα αποκλίνουν.

Πιθανότητα Απώλειας Κλήσεως (1)

Μια εταιρεία έχει ένα κέντρο κλήσεων με δύο τηλεφωνικές γραμμές. Μετρήσεις έδειξαν ότι και οι δύο τηλεφωνικές γραμμές είναι κατειλημμένες το 10% του χρόνου, κατά το χρονικό διάστημα παρακολούθησής τους. Επίσης εμετρήθη ότι η μέση διάρκεια των τηλεφωνικών κλήσεων είναι 10 min. Να υπολογισθεί η πιθανότητα απωλείας κλήσεως στην περίπτωση που η μέση διάρκεια των κλήσεων αυξηθεί από 10 σε 15 min.

Πιθανότητα Απώλειας Κλήσεως (2)

Λύση

Έχουμε ότι h = 10 min και GoS≤10% = 0.1, δηλ. $E_2(\alpha) \leq 0.1 \Rightarrow \alpha = 0.595$ erl.

(από τους πίνακες του Erlang ή μέσω Η/Υ).

Αλλά $\alpha = \lambda h \Rightarrow \lambda = \alpha / h \Rightarrow \lambda = 0.595 / 10 \Rightarrow \lambda = 0.0595$ κλήσεις/min.

Αν το h γίνει h'=15 min, τότε το νέο φορτίο κίνησης θα είναι:

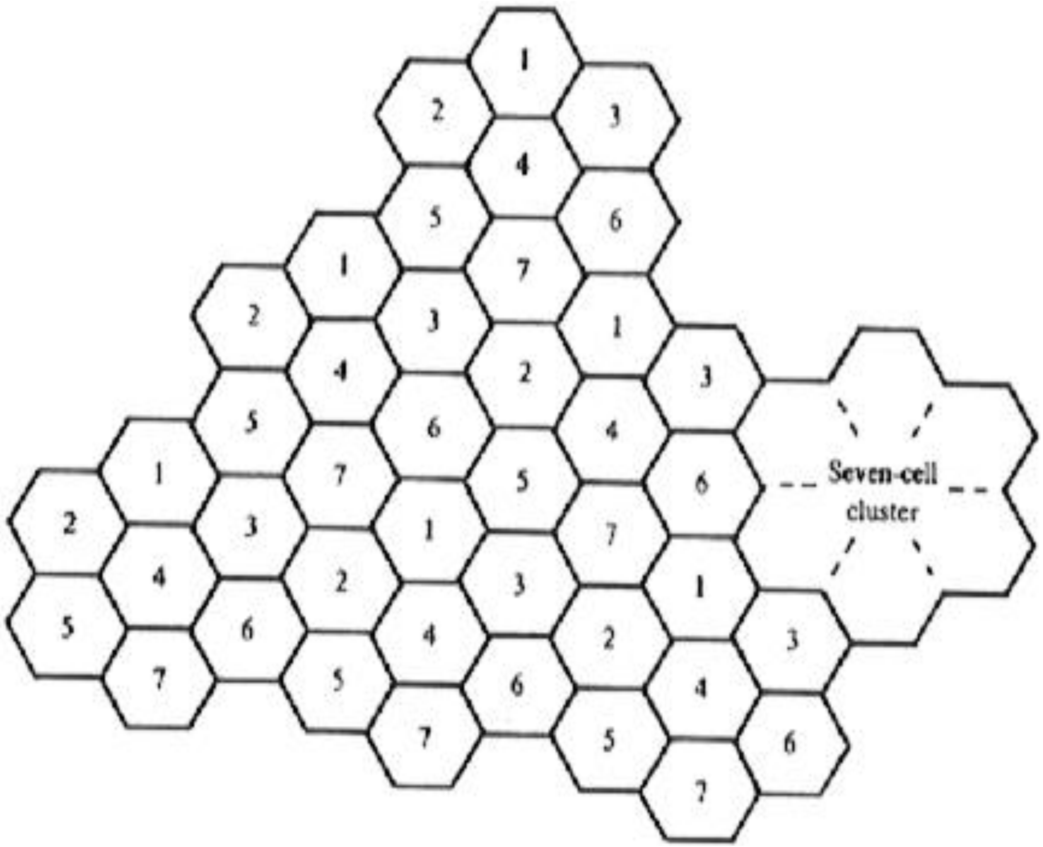
$\alpha' = \lambda h' = 0.0595*15 = 0.8925$ erl,

και το νέο blocking θα είναι:

$$E_2(0.8925) = 0.174 = 17.4\ \%$$

Κυψελωτό Δίκτυο Ασύρματης Τηλεφωνίας – Υπολογισμός Αριθμού Χρηστών (1)

Αστική περιοχή εξυπηρετείται από ασύρματο κυψελωτό δίκτυο συνολικού εύρους ζώνης συχνοτήτων 28MHz, στο οποίο χρησιμοποιούνται συστάδες των 7 κυψελών, όπως απεικονίζεται στο κατωτέρω σχήμα:



Κυψελωτό Δίκτυο Ασύρματης Τηλεφωνίας – Υπολογισμός Αριθμού Χρηστών (2)

Το δίκτυο χρησιμοποιεί ραδιοδίαυλους συνολικού εύρους 400kHz και για τις δύο κατευθύνσεις επικοινωνίας, οι οποίοι υποστηρίζουν 8 κανάλια χρηστών (μέσω συστήματος πολυπλεξίας με επιμερισμό χρόνου). Ένας χρήστης, κατά μέσο όρο, κάνει 1 κλήση ανά ώρα, επί 6 min. Θεωρήστε το δίκτυο ως σύστημα απωλειών Erlang, με βαθμό εξυπηρέτησης (Grade of Service - GoS) 1%. Να υπολογίσετε:

(**a**) Τον αριθμό των ραδιοδιαύλων ανά κυψέλη και σε ολόκληρο το δίκτυο, καθώς και την συνολική χωρητικότητα σε κανάλια χρηστών ανά κυψέλη και σε ολόκληρο το δίκτυο.

(**b**) Το προσφερόμενο φορτίο κίνησης σε κάθε κυψέλη.

(**c**) Τον αριθμό των χρηστών που μπορεί να εξυπηρετήσει το δίκτυο.

Κυψελωτό Δίκτυο Ασύρματης Τηλεφωνίας – Υπολογισμός Αριθμού Χρηστών (3)

Λύση

(**a**) Ο αριθμός των ραδιοδιαύλων ανά κυψέλη είναι:
R_c=28000kHz/(400kHz*7)=10.

Όλο το δίκτυο, όπως προκύπτει από το σχήμα έχει 49 κυψέλες, άρα 490 διαύλους.

Ο συνολικός αριθμός καναλιών χρήστη ανά κυψέλη είναι C_c=10*8=80, και σε ολόκληρο το δίκτυο 80*49=3920 κανάλια.

(**b**) Για $E_{80}(\alpha) \leq 1\%$, από την B-Formula του Erlang υπολογίζουμε φορτίο κίνησης α = 65.4 erl για κάθε κυψέλη.

(**c**) Αφού κάθε χρήστης προσφέρει φορτίο κίνησης (1 κλήση/60 min)*(6 min) = 0.1 erl,

η κίνηση αυτή θα προέλθει κατά μέσον όρο από 65.4/0.1 = 654 χρήστες ανά κυψέλη.

Ο συνολικός αριθμός χρηστών στο δίκτυο (για GoS=1%) θα είναι 49*654=32046.

Διαδικασία Γέννησης – Θανάτου, Σύστημα Απωλειών (1)

Θεωρούμε το σύστημα απωλειών M/M/3. Ο ρυθμός άφιξης των κλήσεων στο σύστημα είναι λ=4 κλήσεις/min, ενώ ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ=1 κλήση/min. Κάθε κλήση για να εξυπηρετηθεί καταλαμβάνει έναν εξυπηρετητή.

(**a**) Κατασκευάστε το διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων του συστήματος.

(**b**) Γράψτε όλες τις εξισώσεις τοπικής ισορροπίας του συστήματος.

(**c**) Γράψτε όλες τις εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας του συστήματος.

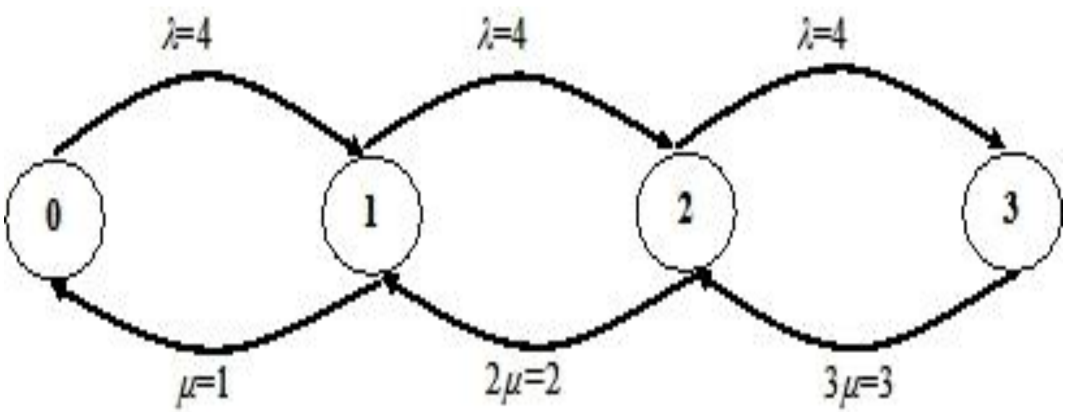
(**d**) Υπολογίστε τις πιθανότητες μονίμου καταστάσεως, P_0, P_1 P_2 και P_3 βάσει των εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας.

(**e**) Υπολογίστε την πιθανότητα συμφόρησης στον χρόνο (time congestion probability) και την πιθανότητα συμφόρησης των κλήσεων χρόνο (call congestion probability).

Διαδικασία Γέννησης – Θανάτου, Σύστημα Απωλειών (2)

Λύση

(**a**) Το διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων του συστήματος έχει ως εξής:



Διαδικασία Γέννησης – Θανάτου, Σύστημα Απωλειών (3)

(**b**) Οι εξισώσεις τοπικής ισορροπίας, «ρυθμός ανόδου» = «ρυθμός καθόδου», ισχύουν **μόνο** μεταξύ γειτονικών καταστάσεων.

Για το ζεύγος (0,1) οι εξισώσεις είναι:

$$\lambda P_0 = 1\mu P_1$$

Για το ζεύγος (1,2) οι εξισώσεις είναι:

$$\lambda P_1 = 2\mu P_2$$

Για το ζεύγος (2,3) οι εξισώσεις είναι:

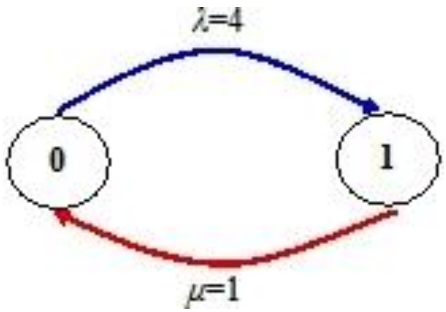
$$\lambda P_2 = 3\mu P_3$$

Διαδικασία Γέννησης – Θανάτου, Σύστημα Απωλειών (4)

(**c**) Εφαρμόζουμε σε κάθε κατάσταση *n*, τις εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας:

«ρυθμός εισόδου» = «ρυθμός εξόδου»

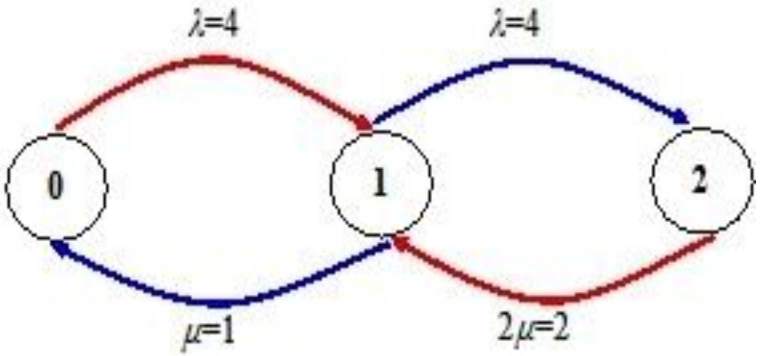
Για *n*=0:



$\mu P_1 = \lambda P_0 \rightarrow P_1 = 4P_0$ (1)

Διαδικασία Γέννησης – Θανάτου, Σύστημα Απωλειών (5)

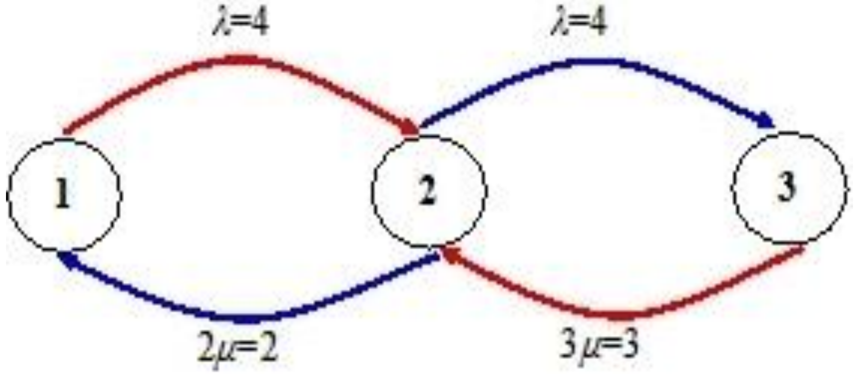
Για n=1:



$$\lambda P_0+2\mu P_2=\lambda P_1+\mu P_1 \Rightarrow 4P_0+2P_2=4P_1+P_1 \Rightarrow 4P_0+2P_2=4P_1 \qquad (2)$$

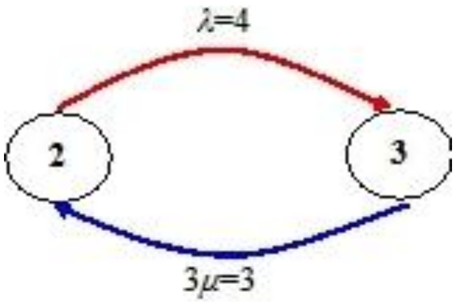
Διαδικασία Γέννησης – Θανάτου, Σύστημα Απωλειών (6)

Για n=2:



$$\lambda P_1+3\mu P_3=\lambda P_2+2\mu P_2 \Rightarrow 4P_1+3P_3=4P_2+2P_2 \Rightarrow 4P_1+3P_3=6P_2 \quad (3)$$

Για n=3:



$$\lambda P_2=3\mu P_3 \Rightarrow 4P_2=3P_3 \quad (4)$$

Διαδικασία Γέννησης – Θανάτου, Σύστημα Απωλειών (7)

(**d**) Οι 4 εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας με τους 4 αγνώστους (P_0, P_1, P_2, P_3) δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Γι' αυτό αντικαθιστούμε την μία (όποια μας βολεύει) π.χ. την *(2)* με την

$$P_0+P_1+P_2+P_3=1 \qquad (5)$$

Από (3) και (4) $\Rightarrow 4P_1 = 2P_2$ και λόγω της (1) $\Rightarrow P_2 = 8P_0$ (6)

Από (4) $\Rightarrow$ $P_3 = (4/3)P_2 = (32/3)P_0$ (7)

Αντικαθιστώντας στην *(5)* τις *(1)*,*(6)* και *(7)*, έχομε:

$P_0+4P_0+8P_0+(32/3)P_0=1 \Rightarrow (71/3)P_0=1 \Rightarrow P_0=4.23\%$

Άρα: $P_0=16.90\%$, $P_2=33.80\%$, $P_0=45{,}07\%$.

Διαδικασία Γέννησης – Θανάτου, Σύστημα Απωλειών (8)

(**e**) Επειδή οι αφίξεις των κλήσεων ακολουθούν την κατανομή Poisson, λόγω της ιδιότητας PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages), η πιθανότητα συμφόρησης των κλήσεων (δηλ. η πιθανότητα απώλειας κλήσεως που μετράει ένας εσωτερικός παρατηρητής, ως το πηλίκο των αποτυχημένων κλήσεων προς τις συνολικές κλήσεις) ταυτίζεται με την πιθανότητα συμφόρησης στον χρόνο (δηλ. την πιθανότητα απώλειας κλήσεως που μετράει ένας εξωτερικός παρατηρητής, ως το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα είναι πλήρως κατειλημμένο).

Η ζητουμένη πιθανότητα είναι η $P_3 = 45.07\%$

Τέλος Ενότητας