Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης

Ενότητα 13: Προσομοίωση

Μιχαήλ Λογοθέτης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σκοποί ενότητας

- Περιγραφή βασικών μεθόδων προσομοίωσης
- Περιγραφή μεθόδων δημιουργίας τυχαίων αριθμών
- Περιγραφή μεθόδων ανάλυσης των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης
- Περιγραφή βασικών λαθών στις προσομοιώσεις

Περιεχόμενα ενότητας

- Μέθοδοι προσομοίωσης
- Δημιουργία τυχαίων αριθμών
- Ανάλυση των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης
- Συνήθη λάθη στις προσομοιώσεις

Η μέθοδος της προσομοίωσης
έναντι της αναλυτικής και της αριθμητικής μεθόδου

Μερικές φορές, οι επακριβείς αναλυτικές μέθοδοι (π.χ. στην θεωρία τηλεπικοινωνιακής κινήσεως) παρουσιάζουν αδυναμία να αναλύσουν ικανοποιητικά ένα σύστημα (π.χ. δίκτυα επικοινωνιών μεγάλης κλίμακας). Ως εναλλακτική λύση χρησιμοποιείται η **μέθοδος της προσομοίωσης στον υπολογιστή (simulation)**. Στον πίνακα που ακολουθεί, γίνεται σύγκριση ανάμεσα στις τρεις μεθόδους επίλυσης προβλημάτων.

Μέθοδος	Εύρος Εφαρμογών	Ακρίβεια Αποτελέσματος	Υπολογιστικός Χρόνος	Απαιτούμενη Μνήμη	Μέγεθος Προγράμματος
Αναλυτική μέθοδος	Μικρό	Υψηλή	Μικρός	Μικρή	Μικρό
Αριθμητική Ανάλυση	Μεσαίο	Μεσαία	Μεσαίος	Μεσαία	Μεσαίο
Προσομοίωση	Μεγάλο	Χαμηλή	Μεγάλος	Μεγάλη	Μεγάλο

Χρησιμότητα της προσομοίωσης

Η προσομοίωση είναι χρήσιμη όχι μόνο στην περίπτωση που η αναλυτική επίλυση δεν είναι εφικτή, αλλά και όταν ο υπολογισμός με αριθμητικές μεθόδους της αναλυτικής λύσης είναι δύσκολος, ή πρέπει να πιστοποιήσουμε την εγκυρότητα διαφόρων προσεγγιστικών λύσεων.

Επίσης, η προσομοίωση χρησιμοποιείται σε διάφορα στάδια σχεδιασμού και λειτουργίας ενός (π.χ. τηλεπικοινωνιακού) συστήματος, όπως:

Α) Στην διασαφήνιση ενός προβλήματος (π.χ. τηλεπικοινωνιακής κινήσεως), ώστε εν συνεχεία να ανατροφοδοτηθεί ο σχεδιασμός του υπό μελέτη συστήματος.

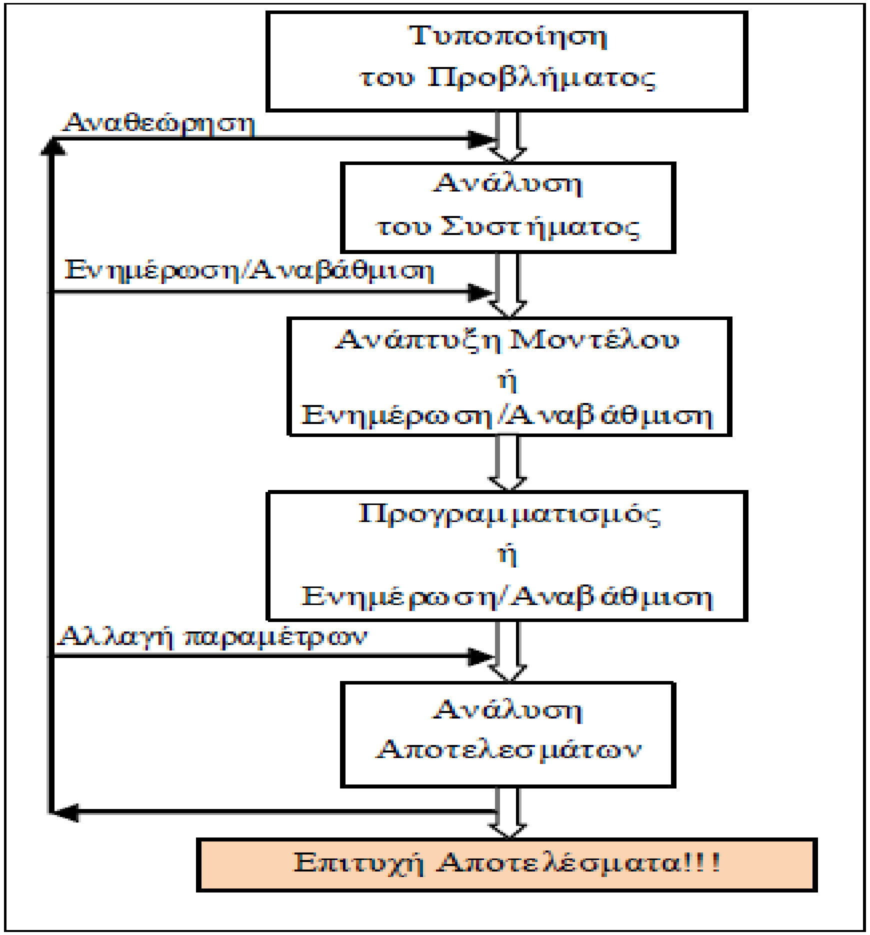
Β) Στην εκτίμηση της καλής λειτουργίας ενός συστήματος

Γ) Στην επιβεβαίωση της ευρύτητας (γενίκευσης) της εφαρμογής του συστήματος.

Δ) Στην εκτίμηση της απόκρισης του συστήματος σε **σφάλματα** και **υπερφόρτωση** (πώς συμπεριφέρεται ένα δίκτυο σε περίπτωση υπερφόρτωσης), για τον καθορισμό των ενδεδειγμένων μέτρων.

Δημιουργία προσομοίωσης

Στο ακόλουθο διάγραμμα παρουσιάζεται συνολικά η μέθοδος της προσομοίωσης, από τον σχεδιασμό έως την επίλυση του προβλήματος.



Μέθοδοι προσομοίωσης (1)

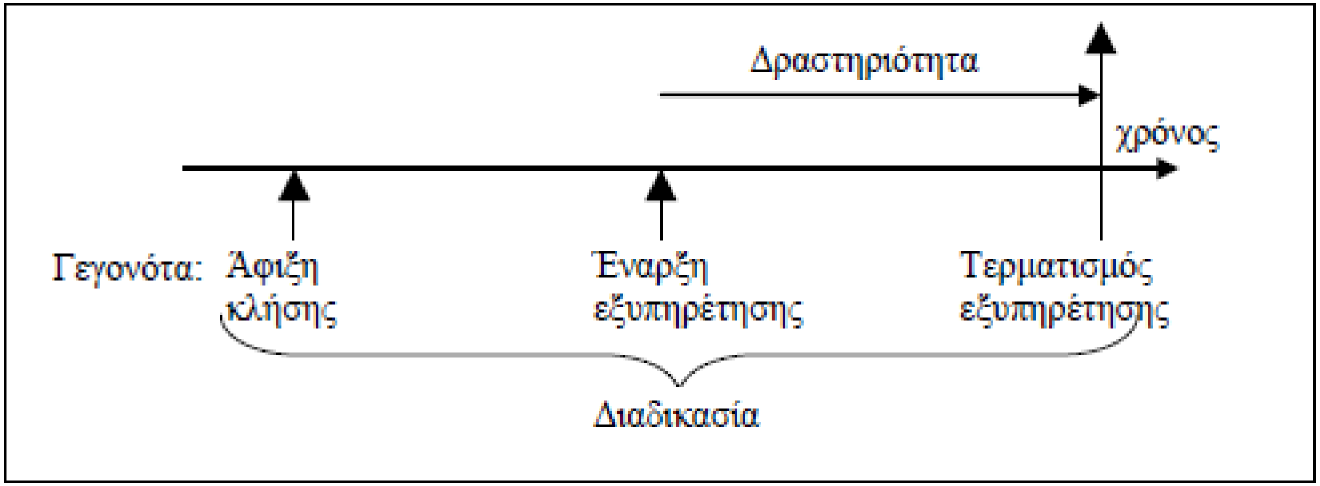
Σύλληψη του προβλήματος και μοντελοποίηση

Η σύλληψη του προβλήματος και η μοντελοποίησή του τοποθετούνται στην αρχή της διαδικασίας προσομοίωσης, και είναι καθοριστικοί παράγοντες για την επίτευξη μιας επιτυχημένης προσομοίωσης.

Γενικώς υπάρχουν δύο είδη προσομοιώσεων, η συνεχής και η διακριτή. Η προσομοίωση της τηλεπικοινωνιακής κινήσεως ταξινομείται στην προσομοίωση διακριτών γεγονότων. Αυτό σημαίνει πως η διακριτή κατάσταση (πλήθος κλήσεων) του συστήματος μεταβάλλεται από μια γέννηση ή τερματισμό μιας κλήσης.

Μέθοδοι προσομοίωσης (2)

Όπως φαίνεται και στο σχήμα, υπάρχουν τρεις παράμετροι βάσει των οποίων κατασκευάζουμε ένα μοντέλο προσομοίωσης διακριτών γεγονότων: το γεγονός (συμβάν – event), η διαδικασία (process) και η δραστηριότητα (activity).



Μέθοδοι προσομοίωσης (3)

(α) *Μοντελοποίηση βάσει γεγονότων (event-oriented modeling)*

Με την μέθοδο αυτή το μοντέλο προσομοίωσης τυποποιείται περιγράφοντας τις αλλαγές των καταστάσεων λόγω των διαφόρων γεγονότων του συστήματος, όπως η γέννηση και ο τερματισμός μιας κλήσης. Προτιμούμε αυτή την μέθοδο όταν χρησιμοποιούμε γλώσσες προγραμματισμού γενικού σκοπού όπως FORTRAN ή PL/1.

(β) *Μοντελοποίηση βάσει διαδικασιών (entity-oriented modeling)*

Με αυτή την μέθοδο προσπαθούμε να περιγράψουμε την συμπεριφορά των οντοτήτων (π.χ. κλήσεων) του συστήματος. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται στις περιπτώσεις που χρησιμοποιούνται γλώσσες προσομοίωσης, όπως GPSS ή SLAM II.

(γ) *Μοντελοποίηση βάσει δραστηριοτήτων (activity-oriented modeling)*

Με την μέθοδο αυτή προσπαθούμε να περιγράψουμε τις χρονικές στιγμές της αρχής και του τερματισμού των δραστηριοτήτων, όπως είναι η διάρκεια κλήσης. Αυτή η μέθοδος ταιριάζει στην μοντελοποίηση συστημάτων στα οποία ο χρόνος αναμονής εξαρτάται από την κατάσταση του συστήματος (πλήθος υπαρχουσών κλήσεων). Ωστόσο, επειδή η προσομοίωση επιτελείται ανιχνεύοντας τις δραστηριότητες του συστήματος, ο χρόνος εκτέλεσης είναι μεγαλύτερος απ’ ό,τι στη μοντελοποίηση γεγονότων.

Μέθοδοι προσομοίωσης (4)

Γλώσσες προγραμματισμού για προσομοίωση

Υπάρχουν δύο είδη γλωσσών προγραμματισμού που χρησιμοποιούνται στην προσομοίωση: **οι γλώσσες προσομοίωσης και οι γλώσσες γενικού σκοπού**. Στην $1^{η}$ κατηγορία ανήκουν οι GPSS, SIMSCRIPT και SLAM II ενώ στη $2^{η}$ οι FORTRAN, PL/1 και ALGOL. Χαρακτηριστικά των ειδικών γλωσσών προσομοίωσης φαίνονται στον πίνακα.

Οι γλώσσες προσομοίωσης συμπεριλαμβάνουν τις ακόλουθες συναρτήσεις:
1) Δημιουργία τυχαίων αριθμών, 2) Εκτέλεση χρονοδιαγραμμάτων, 3) Σώσιμο δεδομένων, στατιστική ανάλυση, ποικιλία παρουσίασης αποτελεσμάτων.

Γλώσσα	GPSS	SIMSCRIPT	SLAM II
Προαπαιτούμενες Γνώσεις	Καμμία	FORTRAN ή C	Καμμία (διασύνδεση με FORTRAN)
Σύμβολα Διαγράμματος Ροής	Ειδικά	Μη Ειδικά	Ειδικά
Μέθοδος Μοντελοποίησης	Βάσει των Διαδικασιών	Βάσει των Γεγονότων	Βάσει των Διαδικασιών, ή Βάσει των Γεγονότων
Μονάδα Προγραμματισμού	Block	Πρόταση SIMSCRIPT, Ρουτίνα Γεγονότων	Δραστηριότητα Κόμβου
Οντότητα Προσομοίωσης	Συναλλαγή (transaction)	Προσωρινή Οντότητα	Οντότητα

Μέθοδοι προσομοίωσης (5)

Το πλεονέκτημα της χρήσης <u>ειδικών γλωσσών προσομοίωσης</u> είναι ότι δεν χρειάζεται να προγραμματίσουμε συναρτήσεις όπως αυτές που προαναφέραμε, κι ότι διευκολύνεται ο προγραμματισμός απ’ την στιγμή που το μοντέλο έχει τυποποιηθεί.

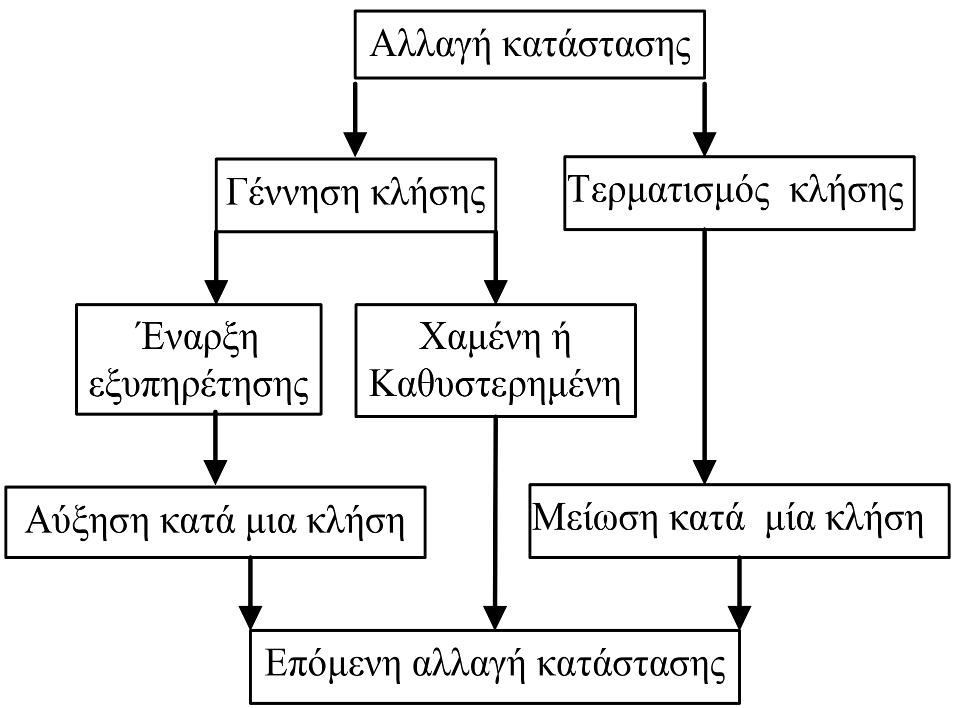
Απ’ την άλλη πλευρά, <u>οι γλώσσες γενικού σκοπού</u> είναι πιο ευπροσάρμοστες από τις ειδικές γλώσσες προσομοίωσης. Επιπλέον μπορούν να επιτύχουν ταχύτερη εκτέλεση.

Η επιλογή του είδους της γλώσσας εξαρτάται από πολλούς παράγοντες όπως η ευκολία χρήσης, οι γνώσεις του προγραμματιστή, τα χαρακτηριστικά των μοντέλων κ.λ.π. Για διευκόλυνση της εκμάθησης των γλωσσών έχουν αναπτυχθεί ειδικά συστήματα προσομοίωσης, όπως π.χ. προσομοιωτές με γραφική αναπαράσταση της εισόδου.

Μέθοδοι προσομοίωσης (6)

Γλώσσες προγραμματισμού γενικού σκοπού – Η μέθοδος της Μαρκοβιανής αλυσίδας ή μέθοδος της ρουλέτας

Προσομοιώνει απευθείας την Μαρκοβιανή αλυσίδα που αναπαριστά τις μεταβολές των καταστάσεων ενός συστήματος άσχετα με την πάροδο του χρόνου. Η αρχή λειτουργίας της μεθόδου απεικονίζεται στο σχήμα.



Μέθοδοι προσομοίωσης (7)

Η μέθοδος της Μαρκοβιανής αλυσίδας ή μέθοδος της ρουλέτας

Βασίζεται στο γεγονός ότι η κατάσταση του συστήματος (αριθμός κλήσεων) αυξάνεται ή μειώνεται κατά μία μονάδα, ανάλογα με την άφιξη ή τον τερματισμό μίας κλήσης. Οι πιθανότητες της άφιξης ή του τερματισμού των κλήσεων καθορίζονται από τον ρυθμό άφιξης ή τον ρυθμό εξυπηρέτησης.

Η μέθοδος της Μαρκοβιανής αλυσίδας εφαρμόζεται σε συστήματα που περιγράφονται από Μαρκοβιανές αλυσίδες. Χρειάζεται δε μικρότερο υπολογιστικό χρόνο και μικρότερη μνήμη για την προσομοίωση ενός συστήματος σε σύγκριση με την μέθοδο του χρονικού εντοπισμού. Χαρακτηριστικό γνώρισμα της μεθόδου είναι η έλλειψη της εννοίας του χρόνου. Έτσι η μέθοδος είναι ικανοποιητική για προσομοίωση συστημάτων χωρίς ουρές αναμονής, όπως π.χ. τηλεφωνικών δικτύων.

Μέθοδοι προσομοίωσης (8)

Παράδειγμα 1 – Εφαρμογή της μεθόδου σε σύστημα M/M/s

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα φορτίο κίνησης α erl, από αφίξεις κλήσεων Poisson και ο χρόνος εξυπηρέτησης των κλήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή h. Τότε, η πιθανότητα μια κλήση να γεννηθεί στο απειροστό διάστημα Δt, είναι (α/h)Δt.

Αν n είναι το πλήθος των κλήσεων που εξυπηρετούνται αυτή την στιγμή από το σύστημα, η πιθανότητα τερματισμού μίας κλήσης στο Δt είναι (n/h)Δt. Όταν μία κλήση καταφθάνει στο σύστημα ή αποχωρεί απ' αυτό διότι εξυπηρετήθηκε, η κατάσταση του συστήματος μεταβάλλεται από n σε (n+1) ή από n σε (n-1), αντιστοίχως, για $1 \leq n \leq s-1$. Για n = 0, δεν συμβαίνει κανένας τερματισμός, ενώ για n=s μία κλήση που καταφθάνει θα εγκαταλείψει αμέσως το σύστημα, κάτι που θεωρείται μεταβολή κατάστασης.

Μέθοδοι προσομοίωσης (9)

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

Δεδομένου ότι συμβαίνει μια μεταβολή κατάστασης, η υπό συνθήκη πιθανότητα ότι η μεταβολή αναφέρεται σε άφιξη, δίνεται από το θεώρημα Bayes:

$$\mathrm{P}_\alpha = \frac{(\alpha/h)\Delta t}{(\alpha/h)\Delta t + (n/h)\Delta t} = \frac{\alpha}{\alpha + n} \qquad \textbf{(1)}$$

Η υπό συνθήκη πιθανότητα ότι η μεταβολή κατάστασης συνέβη λόγω τερματισμού μιας κλήσης, δίνεται από την σχέση:

$$\mathrm{P}_b = \frac{n}{\alpha + n} \qquad \textbf{(2)}$$

Έστω η τυχαία μεταβλητή Y η οποία ακολουθεί την **ομοιόμορφη κατανομή** U(0,1):

$$P(Y \le y) = \begin{cases} 1, & y \ge 1 \\ y, & 0 < y < 1 \\ 0, & y \le 0 \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

Μέθοδοι προσομοίωσης (10)

Σε τηλεπικοινωνιακή ζεύξη χωρητικότητας C, προσφέρεται φορτίο κίνησης α erl.

Δεδομένου ότι συνέβη μια μεταβολή κατάστασης, η πιθανότητα ότι η μεταβολή της κατάστασης συνέβη λόγω άφιξης μιας κλήσης, είναι:

$$P_{\alpha\varphi} = \frac{\alpha}{\alpha + n}$$

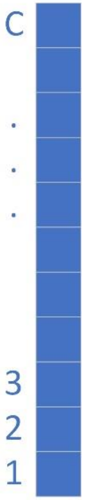
Δεδομένου ότι συνέβη μια μεταβολή κατάστασης, η πιθανότητα ότι η μεταβολή της κατάστασης συνέβη λόγω τερματισμού μιας κλήσης, είναι:

$$P_{\tau\varepsilon\rho} = \frac{n}{\alpha + n}$$

$$P_{\alpha\varphi} + P_{\tau\varepsilon\rho} = 1$$

«Τραβώντας» έναν τυχαίο αριθμό Y από την **ομοιόμορφη κατανομή** U(0,1) και ξεκινώντας το σύστημα από μία συγκεκριμένη κατάσταση n, ακολούθως η κατάσταση του συστήματος θα μεταβάλλεται ως εξής:

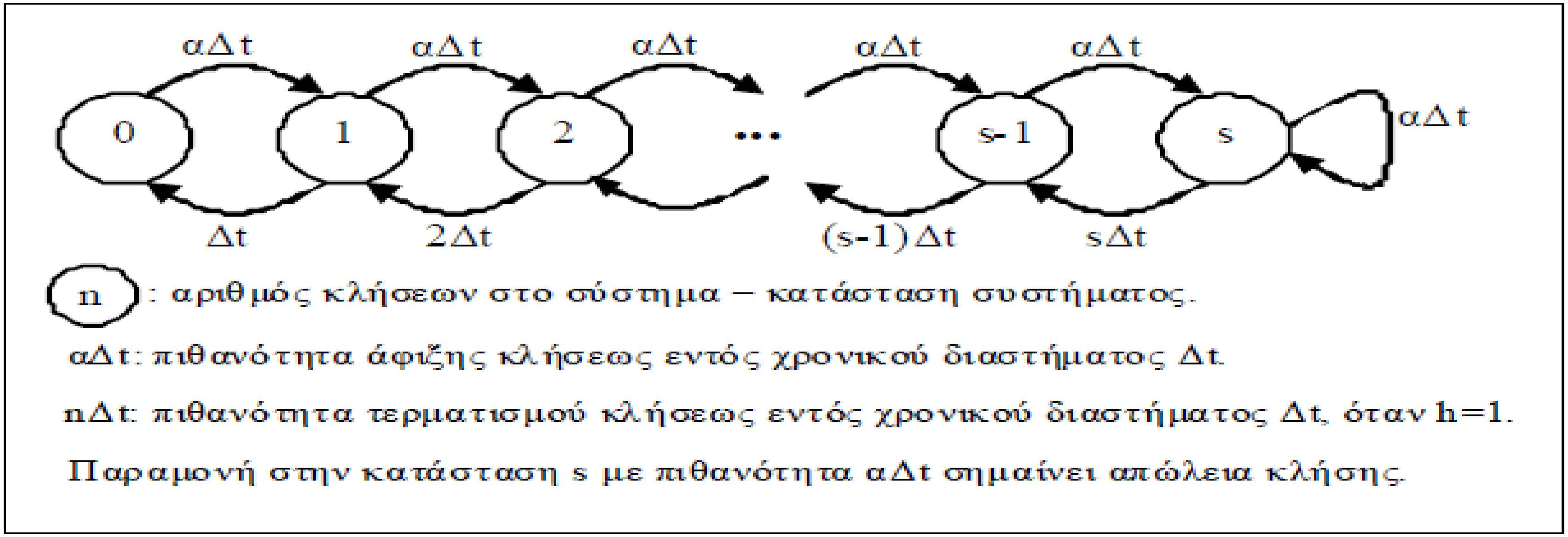
- Αν 0 < Y < α/(α+n), τότε καταφθάνει μια κλήση, και έχουμε αλλαγή κατάστασης από n σε n+1.
- Αν α/(α+n) < Y < 1, τότε τερματίζει μια κλήση και περνάμε από την κατάσταση n στην n-1.



$$B = \frac{\text{Χαμένες}}{\text{Αφίξεις}}$$

Μέθοδοι προσομοίωσης (11)

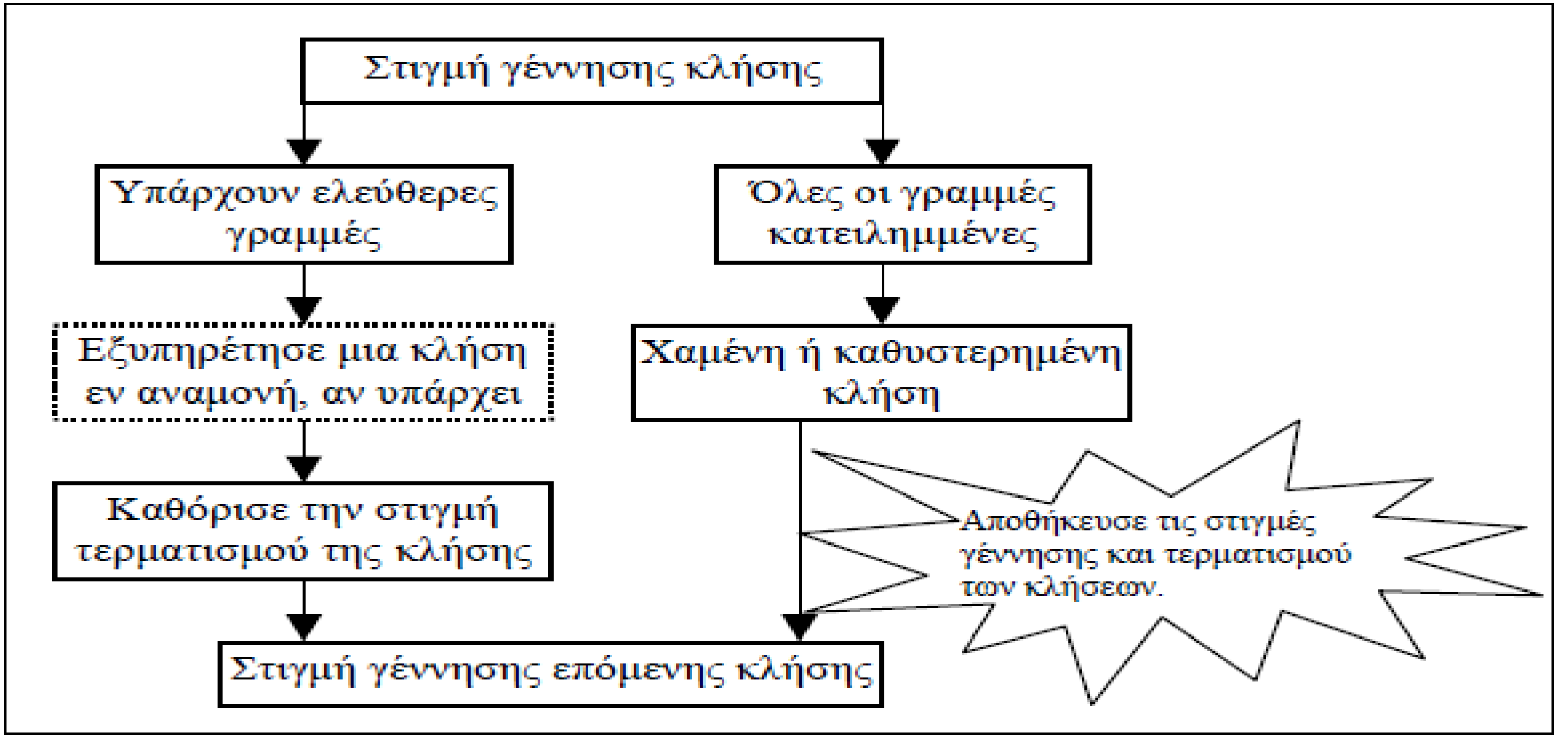
Η διαδικασία της μεταβολής των καταστάσεων απεικονίζεται στο σχήμα. Κάθε βέλος δεξιάς κατεύθυνσης αντιστοιχεί σε άφιξη μίας κλήσης (με πιθανότητα αΔt), κάθε βέλος αριστερής κατεύθυνσης αντιστοιχεί σε τερματισμό μίας κλήσης, ενώ η παραμονή στην κατάσταση s αντιστοιχεί σε μία χαμένη κλήση. Η πιθανότητα απωλείας κλήσεως υπολογίζεται από τον λόγο του πλήθους των χαμένων κλήσεων προς το πλήθος των συνολικών αφίξεων.



Μέθοδοι προσομοίωσης (12)

Γλώσσες προγραμματισμού γενικού σκοπού – Η μέθοδος του χρονικού εντοπισμού ή μέθοδος αληθούς χρόνου (time-true method)

Η μέθοδος αυτή απαιτεί γνώση των χρονικών στιγμών της άφιξης ή του τερματισμού μιας κλήσης και η γενική αρχή της απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Μέθοδοι προσομοίωσης (13)

Το περιβάλλον προγραμματισμού μας παρέχει ένα ημερολόγιο γεγονότων, δηλαδή ένα πίνακα όπου εμφανίζονται τα μελλοντικά γεγονότα. Συνήθως, ο χρόνος άφιξης της πρώτης κλήσης καταγράφεται σ’ αυτό το ημερολόγιο ως αρχική τιμή. Κατά την διάρκεια της προσομοίωσης, τα χρονικά στιγμιότυπα των επομένων αφίξεων ή τερματισμών των κλήσεων καθορίζονται από τυχαίους αριθμούς και καταγράφονται στο ημερολόγιο. Σύμφωνα με αυτό το ημερολόγιο το πρόγραμμα της προσομοίωσης προχωράει τον χρόνο του ρολογιού κάθε φορά ώστε να συμπέσει με τον χρόνο του πλησιέστερου γεγονότος του ημερολογίου και επαναλαμβάνει την διαδικασία αυτή μέχρι να ολοκληρώσει την προσομοίωση.

Η χρονολογική ταξινόμηση των γεγονότων (με την σωστή σειρά) είναι ένα από τα προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπίσει ο προγραμματιστής του προσομοιωτή (επηρεάζει κατά πολύ τον χρόνο εκτέλεσης του προγράμματος).

Δημιουργία τυχαίων αριθμών (1)

Υπάρχουν δύο είδη **τυχαίων αριθμών (random numbers)**:

- οι αριθμητικοί τυχαίοι αριθμοί που παράγονται από υπολογιστές και
- οι φυσικοί τυχαίοι αριθμοί που παράγονται από φυσικά φαινόμενα, όπως είναι οι ραδιενεργές ουσίες και οι κοσμικές ακτινοβολίες.

Οι αριθμητικοί τυχαίοι αριθμοί στην πραγματικότητα είναι μια σειρά από μη τυχαίους αριθμούς με **πολύ μεγάλη περίοδο επανάληψης** (αργούν επομένως να επαναληφθούν). Γι’ αυτό αποκαλούνται **ψευδο-τυχαίοι αριθμοί (pseudo-random numbers)**, και επομένως η «τυχαιότητά» πρέπει να ελέγχεται.

Ο φυσικός τυχαίος αριθμός παράγεται π.χ. με την χρήση της ακτινοβολίας γάμμα. Όμως, εξ αιτίας της δυσκολίας να παράγουμε ολόιδιους τυχαίους αριθμούς για να μπορέσουμε να επαναλάβουμε πολλές φορές μια προσομοίωση στον Η/Υ, οι φυσικοί τυχαίοι αριθμοί δεν είναι κατάλληλοι και καταφεύγουμε στους ψευδο-τυχαίους αριθμούς.

Δημιουργία τυχαίων αριθμών (2)

- Οι απαιτούμενες συνθήκες για την δημιουργία και χρήση των ψευδο-τυχαίων αριθμών είναι:
- Να μπορεί να παραχθεί εύκολα μεγάλο πλήθος τυχαίων αριθμών.
- Να έχουν ικανοποιητική «τυχαιότητα», η οποία επιτυγχάνεται όταν η **περίοδος** επανάληψης των αριθμών αυτών είναι πολύ μεγάλη.
- Να μπορούν να παραχθούν κατ’ επανάληψη οι **ίδιοι τυχαίοι αριθμοί**.
- Τα στατιστικά χαρακτηριστικά των να ταιριάζουν με τους αντικειμενικούς σκοπούς της προσομοίωσης.
- “**Seed number**” – Οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί για να μπορούν να αναπαραχθούν πάλι (ακριβώς οι ίδιοι) βασίζονται σε έναν αρχικό αριθμό που λέγεται seed (σπόρος).
- Απαιτούνται πολλοί seed numbers – προσοχή στην επιλογή ώστε να προκύπτουν ασυσχέτιστες ακολουθίες ψευδοτυχαίων αριθμών (επιλέξτε πρώτους αριθμούς ως seed numbers).

Δημιουργία τυχαίων αριθμών (3)

Ομοιόμορφοι τυχαίοι αριθμοί (uniform random numbers)

Καλούνται εκείνοι που έχουν ομοιόμορφη κατανομή σ’ ένα πεδίο τιμών. Χρησιμοποιούνται εκτός των άλλων και για να παράγουν τυχαίους αριθμούς με αυθαίρετη κατανομή.

Στις επόμενες διαφάνειες περιγράφονται τυπικές μέθοδοι παραγωγής ομοιόμορφων τυχαίων αριθμών.

Δημιουργία τυχαίων αριθμών (4)

Μέθοδος μέσου τετραγώνου

Αυτή είναι η πρώτη μέθοδος δημιουργίας τυχαίων αριθμών η οποία επινοήθηκε από τον Neuman. Υψώνουμε στο τετράγωνο τον αριθμό x_0 που έχει 2ν ψηφία, παίρνουμε τον αριθμό x_1 που σχηματίζεται από τα 2ν μεσαία ψηφία του αριθμού που προέκυψε από την ύψωση του x_0 στο τετράγωνο. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία δημιουργώντας την σειρά $x_{0,}\, x_{1,}\, x_{2,}\ldots$ Παραδείγματος χάριν, με ν=2:

- $x_0 = 2061$ (seed) $x_1 = 2477$ $x_2 = 1355$
- $x_0^2 = 04247721$ $x_1^2 = 06135529$

Η μέθοδος δεν χρησιμοποιείται πλέον λόγω της μικρής περιόδου επανάληψης των αριθμών που έχει.

Δημιουργία τυχαίων αριθμών (5)

Πολλαπλασιαστική μέθοδος υπολοίπου

Μία σειρά τυχαίων αριθμών x_0, x_1, x_2, ... παράγεται από τον αναδρομικό τύπο,

$$x_n = kx_{n-1} \ (\mathrm{mod}\ M) \qquad \textbf{(4)}$$

όπου (mod M) το υπόλοιπο που προκύπτει από τη διαίρεση με το M.

Γνωρίζουμε ότι έχουμε την μεγίστη περίοδο επανάληψης 2^{b-2}, όταν:

$$k = \pm 3 \ (\mathrm{mod}\ 8),\ \ x_0 = 1 \ (\mathrm{mod}\ 2) \text{ και } M = 2^b.$$

α = β (mod *n*), σημαίνει ότι η διαφορά α – β είναι πολλαπλάσια του *n*.

Για Η/Υ με 32-bit CPU, $M = 2^{32}$, και συνήθως $k = 16807$ ($= 7^5$) ή $k = 941$.

Δημιουργία τυχαίων αριθμών (6)

Μεικτή μέθοδος υπολοίπου

Μία σειρά τυχαίων αριθμών $x_{0,}$ $x_{1,}$ $x_{2,}$ ... παράγεται από τον αναδρομικό τύπο,

$$x_n = (kx_{n-1} + \mu) \pmod{M} \qquad \textbf{(5)}$$

Μέγιστη περίοδο επανάληψης 2^b έχουμε για $k = \pm 3 \pmod{8}$, $x_0 = 1 \pmod{2}$ και $M = 2^b$.

Δημιουργία τυχαίων αριθμών (7)

Μέθοδος της ακολουθίας Μ

Μία σειρά τυχαίων αριθμών $x_0, x_1, x_2, \ldots$ παράγεται από τον αναδρομικό τύπο:

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} c_i x_{n-1} \pmod{2} \qquad \textbf{(6)}$$

με μέγιστη περίοδο επανάληψης $2^k - 1$ όπου $c_1, c_2, \ldots c_{k-1} = 0$ ή 1 και $c_k = 1$.

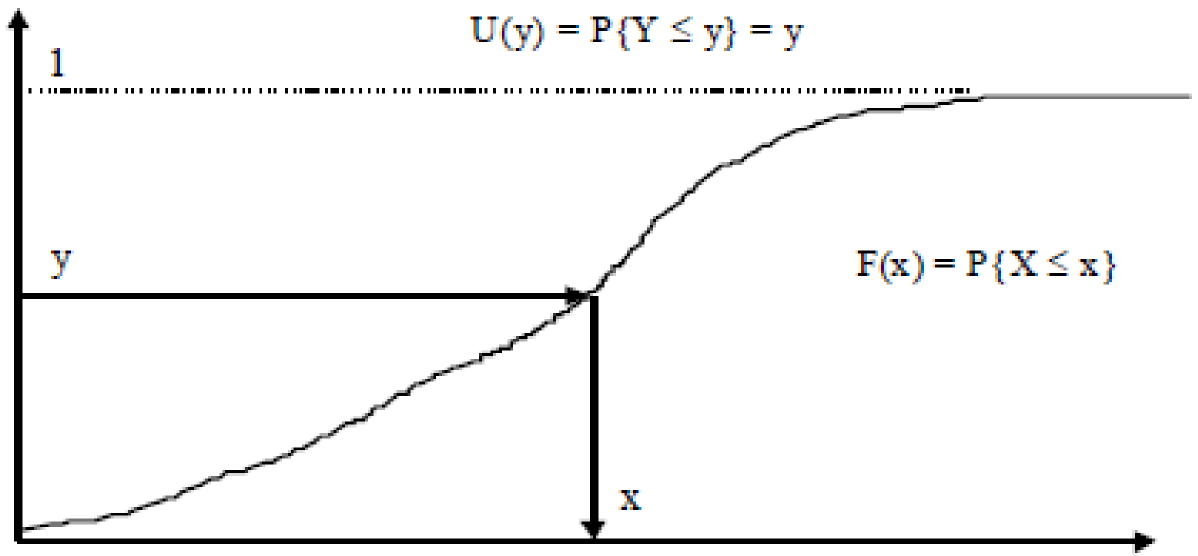
Ένας τυχαίος αριθμός, ομοιόμορφα κατανεμημένος στο διάστημα (0,1), παράγεται αν φτιάξουμε δυαδικούς μικρότερους της μονάδας, χρησιμοποιώντας Μ ($M \leq k$) διαδοχικούς αριθμούς που παίρνουμε από την σειρά $\{x_j\}$.

Αυτή η μέθοδος απαιτεί μεγάλο αριθμό επαναλήψεων για την δημιουργία ενός τυχαίου αριθμού, αφού μόνο ένας δυαδικός τυχαίος αριθμός παράγεται με κάθε υπολογισμό. Αν και θεωρείται ότι μειονεκτεί από άποψη ταχύτητας, η μέθοδος μπορεί να επιταχυνθεί με παράλληλη εκτέλεση της λογικής πράξης «XOR», αφού η πράξη mod 2 είναι ισοδύναμη με την λογική πράξη XOR, του αποκλειστικού «ή» (exclusive-or).

Δημιουργία τυχαίων αριθμών (8)

Τυχαίοι αριθμοί αυθαίρετης κατανομής – Μέθοδος αντίστροφου μετασχηματισμού

Αυτή η μέθοδος μας παρέχει έναν αλγόριθμο παραγωγής τυχαίων αριθμών που ακολουθούν την συνάρτηση κατανομής $F(\cdot)$. Η μέθοδος αυτή απαιτεί την ύπαρξη της αντίστροφης συνάρτησης $F^{-1}(\cdot)$. Η αρχή λειτουργίας της μεθόδου παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



Δημιουργία τυχαίων αριθμών (9)

Έστω Y μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,1). Τότε έχουμε ότι:

$$U(y) = P\{ Y \leq y \} = y,\ 0<y<1 \qquad \textbf{(7)}$$

Παράγουμε ομοιόμορφης κατανομής τυχαίους αριθμούς Y με μία από τις μεθόδους του προηγουμένου τμήματος και έστω:

$$X=F^{-1}(y) \qquad \textbf{(8)}$$

Τότε το X ακολουθεί την συνάρτηση κατανομής F(x). Αυτό επαληθεύεται και από την σχέση:

$$P\{ X \leq x \}= P\{F^{-1}(y) \leq x \} = P\{Y \leq F(x)\} = F(x) \qquad \textbf{(9)}$$

Δημιουργία τυχαίων αριθμών (10)

Παράδειγμα 2

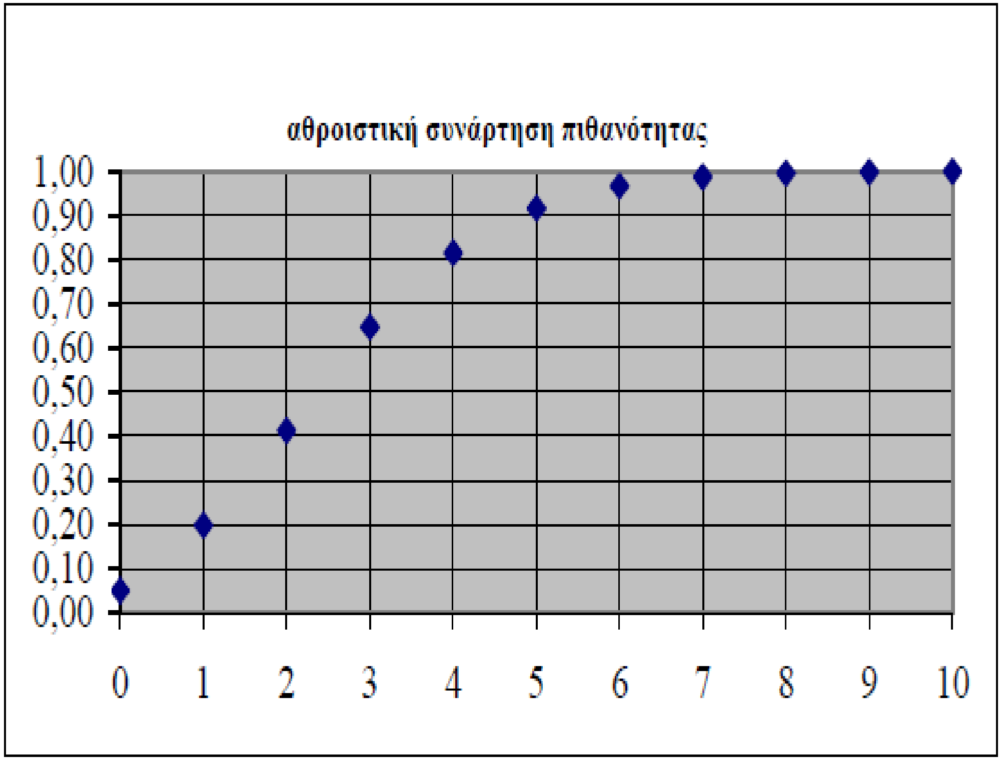
Για να δημιουργήσουμε τυχαίους αριθμούς που να ακολουθούν διακριτή κατανομή με F(x) μία βηματική συνάρτηση, εφαρμόζουμε μία παρόμοια μέθοδο χρησιμοποιώντας πίνακα με αθροιστικές πιθανότητες ο οποίος μας παρέχει την αντίστροφη συνάρτηση. Έστω λοιπόν ότι θέλουμε να δημιουργήσουμε τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέση τιμή 3, χρησιμοποιώντας τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0, 1).

- $P(X=x) = (3^x/x!)e^{-3}$, x=0, 1, 2, …
- Η συνάρτηση κατανομής (PDF) θα είναι η $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{r=0}^{x} P(X=r)$

Δημιουργία τυχαίων αριθμών (11)

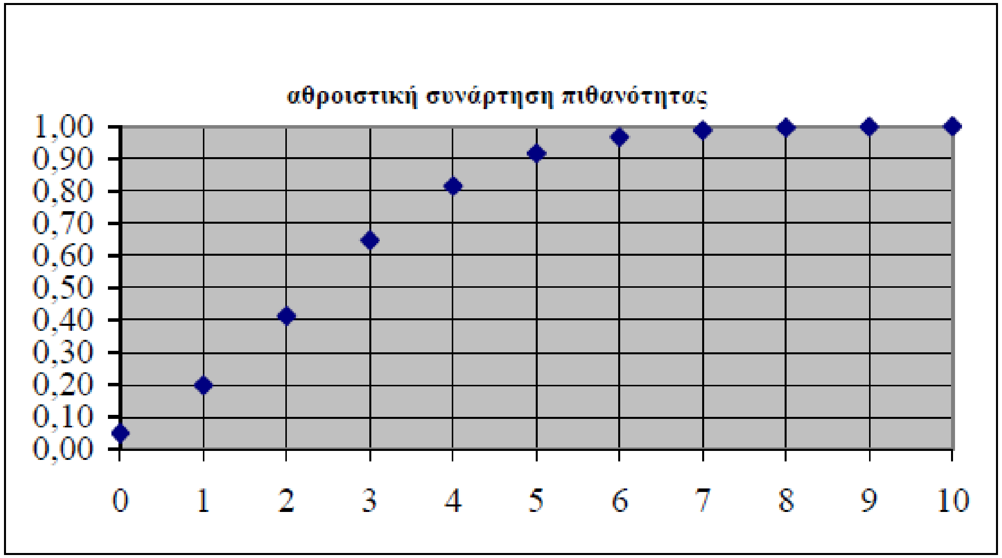
Άρα μπορούμε να δημιουργήσουμε τον ακόλουθο πίνακα και να κατασκευάσουμε το διάγραμμα του σχήματος.

x	P(X=x)	F(x)=P(X≤x)
0	0.0498	0.0498
1	0.1494	0.1991
2	0.2241	0.4132
3	0.2241	0.6473
4	0.1680	0.8153
5	0.1008	0.9161
6	0.0504	0.9665
7	0.0216	0.9881
8	0.0081	0.9962
9	0.0027	0.9989
10	0.0008	0.9997



Δημιουργία τυχαίων αριθμών (12)

Βάσει του διαγράμματος αυτού, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε έναν πραγματικό αριθμό του διαστήματος (0, 1) σε ένα ακέραιο. Έτσι με τις μεθόδους δημιουργίας τυχαίων αριθμών ομοιόμορφης κατανομής, λαμβάνουμε αριθμούς εντός του διαστήματος (0, 1). Αν ο τυχαίος αριθμός ανήκει στο διάστημα (0, 0.0498), ο αντίστοιχος ακέραιος είναι ο 0, αν ανήκει στο (0.0498, 0.1991) ο αντίστοιχος ακέραιος είναι ο 1, αν ανήκει στο (0.1991, 0.4132) ο 2, ..., αν ανήκει στο (0.9989, 0.9997) ο 10, και αν ανήκει στο (0.9997, 1.) ο αντίστοιχος ακέραιος είναι μεγαλύτερος του 10. Η μέθοδος αυτή μας δίνει ακεραίους αριθμούς, κατανομής Poisson με μέση τιμή 3.



Δημιουργία τυχαίων αριθμών (13)

Τυχαίοι αριθμοί αυθαίρετης κατανομής – Μέθοδος της απόρριψης

Ας θεωρήσουμε μία κατανομή για την οποία η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x) είναι φραγμένη. Έστω ότι A είναι η περιοχή μεταξύ του y = f(x) και του άξονα x. Τότε η συνιστώσα x ενός τυχαίου δείγματος που έχει ληφθεί από την περιοχή A γίνεται ένας τυχαίος αριθμός που ακολουθεί την συνάρτηση f(x).

Έστω g(x) μία συνάρτηση μεγαλύτερη ή ίση της f(x), και ας υποθέσουμε ότι παράγεται η τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή,

$$\overline{g}(x) = C^{-1} g(x) \qquad \textbf{(10)}$$

όπου το ολοκλήρωμα,

$$C = \int g(x)\, ds \qquad \textbf{(11)}$$

είναι φραγμένο.

Δημιουργία τυχαίων αριθμών (14)

Τότε οι τυχαίοι αριθμοί που ακολουθούν την κατανομή f(x) παράγονται με τον ακόλουθο αλγόριθμο:

- 1) Δημιουργούμε τους τυχαίους αριθμούς X και Y που ακολουθούν τις κατανομές $\bar{g}(x)$ και U(0,1), αντιστοίχως.
- Αν Y > f(x)/g(x), τότε επιστρέφουμε στο βήμα (1). Διαφορετικά, ο X είναι ο τυχαίος αριθμός που θέλαμε.

Η ονομασία της μεθόδου προκύπτει από το γεγονός ότι ο X απορρίπτεται μέχρις ότου δειγματοληπτικά ληφθεί ένα σημείο που ανήκει στην περιοχή A. Η αποτελεσματικότητα της μεθόδου εξαρτάται από τους εξής παράγοντες:

(α) Τον μέσο όρο (C-1) των απορρίψεων που απαιτούνται μέχρι να δημιουργηθεί ο τυχαίος αριθμός.

(β) Την ταχύτητα δημιουργίας του τυχαίου αριθμού που ακολουθεί την $\bar{g}(x)$

Δημιουργία τυχαίων αριθμών (15)

(γ) Την υπολογιστική δυσκολία του λόγου f(x)/g(x).

Αν θέλουμε να βελτιώσουμε την αποτελεσματικότητα της μεθόδου, πρέπει να προσέξουμε ιδιαίτερα να επιλέξουμε την κατάλληλη συνάρτηση g(·). Ο παράγοντας που περιγράφεται στο (γ) είναι επίσης πολύ σημαντικός. Αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δεν είναι φραγμένη, ευρίσκουμε μια φραγμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, μετασχηματίζοντας την μεταβλητή της συνάρτησης και τότε εφαρμόζουμε την μέθοδο της απόρριψης.

Δημιουργία τυχαίων αριθμών (16)

Τυχαίοι αριθμοί αυθαίρετης κατανομής – Μέθοδος της σύνθεσης

Έστω ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x) εκφράζεται ως:

$$f(x) = \int f(x,\theta)g(\theta)d\theta \qquad \textbf{(12)}$$

Αν δημιουργούσαμε πρώτα τον τυχαίο αριθμό θ_0 που ακολουθεί την συνάρτηση κατανομής g(θ) και κατόπιν τον τυχαίο αριθμό x_0 που ακολουθεί την συνάρτηση κατανομής f(x,θ), είναι προφανές ότι ο x_0 ακολουθεί την f(x). Ονομάζουμε αυτή την διαδικασία **μέθοδο της σύνθεσης (composition method)**, και αν η g(θ) είναι διακριτή συνάρτηση, στην πράξη χρησιμοποιείται συχνά η συνάρτηση:

$$f(x) = \sum r_k f_k(x) \qquad \textbf{(13)}$$

Για να είμαστε ικανοποιημένοι από τους τυχαίους αριθμούς αυτής της μεθόδου, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μία σχετικά μεγάλη τιμή του r_k που να αντιστοιχεί στην $f_k(x)$.

ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας - probability density function (pdf)

<u>Πείραμα</u>

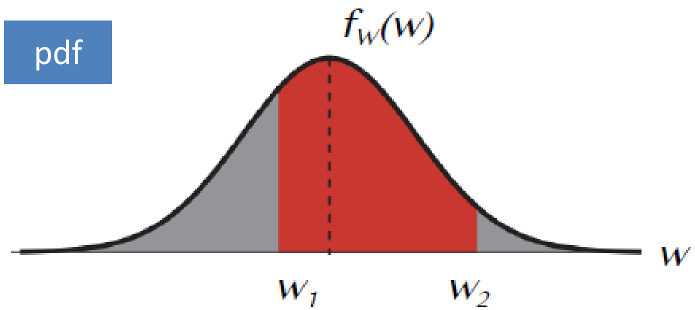
Δημιουργήστε ιστογράμματα των τυχαίων τιμών ενός πειράματος κάνοντας ανεξάρτητες επαναλήψεις με αυξανόμενο αριθμό τιμών κάθε φορά.

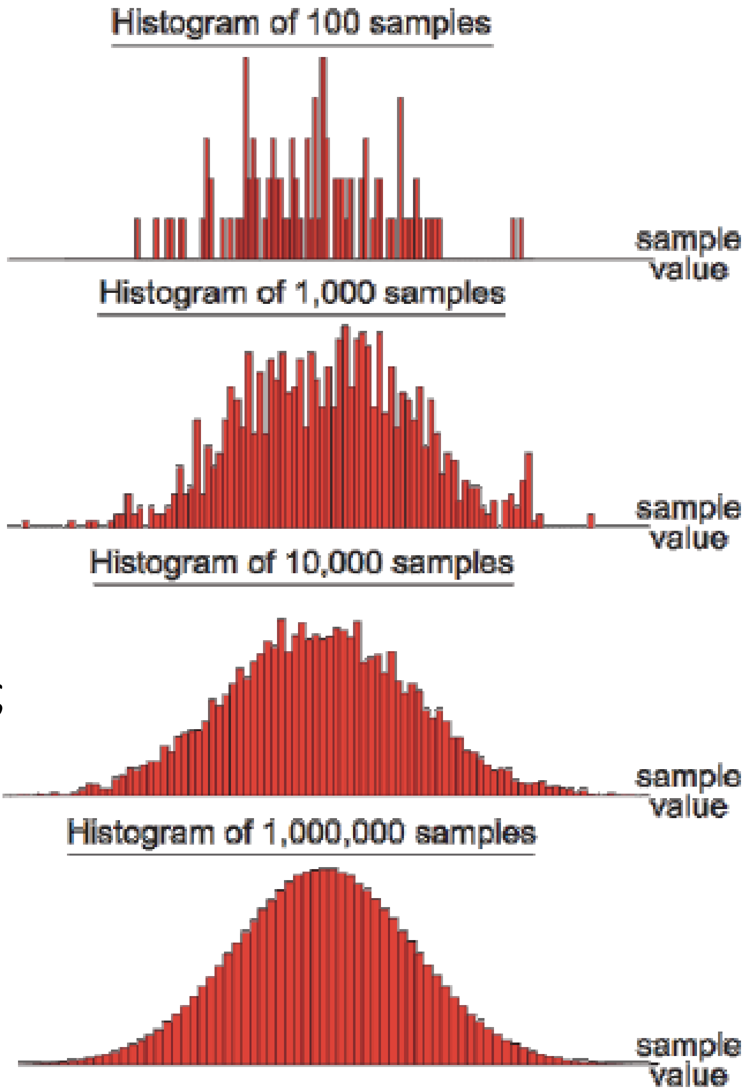
Τα ιστογράμματα θα συγκλίνουν σε σχήμα όπως το τελευταίο, παραπλεύρως.

Αν <u>κανονικοποιήσουμε</u> το σχήμα ώστε το εμβαδόν του να είναι μονάδα, τότε στο περίγραμμα έχομε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (**pdf**).

$$p(w_1 < W < w_2) = \int_{w_1}^{w_2} f_W(w)\,dw$$

pdf

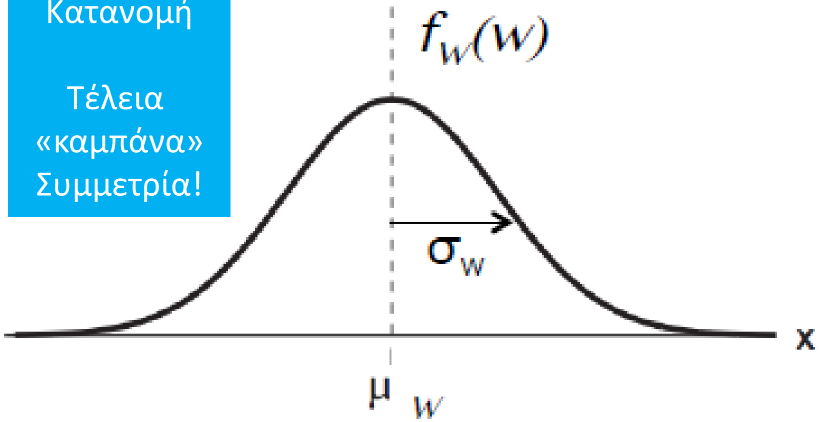


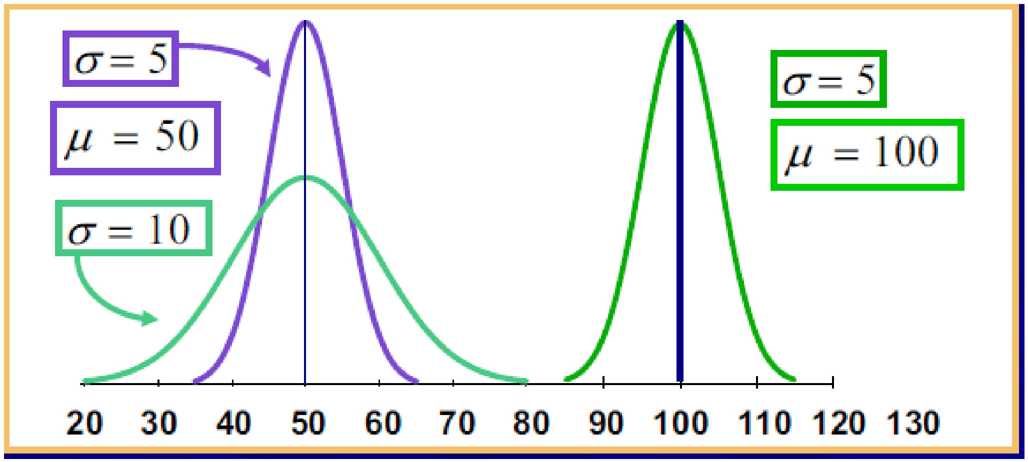


Μέση τιμή και διασπορά συνεχούς τ.μ. W

Γκαουσιανή Κατανομή

Τέλεια «καμπάνα» Συμμετρία!

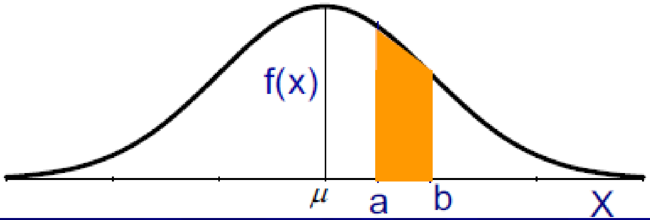




Μέση τιμή μ $\quad \mu_W = \int_{-\infty}^{\infty} w\, f_W(w)dw$

Διασπορά σ^2 $\quad E[(W-\mu_W)^2] = \sigma_W^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (w-\mu_W)^2 f_W(w)dw$

Τυπική απόκλιση $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$



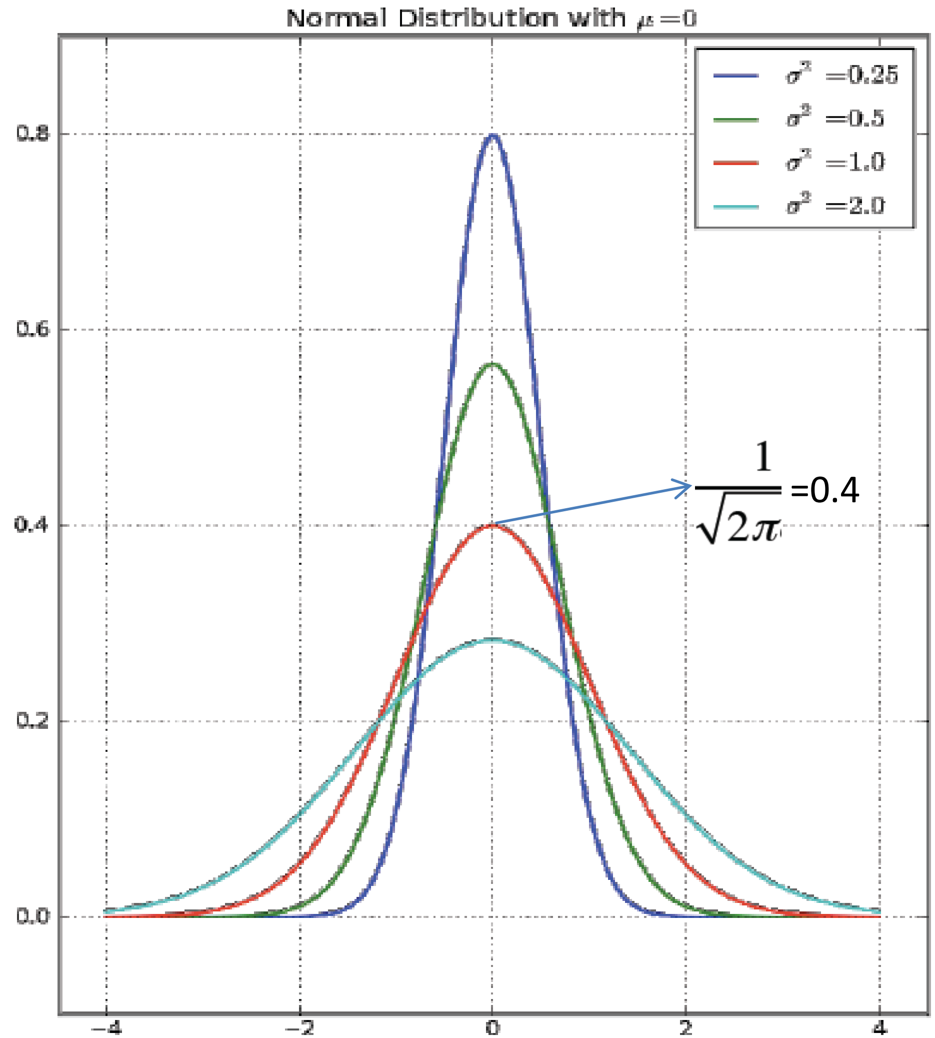
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Η Κατανομή του Gauss – Κανονική κατανομή

A Gaussian random variable W with
mean μ and
variance σ^2 has a **pdf** described by

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(w-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

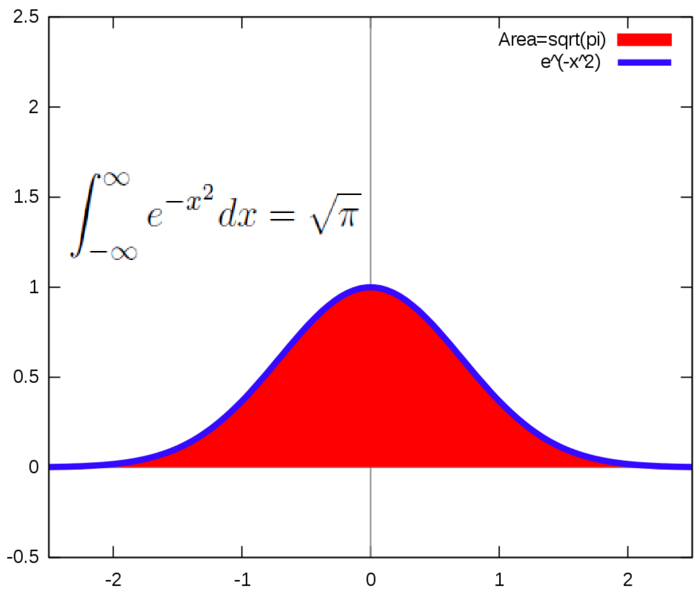
Αν μ=0 και σ^2 =1 τότε έχομε την κανονική κατανομή N(0,1)

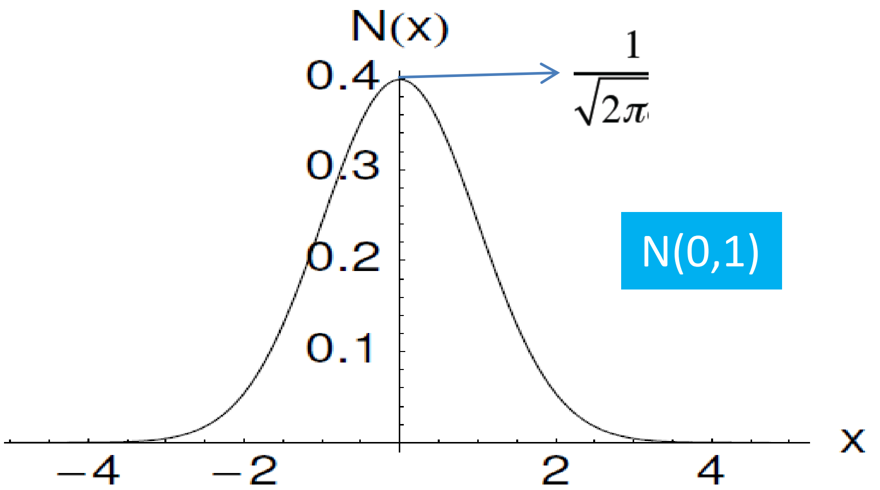


Σχόλια στην κατανομή Gaussian / Normal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

$$\int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1$$

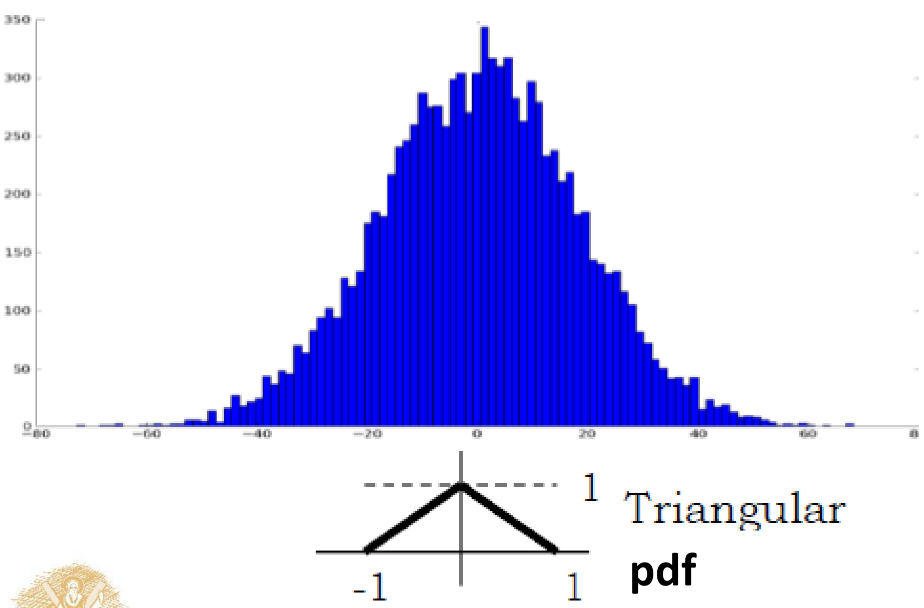


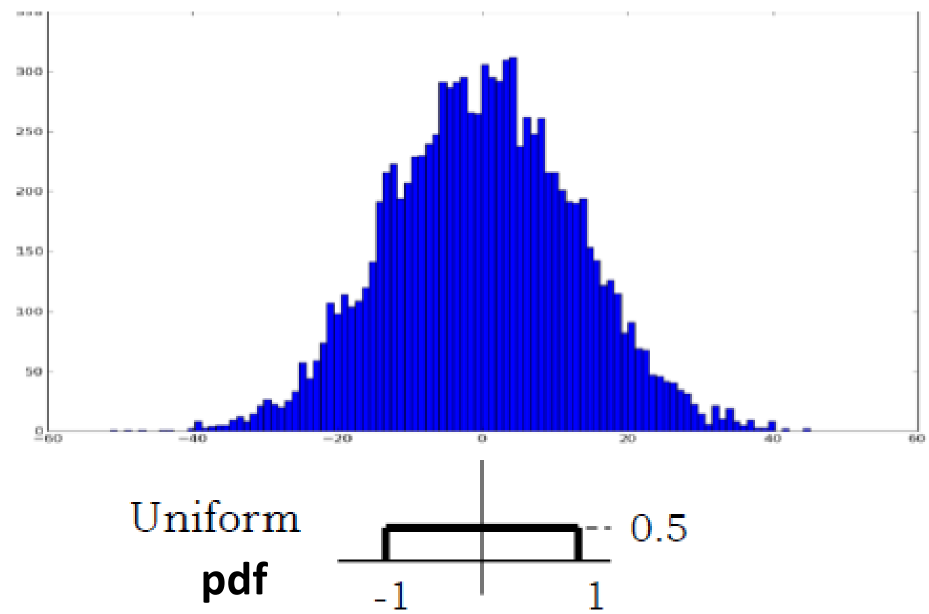


Γκαουσιανή κατανομή – Πανταχού παρούσα

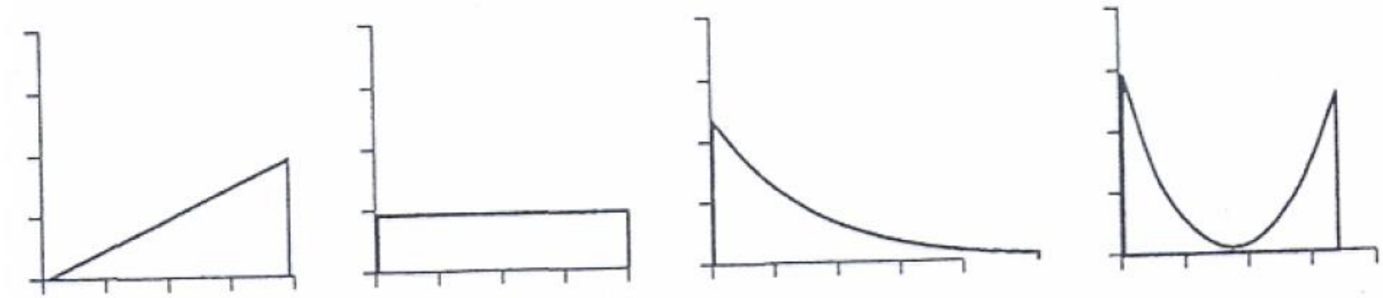
- Ο θόρυβος που λαμβάνεται στον δέκτη είναι συχνά το άθροισμα πολλών επιμέρους θορύβων ανεξάρτητων μεταξύ τους που προέρχονται από πολλές διαφορετικές πηγές. Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα λέει ότι το άθροισμά τους θα είναι Γκαουσιανός θόρυβος, ειδικά αν ο αριθμός τους είναι μεγάλος.

- Το σχήμα δείχνει τα ιστογράμματα των αποτελεσμάτων 10.000 δοκιμών (επαναλήψεων) αθροίσματος 100 τυχαίων δειγμάτων που αντλήθηκαν από [-1,1] χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές κατανομές.

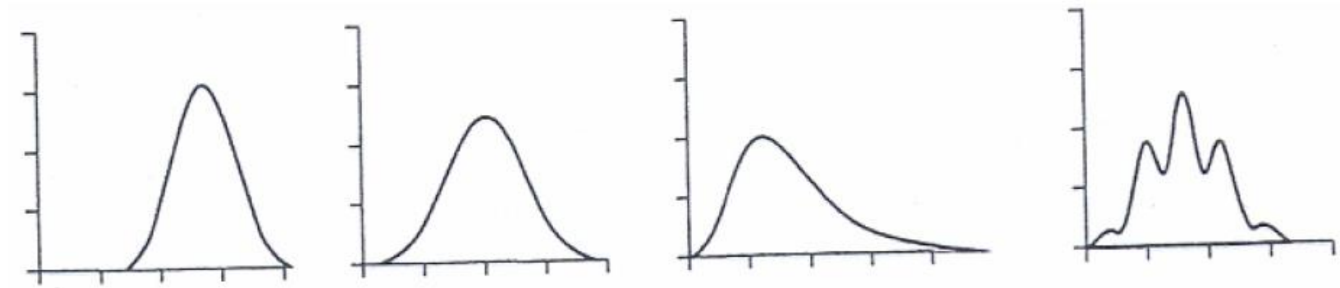




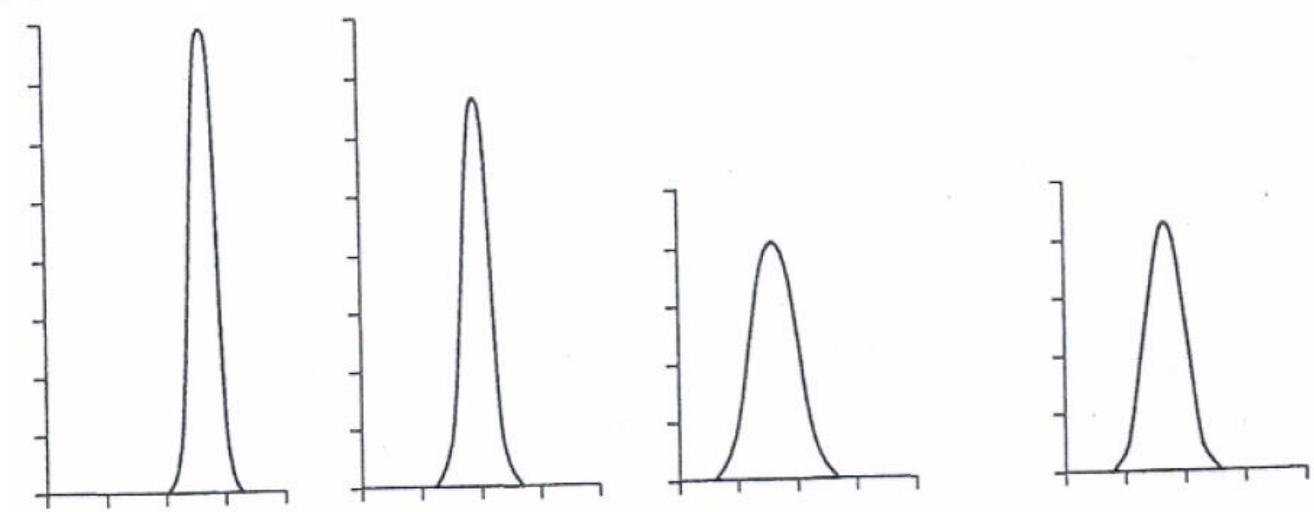
Παράδειγμα Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος



[redacted] οι κατανομές των <u>δειγματικών μέσων</u> είναι αντίστοιχα,
για ***n* = *4***:



και για ***n* = *25***:



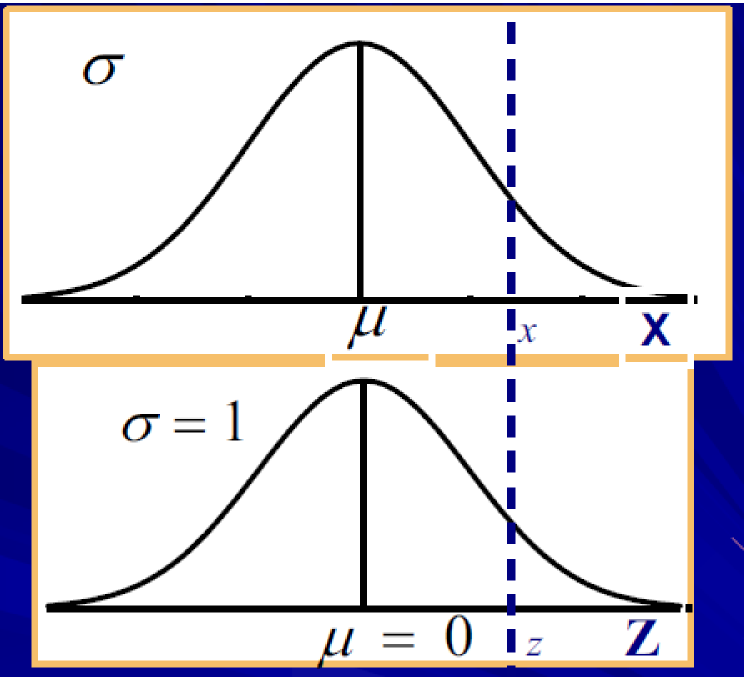
Σχέση της Γκαουσιανής κατανομής με την Κανονική N(0,1)

- Value x from RV X N(μ,σ):

Γκαουσιανή κατανομή

- Value z from RV Z N(0,1):

Τυποποιημένη Γκαουσιανή κατανομή
Κανονική κατανομή N(0,1)



- z Score transformation:

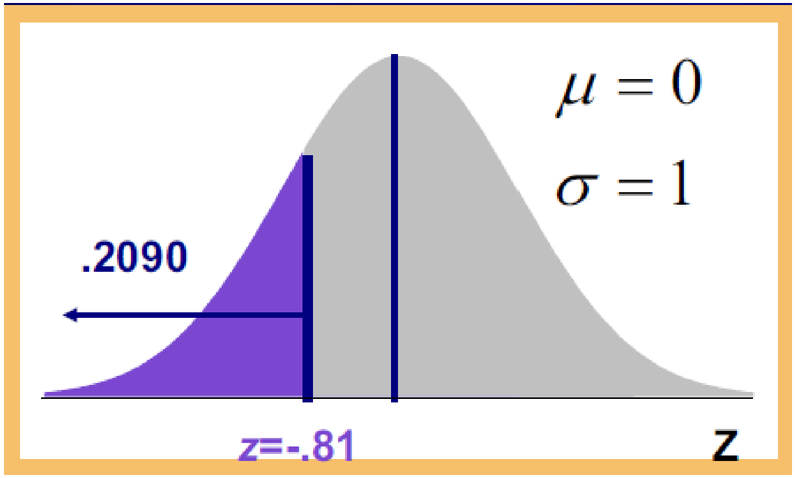
Η τιμή *z* δείχνει πόσες τυπικές αποκλίσεις *σ* απέχει η τιμή *x* από το μέσο όρο *μ*. Έστω *x* =190, *μ* =150, *σ* =25, τότε *z* =(190–150)/25 = 1,6. Δηλ. η τιμή 190 είναι 1,6 τυπικές αποκλίσεις πάνω από το 150.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Χρήση της τυποποιημένης κατανομής N(0,1)

Διατίθενται πίνακες που δείχνουν τιμές της αθροιστικής κατανομής (Cumulative Distribution Function - CDF)

Π.χ. για z = - 0.81, τότε από τους πίνακες παίρνουμε CDF(z) = P(z ≤ -0.81) = 0.2090



CDF της τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής

Cumulative Distribution Function of the Standard Normal Distribution

Example: If Z is standard Normal random variable, then F(1.00) = P(Z ≤ 1.00) = .8413

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
–0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

CDF της τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Ανάλυση των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης

Η προσομοίωση της τηλεπικοινωνιακής κινήσεως μπορεί να θεωρηθεί ως η εφαρμογή των μεθόδων της τυχαίας δειγματοληψίας σε αιτιοκρατικά και πιθανοτικά προβλήματα. Επομένως για να υπολογίσουμε την μέση τιμή των δειγμάτων που παίρνουμε από τα αποτελέσματα της προσομοίωσης εφαρμόζουμε πολύ συχνά την μέθοδο των **διαστημάτων εμπιστοσύνης (confidence interval)**.

Όσο μικρότερο είναι το διάστημα τόσο ακριβέστερος είναι ο υπολογισμός της μέσης τιμής. Ένα διάστημα εμπιστοσύνης υπολογίζεται με ταξινόμηση των αποτελεσμάτων σε κατάλληλα σύνολα, βάσει ορισμένων μεθόδων που περιγράφονται κατωτέρω.

Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε την μέση τιμή μ ενός κανονικού πληθυσμού. Γνωρίζουμε ότι ο δειγματικός μέσος $\overline{X}$ είναι μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του μ. Επίσης ξέρουμε ότι

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Ας υποθέσουμε ότι η διασπορά σ^2 του υπό μελέτη πληθυσμού είναι γνωστή και ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το μ. Θέλουμε δηλαδή να βρούμε ένα διάστημα πραγματικών αριθμών που να περιέχει την πραγματική τιμή του μ με πιθανότητα 0.95. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να βρεθούν δύο τιμές X_L και X_U τέτοιες ώστε

$$P\,(X_L \leq \mu \leq X_U) = 0.95$$

Διαστήματα Εμπιστοσύνης (συνέχεια 1)

Δοθέντος ότι,

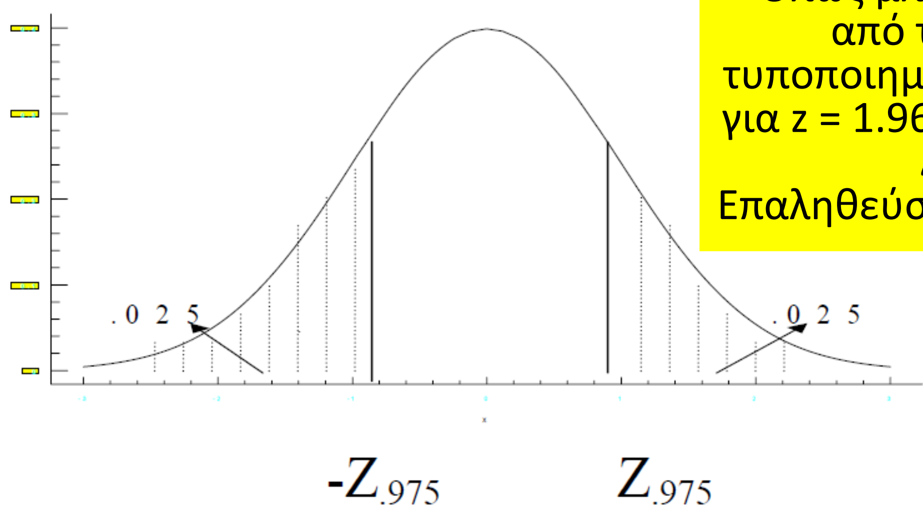
$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

αυτό είναι ισοδύναμο με το να βρεθούν δύο σημεία Z_L και Z_U από τους πίνακες της κανονικής κατανομής τέτοια ώστε,

$$P(Z_L \le \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z_U) = 0.95$$

Όπως προκύπτει από το σχήμα που ακολουθεί

Όπως μπορείτε να επαληθεύσετε από τους πίνακες CDF της τυποποιημένης Κανονικής Κατανομής για z = 1.96 έχουμε P(z < 1.96) = 0.975
Δηλ. **$Z_{0,975}$ = 1.96**
Επαληθεύσατε επίσης ότι **$Z_{0.025}$ = -1.96**



$$Z_L = Z_{.025} = -Z_{.975} \quad \text{και} \quad Z_U = Z_{.975}$$

Διαστήματα Εμπιστοσύνης (συνέχεια 2)

Επομένως,

$$P(- Z_{.975} \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq Z_{.975}) = 0.95$$

Λύνοντας τη σχέση αυτή ως προς μ παίρνουμε,

$$P(\overline{X} - Z_{.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + Z_{.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0.95$$

Επομένως το 95% διάστημα εμπιστοσύνης (confidence interval) για την μέση τιμή μ είναι το,

$$\overline{X} \pm Z_{.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$Z_{0.975} = 1.96$

Πιο γενικά και με βάση την λογική που αναπτύξαμε, το 100(1-α)% *διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή μ ενός κανονικού με γνωστή διασπορά σ^2 έχει άκρα,*

$$\boxed{\overline{X} \pm Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

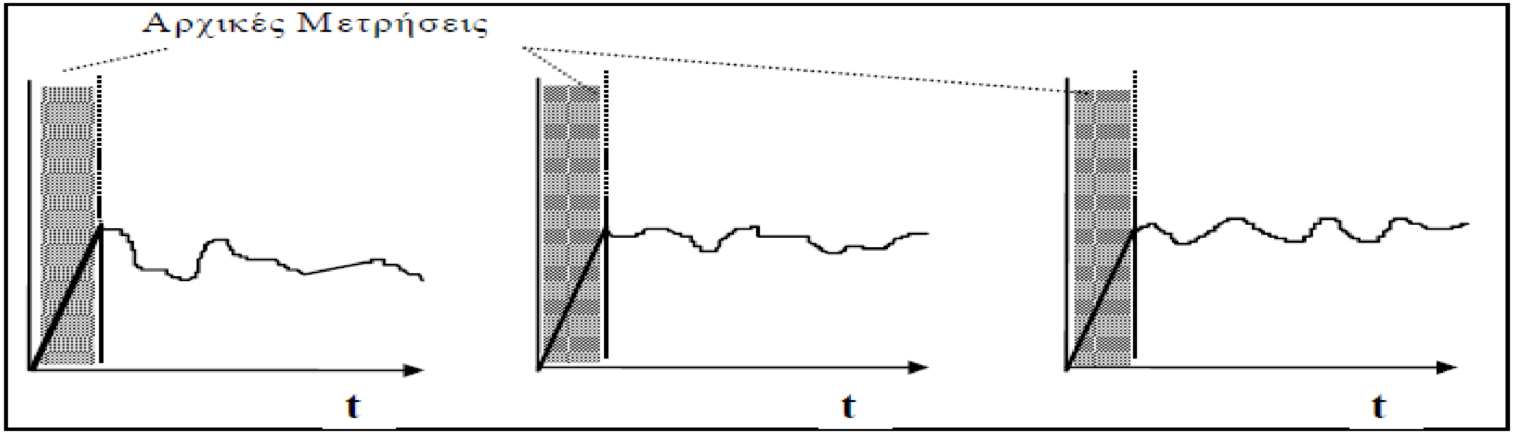
Ανάλυση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης με την μέθοδο των επαναλήψεων

Η μέθοδος των επαναλήψεων (replication method)

Με την μέθοδο αυτή πραγματοποιείται ένας αριθμός προσομοιώσεων και υπολογίζονται η μέση τιμή και το διάστημα εμπιστοσύνης, αφού απορριφθούν οι αρχικές μετρήσεις σύμφωνα με τα ακόλουθα (βλ. σχήμα):

1) Η προσομοίωση ξεκινάει από μία καθορισμένη αρχική κατάσταση ισορροπίας οπότε ενδεχομένως να μη χρειάζεται να απορρίψουμε τις αρχικές μετρήσεις.

2) Η προσομοίωση ξεκινάει από την μηδενική αρχική κατάσταση και απορρίπτονται οι αρχικές μετρήσεις μέχρις ενός χρόνου Τ. Στην πράξη ο καθορισμός του Τ γίνεται ευρετικά.



Ανάλυση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης με την μέθοδο των επαναλήψεων (1)

Αν οι μετρήσεις X_1, X_2,...,X_n για μια ποσότητα X είναι ανεξάρτητες, τότε το διάστημα εμπιστοσύνης [μ_α^+, μ_α^-] της μέσης τιμής μ= E{X}, με πιθανότητα (1-α), υπολογίζεται ως εξής:

Εάν σ^2 είναι η διασπορά της X, τότε η μέση τιμή των μετρήσεων είναι:

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \textbf{(14)}$$

και σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα ακολουθεί περίπου την κανονική κατανομή N(μ, σ^2/n), με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2/n, καθώς το n τείνει στο άπειρο. Βάσει του θεωρήματος αυτού, τα όρια του διαστήματος εμπιστοσύνης μ_α^+ και μ_α^-, με πιθανότητα (1-α) x 100% καθορίζονται από την σχέση:

$$\left.\begin{matrix}\mu_\alpha^+ \\ \mu_\alpha^-\end{matrix}\right\} = \overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2} \qquad \textbf{(15)}$$

όπου $u_{\alpha/2} \equiv \mathbf{Z}_{\alpha/2}$ είναι η τιμή της κανονικής κατανομής για την οποία:

$$P\{X > u_{\alpha/2}\} = \alpha/2 \qquad \textbf{(16)}$$

Για α=5%, α/2 = 0.025
και $\mathbf{Z_{\alpha/2} = 1.96}$

Ανάλυση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης με την μέθοδο των επαναλήψεων (2)

Συνήθως η διασπορά σ^2 είναι άγνωστη κι από το αποτέλεσμα της προσομοίωσης (μετρήσεις) υπολογίζεται η διασπορά του δείγματος S^2 (τυπική απόκλιση S):

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \qquad \textbf{(17)}$$

η οποία αποτελεί αμερόληπτη εκτίμηση της σ^2. Σ' αυτή την περίπτωση, όπου αντί της σ^2 έχουμε την S^2, χρησιμοποιείται αντί της $u_{\alpha/2} \equiv \mathbf{Z}_{\alpha/2}$, η αντίστοιχη τιμή $\mathbf{t_{\alpha/2}^{n-1}}$ της κατανομής **t** (κατανομή **Student**) με βαθμούς ελευθερίας **n-1**.

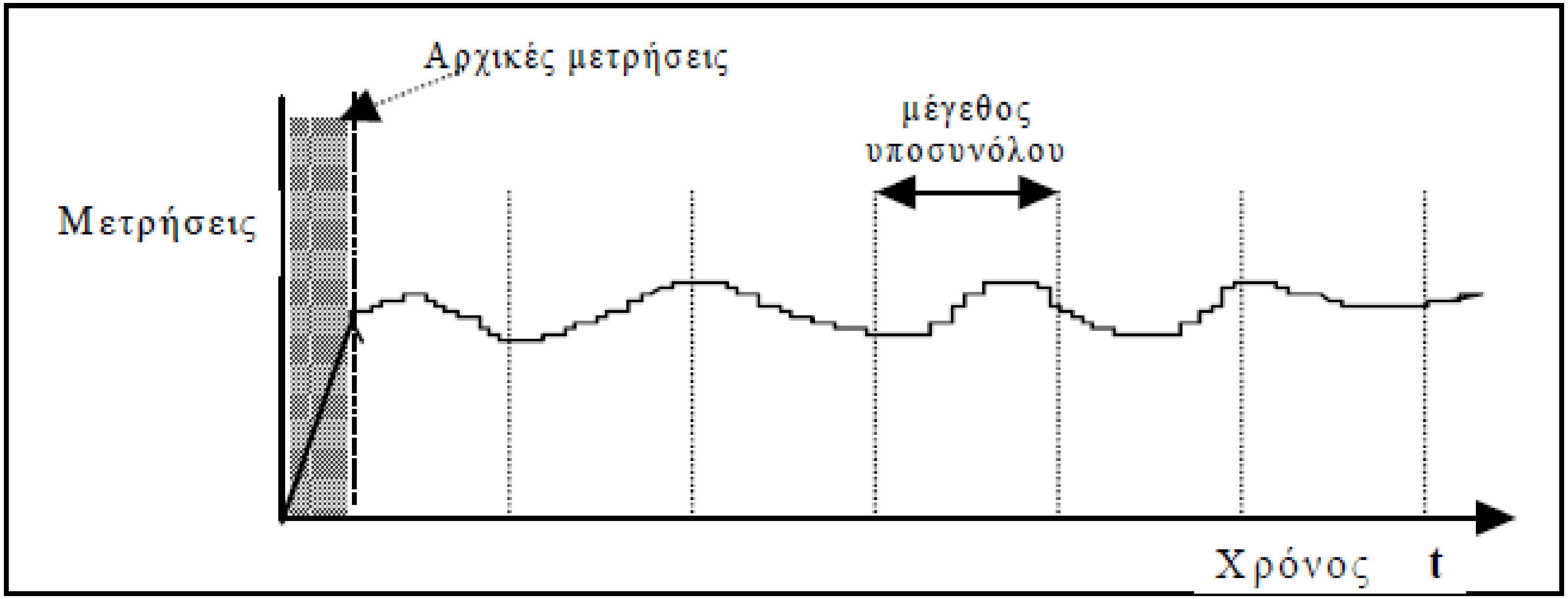
Ο πίνακας δίνει την τιμή της $t_{\alpha/2}^{n-1}$ για πιθανότητα 1-α = 95%.

Αριθμός δειγμάτων (n)	Βαθμοί ελευθερίας (n-1)	$t_{0.05/2}^{n-1}$
2.	1.	12.706
3.	2.	4.303
4.	3.	3.182
5.	4.	2.776
6.	5.	2.571
7.	6.	2.447
8.	7.	2.365
9.	8.	2.306
10.	9.	2.262
11.	10.	2.228
12.	11.	2.201
13.	12.	2.179

Ανάλυση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης με την μέθοδο της μέσης τιμής υποσυνόλων

Η μέθοδος της μέσης τιμής υποσυνόλων (Batch Mean Method)

Εδώ, n δείγματα τα οποία έχουν ληφθεί από την εκτέλεση μιας προσομοίωσης χωρίζονται σε M υποσύνολα που το καθένα περιλαμβάνει n΄=n/M δείγματα (βλ. σχήμα). Η μέση τιμή και το διάστημα εμπιστοσύνης υπολογίζονται από τα M υποσύνολα.



Ανάλυση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης με την μέθοδο της μέσης τιμής υποσυνόλων (1)

Αν X_{mi} είναι τα i-οστά δείγματα του m-οστού υποσυνόλου, τότε η μέση τιμή του υποσυνόλου δίνεται από την σχέση:

$$\overline{X}_m = \frac{1}{n'}\sum_{i=1}^{n'} X_{mi} \qquad \textbf{(18)}$$

και η συνολική μέση τιμή των μετρήσεων από την σχέση:

$$\overline{X} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} X_m \qquad \textbf{(19)}$$

Το πλήθος M των υποσυνόλων πρέπει να είναι μεγάλο ώστε να ισχύει το κεντρικό οριακό θεώρημα. Αν και φαίνεται προτιμότερο να απορριφθούν ορισμένες μετρήσεις μεταξύ των υποσυνόλων ώστε να αποφευχθεί η αλληλοσυσχέτιση μεταξύ τους, είναι γνωστό ότι η διασπορά των δειγμάτων μειώνεται με την χρήση αυτών των μετρήσεων. Έτσι, στις περισσότερες περιπτώσεις, αφού απορρίψουμε τις αρχικές μετρήσεις της περιόδου T, στη μέθοδο αυτή χρησιμοποιούνται όλες οι υπόλοιπες μετρήσεις.

Ανάλυση των αποτελεσμάτων προσομοίωσης με την μέθοδο της μέσης τιμής υποσυνόλων (2)

Στην πράξη, γνωρίζουμε ότι για n΄ > 25 η αλληλοσυσχέτιση μεταξύ των υποσυνόλων καθίσταται αμελητέα, και η μέση τιμή του υποσυνόλου $\overline{X}_m$ ακολουθεί σχεδόν την κανονική κατανομή N(μ, σ^2/n΄), όπου μ και σ είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του X, αντίστοιχα.

Επομένως, τα όρια του διαστήματος εμπιστοσύνης υπολογίζονται ως εξής:

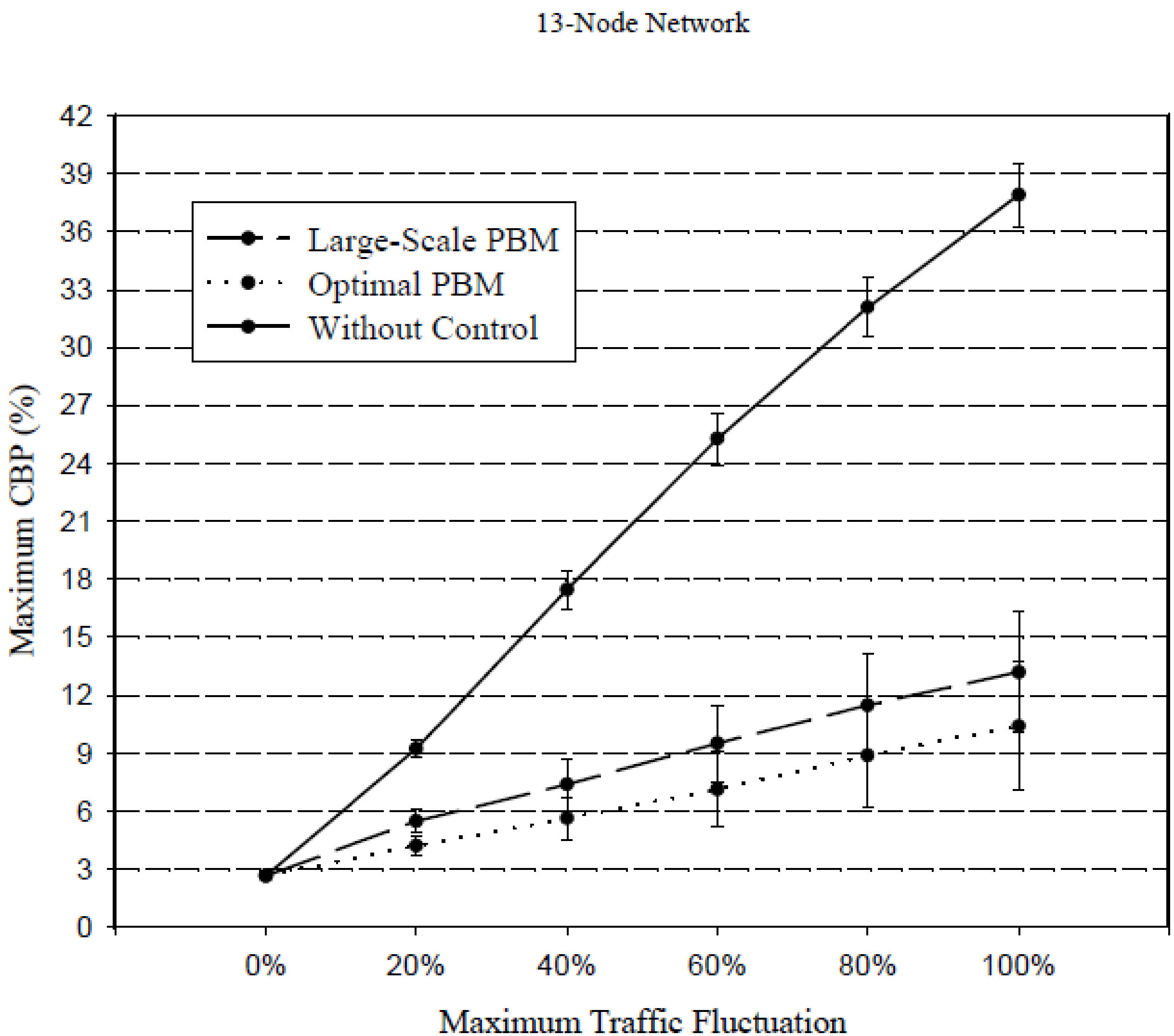
$$\left.\begin{matrix}\mu_\alpha^+ \\ \mu_\alpha^-\end{matrix}\right\} = \overline{X} \pm \frac{\sigma_m}{\sqrt{M}} u_{\alpha/2} \qquad \textbf{(20)}$$

όπου σ_m^2 η διασπορά του $\overline{X}_m$

Αν η διασπορά σ_m^2 είναι άγνωστη, χρησιμοποιούμε την δειγματική διασπορά:

$$S^2 = \frac{1}{M-1}\sum_{m=1}^{M}\left(X_m - \overline{X}\right)^2 \qquad \textbf{(21)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ



Παράδειγμα ανάλυση αποτελεσμάτων προσομοίωσης

Παράδειγμα 3

Από την προσομοίωση στον Η/Υ ενός συστήματος αναμονής, ο μέσος αριθμός κλήσεων στην ουρά αναμονής, για 10 χρονικά διαστήματα μετρήσεων, φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα. Ζητείται:

1) Να εκτιμηθεί η μέση τιμή του αριθμού των κλήσεων στην ουρά αναμονής με πιθανότητα λάθους 5%.

2) Αν ο ρυθμός άφιξης των κλήσεων είναι $\lambda = 0.5$ κλήσεις / sec και η μέση τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης των κλήσεων είναι $h = 1$ sec, να βρεθεί ο μέσος χρόνος αναμονής των κλήσεων στην ουρά.

Α/Α Χρονικού διαστήματος μετρήσεων	Μέσον μήκος ουράς αναμονής	Α/Α Χρονικού διαστήματος μετρήσεων	Μέσον μήκος ουράς αναμονής
1	1.6066	6	1.4882
2	1.1960	7	1.5795
3	1.6180	8	2.2253
4	2.0105	9	1.7656
5	0.9609	10	1.4930

Παράδειγμα ανάλυση αποτελεσμάτων προσομοίωσης (1)

ΛΥΣΗ

1) Εφαρμόζοντας την μέθοδο της μέσης τιμής των υποσυνόλων θα πρέπει να βρούμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης όπου με πιθανότητα 95% θα βρίσκεται η μέση τιμή του αριθμού των κλήσεων στην ουρά αναμονής. Ο αριθμός των υποσυνόλων είναι M = 10.

   Η μέση τιμή των 10 αυτών μετρήσεων είναι L=1.5944. Επομένως, από την (21) υπολογίζουμε την δειγματική διασπορά S^2= 0.1314.

   Από την κατανομή t με βαθμούς ελευθερίας M-1 = 9, έχουμε (βάσει του πίνακα 8.5) ότι $t_{0.05/2}^{9} = 2.262$. Άρα από την (20) για $u_{\alpha/2} = t_{0.05/2}^{9} = 2.262$ και σ_m=S=0.3625 λαμβάνουμε τα όρια του διαστήματος εμπιστοσύνης: μ_α^+ και $\mu_\alpha^- = 1.5944 \pm 0.2593$. Δηλαδή [1.3351, 1.8573].

2) Από τον νόμο του Little ο μέσος χρόνος παραμονής των κλήσεων στην ουρά αναμονής θα δίδεται από W= L/λ =1.5944/0.5= 3.1888 sec.

Ανάλυση των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης με την αναγεννητική μέθοδο

Η Αναγεννητική Μέθοδος

Μια στοχαστική διαδικασία {X(t); t>0} ονομάζεται **αναγεννητική διαδικασία** αν συμπεριφέρεται σύμφωνα με πιθανοτικούς κανόνες ανεξάρτητους των συμβάντων του παρελθόντος, για μια σειρά χρονικών στιγμών $\{t_n\}$, τα **αναγεννητικά στιγμιότυπα**. Π.χ., σ' ένα σύστημα αναμονής, αν $\{t_n\}$ είναι στιγμιότυπα άφιξης κλήσεων όταν το σύστημα είναι κενό, τότε το πλήθος των κλήσεων που υπάρχουν στο σύστημα αποτελεί αναγεννητική διαδικασία με αναγεννητικά στιγμιότυπα τις χρονικές στιγμές $\{t_n\}$.

Η αναγεννητική μέθοδος βασίζεται στην αρχή ότι τα υποσύνολα πρέπει να σχηματίζονται μεταξύ αναγεννητικών στιγμιότυπων ώστε να πλεονεκτούν αναλύοντάς τα με τους κανόνες των στοχαστικών διαδικασιών (βλ. σχήμα). Π.χ. μπορούμε να καθορίσουμε εκ των προτέρων το μήκος του υπολογιστικού χρόνου που απαιτείται για την επίτευξη της προκαθορισμένης ακρίβειας στα αποτελέσματα της προσομοίωσης.

Συνήθη λάθη στις προσομοιώσεις (1)

1) *Ανάρμοστο επίπεδο λεπτομέρειας:*

Η προσομοίωση επιτρέπει την μελέτη ενός συστήματος με περισσότερες λεπτομέρειες απ’ ό,τι η αναλυτική μέθοδος. Τα αναλυτικά μοντέλα απαιτούν συνήθως αρκετές απλοποιήσεις και υποθέσεις. Δηλαδή ένα αναλυτικό μοντέλο περιέχει λιγότερες λεπτομέρειες.

Το πόσο λεπτομερειακό θα είναι ένα μοντέλο προσομοίωσης εξαρτάται μόνο από τον διαθέσιμο χρόνο για την ανάπτυξη της προσομοίωσης.

Όσο περισσότερο λεπτομερειακή απαιτούμε να είναι η προσομοίωση, τόσο περισσότερος χρόνος απαιτείται για την ανάπτυξη της.

Λαμβάνοντας υπ’ όψη πολλές λεπτομέρειες αυξάνεται η πιθανότητα ύπαρξης ατελειών ενώ γίνεται πιο δύσκολος ο εντοπισμός τους.

Συνήθη λάθη στις προσομοιώσεις (2)

2) *Ακατάλληλη γλώσσα προγραμματισμού:*

Η επιλογή της γλώσσας προγραμματισμού έχει σημαντικό αντίκτυπο στην γρήγορη ανάπτυξη του μοντέλου. Οι γλώσσες προσομοίωσης ειδικού σκοπού (special-purpose simulation languages) απαιτούν λιγότερο χρόνο για την ανάπτυξη του μοντέλου και διευκολύνουν διάφορα γενικά καθήκοντα όπως η επαλήθευση (verification) και η στατιστική ανάλυση.

Από την άλλη πλευρά οι γλώσσες γενικού σκοπού είναι περισσότερο οικείες στον προγραμματιστή και παρέχουν καλύτερο έλεγχο στην αποτελεσματικότητα της προσομοίωσης και στον χρόνο εκτέλεσης.

Συνήθη λάθη στις προσομοιώσεις (3)

3) *Ανεπιβεβαίωτο λογισμικό:*

Πολλές φορές τα μοντέλα προσομοίωσης είναι μεγάλα υπολογιστικά προγράμματα και είναι πιθανό να έχουν αρκετές ατέλειες (bugs) ή λάθη προγραμματισμού που θα οδηγήσουν σε επισφαλή συμπεράσματα.

4) *Άκυρα μοντέλα:*

Ακόμη και αν το πρόγραμμα προσομοίωσης είναι αλάνθαστο μπορεί να μην αναπαριστά σωστά το πραγματικό σύστημα εξ αιτίας λανθασμένων υποθέσεων που σχετίζονται με την συμπεριφορά του συστήματος.

5) *Ακατάλληλη αντιμετώπιση αρχικών συνθηκών:*

Το αρχικό στάδιο μιας προσομοίωσης δεν είναι γενικά αντιπροσωπευτικό της συμπεριφοράς ενός συστήματος σε μια κατάσταση ισορροπίας. Συνήθως αρχικά έχουμε το μεταβατικό στάδιο και επομένως επιβάλλεται να απορριφθεί.

Συνήθη λάθη στις προσομοιώσεις (4)

6) *Προσομοιώσεις πολύ μικρής διάρκειας:*

Οι αναλυτές συχνά προσπαθούν να εξοικονομήσουν χρόνο «τρέχοντας» πολύ μικρές προσομοιώσεις. Τα αποτελέσματα σε αυτές τις περιπτώσεις εξαρτώνται κατά μεγάλο βαθμό από τις αρχικές συνθήκες και μπορεί να μην αντιπροσωπεύουν το πραγματικό σύστημα.

7) *Πτωχές γεννήτριες τυχαίων αριθμών:*

Τα μοντέλα προσομοίωσης απαιτούν τυχαίες ποσότητες και οι διαδικασίες για την παραγωγή τυχαίων αριθμών καλούνται γεννήτριες τυχαίων αριθμών. Είναι ασφαλέστερο να χρησιμοποιηθεί μια γνωστή γεννήτρια, η οποία έχει διεξοδικά αναλυθεί, παρά να αναπτύξει κάποιος την δική του.

8) *Ακατάλληλη επιλογή των αριθμών «seed» (σπόρος):*

Όπως είδαμε οι γεννήτριες τυχαίων αριθμών είναι υπολογιστικές διαδικασίες στις οποίες αν δοθεί ένας τυχαίος αριθμός παράγουν έναν άλλο. Ο πρώτος τυχαίος αριθμός σ’αυτή την ακολουθία αριθμών ονομάζεται «seed» και παρέχεται από τον αναλυτή. Το «seed» για διαφορετικές ακολουθίες τυχαίων αριθμών πρέπει να επιλέγεται με πολύ προσοχή (χρήση πρώτων αριθμών) για να διατηρηθεί η στατιστική ανεξαρτησία μεταξύ των ακολουθιών.

Παράδειγμα

- Σε ένα σύστημα αναμονής ο ρυθμός άφιξης των κλήσεων είναι, κατά μέσον όρο, 24 κλήσεις την ώρα. Από προσομοίωση της κίνησης στον Η/Υ, ελήφθησαν οι μετρήσεις, που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα, σε 10 χρονικά διαστήματα, για το μέσο μήκος της σχηματιζομένης ουράς αναμονής. Τα δύο πρώτα διαστήματα εκτιμάται ότι εκφράζουν την μεταβατική κατάσταση του συστήματος (stabilization time).
- Να βρεθεί το διάστημα εμπιστοσύνης στο οποίο ευρίσκεται το μήκος της ουράς αναμονής, κατά μέσον όρο, με πιθανότητα λάθους 5%, εφαρμόζοντας την μέθοδο της μέσης τιμής των υποσυνόλων (Batch Mean Method).
- Αν η μέση τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης των κλήσεων είναι 5 min, να βρεθεί ο μέσος χρόνος αναμονής των κλήσεων στην ουρά, καθώς και ο μέσος χρόνος παραμονής των κλήσεων στο σύστημα.
- Είναι ικανοποιητικός ο αριθμός των διαστημάτων μέτρησης; Πότε θεωρείται ικανοποιητικός;
- Πότε είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε αντί της μεθόδου της μέσης τιμής των υποσυνόλων, την μέθοδο των επαναλήψεων;

Παράδειγμα (συνέχεια 1)

Χρονικό Διάστημα	Μέσον μήκος ουράς
1	0.5098
2	3.5932
3	2.6066
4	2.1960
5	2.6180
6	3.0105
7	1.9609
8	2.4882
9	2.5795
10	3.2253

Παράδειγμα (συνέχεια 2)

1) Αφού τα δύο πρώτα χρονικά διαστήματα ανήκουν στην μεταβατική κατάσταση κατά την προσομοίωση του συστήματος, εξαιρούνται από τις μετρήσεις. Άρα N = 8 και έτσι υπολογίζουμε την μέση τιμή των μετρήσεων:

$$\bar{X} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} X_i = \frac{20.685}{8} = 2.586$$

Άρα το διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή των μετρήσεων θα είναι:

$$\left.\begin{matrix} \mu_\alpha^+ \\ \mu_\alpha^- \end{matrix}\right\} = 2.586 \pm \frac{\sigma}{\sqrt{8}} u_{\alpha/2}$$

όπου σ είναι η τυπική απόκλιση των μετρήσεων και θα υπολογισθεί από την διασπορά:

$$S^2 = \frac{1}{\mathrm{n}-1}\sum_{i=1}^{\mathrm{n}} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8} \left(X_i - 2.586\right)^2$$

= (0.00042436 + 0.1521 + 0.001024 + 0.18020025 + 0.39075001 + 0.00956484 + 0.00004225 + 0.40870449) / 7 = 0.1632586

Παράδειγμα (συνέχεια 3)

Άρα σ = 0.404 (τετραγωνική ρίζα του 0.1632586).

$u_{\alpha/2}$ είναι η τιμή της κανονικής κατανομής για την οποία: $P\{X > u_{\alpha/2}\} = \alpha/2$.
Επειδή όμως χρησιμοποιούμε την διασπορά του δείγματος, θα χρησιμοποιήσουμε την αντίστοιχη τιμή της κατανομής *t* (Student).

Για α=5%, από πίνακα τιμών της κατανομής *t* για 7 (= 8-1) βαθμούς ελευθερίας παίρνουμε ότι $t_{0.05/2} = 2.365$.
Άρα

$$\left.\begin{matrix}\mu_\alpha^{+}\\ \mu_\alpha^{-}\end{matrix}\right\} = 2.586 \pm \frac{0.404}{\sqrt{8}} 2.365 = 2.586 \pm 0.3378$$

Δηλαδή το διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο μήκος της ουράς αναμονής είναι [2.248, 2.923].

Παράδειγμα (συνέχεια 4)

2) Ο μέσος χρόνος παραμονής των κλήσεων στην ουρά αναμονής είναι περίπου

- $W = L / \lambda = 2.586 / 24 = 0.10775$ hours = 6.465 min ≈ **6.5 min**.
- Ο μέσος χρόνος παραμονής των κλήσεων στο σύστημα είναι περίπου $T = w + h \approx 6{,}5 + 5$ min = **11.5 min**.

3) Ο αριθμός των διαστημάτων μέτρησης θεωρείται ικανοποιητικός όταν το διάστημα εμπιστοσύνης είναι αρκετά «στενό». Στην προκειμένη περίπτωση το διάστημα εμπιστοσύνης είναι αρκετά ικανοποιητικό, αλλά θα μπορούσε να εκτιμηθεί σε συνολικό εύρος διαστήματος εμπιστοσύνης μικρότερο του 0.5.

Άσκηση Προσομοίωσης 1

- Προσομοιώστε στον Η/Υ το σύστημα Μ/Μ/2 με την μέθοδο της ρουλέτας (Μαρκοβιανής αλυσίδας) για φορτίο κίνησης α = 1 erl. Θεωρήστε ακολουθία 16 τυχαίων αριθμών ομοιόμορφης κατανομής που θα δημιουργήσετε με την πολλαπλασιαστική μέθοδο του υπολοίπου ($x_n = \underline{k}\ x_{n-1}$ (mod M)), με δικό σας «seed number», αλλά επιλέγοντας τις παραμέτρους έτσι ώστε να προκύπτει μέγιστη περίοδος επανάληψης των ψευδοτυχαίων αριθμών, ακριβώς 16 αριθμοί.
- Με βάση την προσομοίωση να υπολογίσετε την πιθανότητα απωλείας κλήσεως και να την συγκρίνετε με την τιμή $E_2(1)$ = 20% που προκύπτει από την Erlang B formula.
- Σημειωτέον: δεν χρησιμοποιούμε την μέθοδο της ρουλέτας σε μικρά συστήματα, (παρά μόνον χάριν ασκήσεως). Δεν ζητείται κώδικας λογισμικού, παρά μόνον, σε πίνακες, η δομή των δεδομένων και τα αποτελέσματα της προσομοίωσης, βήμα προς βήμα.

Λύση της Άσκησης Προσομοίωσης 1

- Έστω x_0=1 (mod 2) $\Rightarrow$ x_0 = 2n + 1, n=0, 1, 2, ... , οπότε έστω x_0 = 3.
- Αποφεύγουμε την επιλογή x_0 = 1, διότι ουσιαστικά επιλέγουμε seed number, και θέλουμε οι διαδοχικοί seed numbers που θα επιλεγούν να μη διαιρούνται μεταξύ τους.
- Θέλουμε 16 (ψευδο)τυχαίους αριθμούς. Αφού 16 =2^4, επιλέγουμε M = 2^{4+2} = 64.
- Επίσης, θέλουμε k = ± 3 (mod 8) $\Rightarrow$ k = 8n ± 3, n=0, 1, 2, ... , οπότε έστω k=3.
- Βάσει της σχέσεως **x_n = 3 x_{n-1} (mod 64),** θα λάβουμε την ακολουθία των ψευδοτυχαίων αριθμών R (2η στήλη του κατωτέρω πίνακα), την οποία διαιρώντας διά 64 την μεταθέτουμε στο διάστημα (0,1) (3η στήλη).
- Αφού το σύστημα έχει χωρητικότητα 2 trunks, θα χρησιμοποιήσουμε στον Η/Υ ένα διάνυσμα 2 θέσεων με αρχικές τιμές (0 0) που σημαίνει ότι το σύστημα αρχικώς είναι κενό. Το διάνυσμα αυτό δείχνεται στην 7η στήλη του πίνακα. Ακολούθως, θα αλλάζουμε τις τιμές από 0 σε 1 για να δείχνουμε κατάληψη ελεύθερου trunk λόγω άφιξης κλήσεως (πιθανότητα P_a=*α*/(α+n)), ή από 1 σε 0 για να δείχνουμε απελευθέρωση κατειλημμένου trunk λόγω τερματισμού κλήσεως (πιθανότητα P_b=n/(α+n)).
- Άφιξη κλήσεως θα έχουμε όταν ο τυχαίος αριθμός Y είναι: 0 < Y < α/(α+n).
- Τερματισμό κλήσεως θα έχουμε όταν ο τυχαίος αριθμός Y είναι: α/(α+n) < Y < 1, όπου: n = 0, 1, 2, και *α* = 1.

Αρχικά έχουμε πάντα άφιξη κλήσεως, αφού P_a= 1 και P_b= 0.

1ο "run" της προσομοίωσης 1

A/A	R	(0, 1)	P_a	P_b	Κλήση	Trunks	Εξυπηρέτηση
1	3	0.047	**1**	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
2	9	0.141	**0.50**	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
3	27	0.422	**0.333**	0.667	Τερματισμός	(1 0)	
4	17	0.266	**0.50**	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
5	51	0.797	**0.333**	0.667	Τερματισμός	(1 0)	
6	25	0.391	**0.50**	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
7	11	0.172	**0.333**	0.667	Άφιξη	(1 1)	ΟΧΙ
8	33	0.516	**0.333**	0.667	Τερματισμός	(1 0)	
9	35	0.547	**0.50**	0.50	Τερματισμός	(0 0)	
10	41	0.641	**1**	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
11	59	0.922	**0.50**	0.50	Τερματισμός	(0 0)	
12	49	0.766	**1**	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
13	19	0.297	**0.50**	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
14	57	0.891	**0.333**	0.667	Τερματισμός	(1 0)	
15	43	0.672	**0.50**	0.50	Τερματισμός	(0 0)	
16	1	0.016	**1**	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
17	3	0.047					

<u>Υπολογισμός της πιθανότητας απωλείας κλήσεως, έστω Β1:</u> Στον ανωτέρω πίνακα έχουμε καταγράψει 8 αφίξεις κλήσεων και 1 απώλεια (ΟΧΙ). Άρα Β1=1/8. Αν μάλιστα θεωρήσουμε ότι η πρώτη γραμμή του πίνακα αυτού εκφράζει μεταβατική κατάσταση, τότε Β1 = 1/7 = 14.29%.

2ο "run" της προσομοίωσης 1

Α/Α	R	(0, 1)	P_a	P_b	Κλήση	Trunks	Εξυπηρέτηση
1	5	0.078	**1**	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
2	15	0.234	**0.50**	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
3	45	0.703	**0.333**	0.667	Τερματισμός	(1 0)	
4	7	0.109	**0.50**	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
5	21	0.328	**0.333**	0.667	Άφιξη	(1 1)	ΟΧΙ
6	63	0.984	**0.333**	0.667	Τερματισμός	(1 0)	
7	61	0.953	**0.50**	0.50	Τερματισμός	(0 0)	
8	55	0.959	**1**	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
9	37	0.578	**0.50**	0.50	Τερματισμός	(0 0)	
10	47	0.734	**1**	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
11	13	0.203	**0.50**	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
12	39	0.609	**0.333**	0.667	Τερματισμός	(1 0)	
13	53	0.828	**0.5**	0.5	Τερματισμός	(0 0)	
14	31	0.484	**1**	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
15	29	0.453	**0.50**	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
16	23	0.359	**0.333**	0.667	Τερματισμός	(1 0)	
17	5	0.078					

<u>Υπολογισμός ξανά της πιθανότητας απωλείας κλήσεως, έστω Β2:</u> Στον ανωτέρω πίνακα έχουμε καταγράψει 8 αφίξεις κλήσεων και 1 απώλεια (ΟΧΙ). Άρα Β2 = 1/8. Αν η πρώτη γραμμή του πίνακα αυτού εκφράζει μεταβατική κατάσταση του συστήματος, τότε Β2 = 1/7 = 14.29%.

3^{ο} “run” της προσομοίωσης 1

Α/Α	R	(0, 1)	P_a	P_b	Κλήση	Trunks	Εξυπηρέτηση
1	11	0.172	**1**	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
2	33	0.516	**0.50**	0.50	Τερματισμός	(0 0)	
3	35	0.547	**1**	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
4	41	0.641	**0.50**	0.50	Τερματισμός	(0 0)	
5	59	0.922	**1**	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
6	49	0.766	**0.50**	0.50	Τερματισμός	(0 0)	
7	19	0.297	**1**	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
8	57	0.891	**0.50**	0.50	Τερματισμός	(0 0)	
9	43	0.672	**1**	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
10	1	0.016	**0.50**	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
11	3	0.047	**0.333**	0.667	Άφιξη	(1 1)	ΟΧΙ
12	9	0.141	**0.333**	0.667	Άφιξη	(1 1)	ΟΧΙ
13	27	0.422	**0.333**	0.667	Τερματισμός	(1 0)	
14	17	0.266	**0.5**	0.5	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
15	51	0.797	**0.333**	0.667	Τερματισμός	(1 0)	
16	25	0.391	**0.5**	0.5	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
17	11	0.172					

Στον ανωτέρω πίνακα έχουμε καταγράψει 8 αφίξεις κλήσεων και 2 απώλειες. Άρα B3 = 2/8. Αν η $1^{η}$ γραμμή του πίνακα αυτού εκφράζει μεταβατική κατάσταση του συστήματος, τότε B3 = 2/7 = 28.57%. Έτσι, η πιθανότητα απωλείας κλήσεως είναι (B1+B2+B3)/3=**19.05% (~20%)**

Τέλος Ενότητας