



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης

Ενότητα 11: Συστήματα υπερροής

Μιχαήλ Λογοθέτης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σκοποί ενότητας

- Περιγραφή και ανάλυση συστημάτων υπερροής
- Περιγραφή και ανάλυση της θεωρίας της ισοδύναμης τυχαίας κινήσεως



Περιεχόμενα ενότητας

- Συστήματα υπερροής
- Η θεωρία της ισοδύναμης τυχαίας κινήσεως
- Παραδείγματα



Συστήματα υπερροής

Στα **συστήματα εναλλακτικής δρομολόγησης (alternative routing systems)** ή **συστήματα υπερροής (overflow systems)**, αν όλη η χωρητικότητα μιας ζεύξης ενός τηλεπικοινωνιακού δικτύου είναι κατειλημμένη, τότε η κίνηση που φράσσεται, πηγαίνει στον προορισμό της μέσω μιας **εναλλακτικής διαδρομής (alternative route)**.

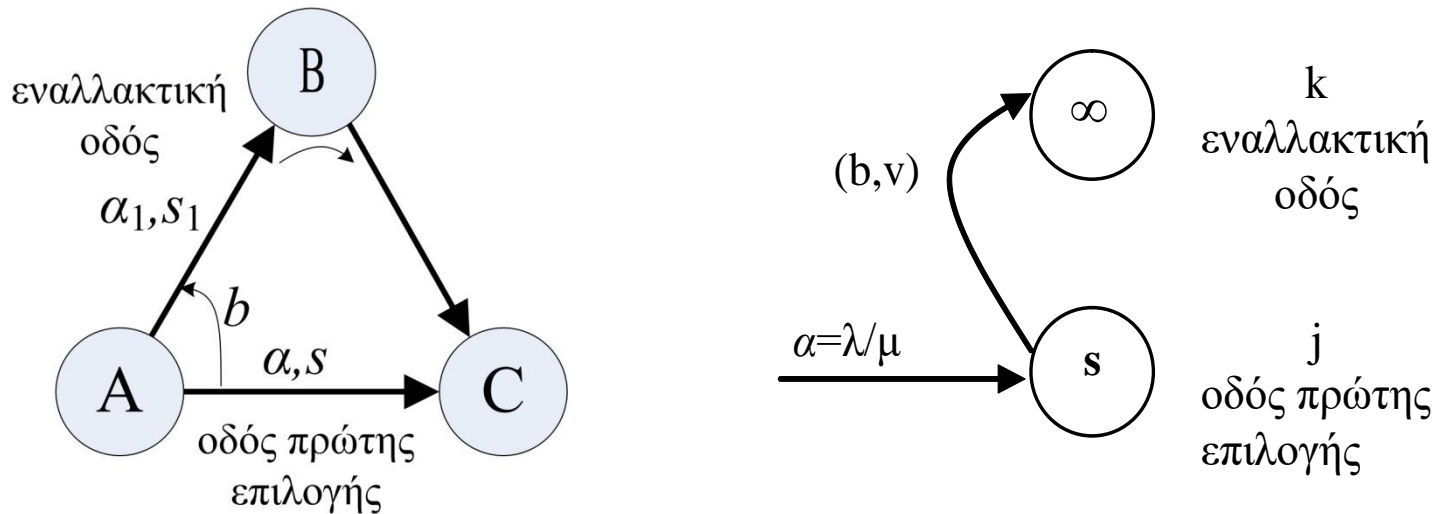
Το μοντέλο του συστήματος αυτού είναι ένα μοντέλο περιορισμένης διαθεσιμότητας και ποικίλες πρακτικές προσεγγίσεις έχουν μελετηθεί, καθώς και η ακριβής λύση του με την μέθοδο της αριθμητικής ανάλυσης.

Στην ενότητα αυτή περιγράφονται οι τυπικές μέθοδοι και αναλύεται η **θεωρία της ισοδύναμης τυχαίας κινήσεως**.



Συστήματα υπερροής – Μοντέλο κίνησης υπερροής (1)

Θεωρούμε το μοντέλο εναλλακτικής δρομολόγησης του σχήματος. Αν οι κλήσεις που ακολουθούν μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ βρίσκουν στην αρχική διόδευση όλους τους εξυπηρετητές κατειλημμένους, τότε μεταφέρονται σε μια δεύτερη, εναλλακτική, διόδευση που έστω ότι έχει άπειρη χωρητικότητα. Η κίνηση που μεταφέρεται από την αρχική διόδευση στην εναλλακτική καλείται **κίνηση υπερροής (overflow traffic)**.

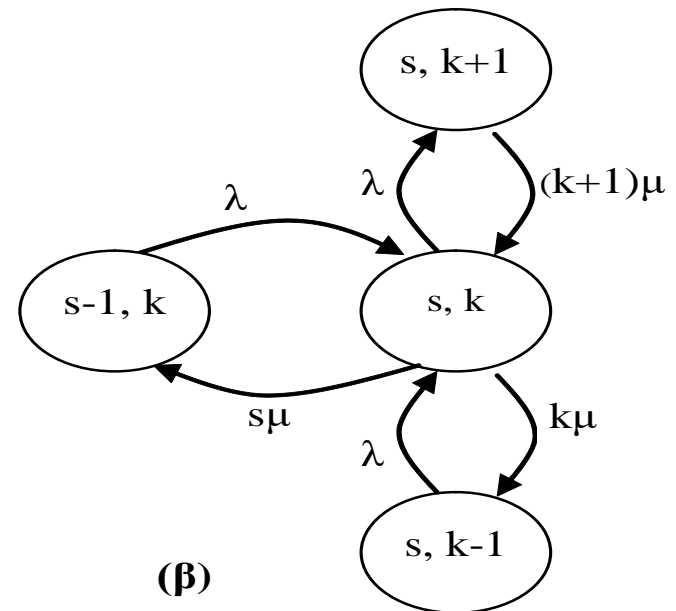
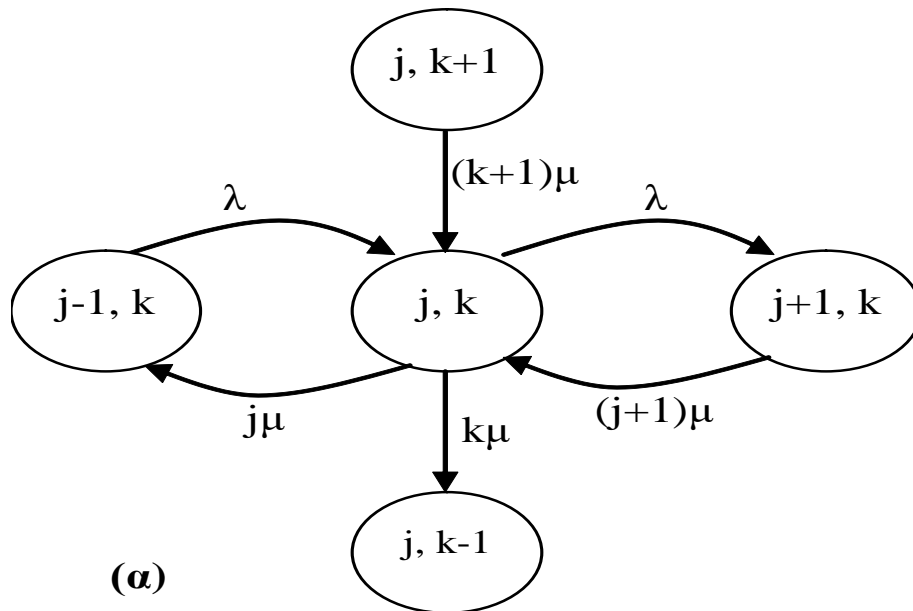


Είδη ζεύξεων σε δίκτυο υπερροής

- Πρωτεύουσα ζεύξη υψηλής εκμετάλλευσης (**Primary high-usage trunk group**)
 - Διαδρομή 1^{ης} επιλογής
 - Δεν δέχεται κίνηση υπερροής
- Ενδιάμεση ζεύξη υψηλής εκμετάλλευσης (**Intermediate high-usage trunk group**)
 - Δέχεται κίνηση υπερροής
 - Διαδρομή 1^{ης} επιλογής
 - Διαδρομή μη τελικής επιλογής
- Τελική ζεύξη (**Final trunk group**)

Συστήματα υπερροής – Μοντέλο κίνησης υπερροής (2)

- Υποθέτοντας ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανομημένος με μέση τιμή μ^{-1} και στις δύο οδούς, λαμβάνουμε τα διαγράμματα μεταβολής των καταστάσεων που απεικονίζονται στο σχήμα.
- Το σχήμα (α) αντιστοιχεί σε $j \neq s$, ενώ το σχήμα (β) σε $j = s$.



Συστήματα υπερροής – Μοντέλο κίνησης υπερροής (3)

- Αν P_{jk} είναι η πιθανότητα να υπάρχουν στην μόνιμη κατάσταση j και k κλήσεις στις οδούς πρώτης και δεύτερης επιλογής, αντιστοίχως, τότε, λόγω της σφαιρικής ισορροπίας, λαμβάνουμε τις εξισώσεις μόνιμου καταστάσεως για $j \neq s$ και $j = s$ αντιστοίχως:

$$[\lambda + (j+k)\mu]P_{jk} = \lambda P_{j-1,k} + (j+1)\mu P_{j+1,k} + (k+1)\mu P_{j,k+1} \quad j=0,1,\dots,s-1 \quad k=0,1,\dots \text{ και } P_{-1,k}=0 \quad (1)$$

$$[\lambda + (s+k)\mu]P_{sk} = \lambda P_{s-1,k} + \lambda P_{s,k-1} + (k+1)\mu P_{s,k+1} \quad j=s \quad k=0,1,\dots \text{ και } P_{s,-1}=0 \quad (2)$$



Συστήματα υπερροής – Μοντέλο κίνησης υπερροής (4)

Για να λύσουμε τις εξισώσεις (1) και (2), εισάγουμε την βοηθητική συνάρτηση Q_{jk} η οποία ικανοποιεί την (1) για $j = 0, 1, \dots$ και επίσης:

$$Q_{jk} = P_{jk}, \text{ για } j=0, 1, \dots, s \text{ και } k = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας της Q_{jk} είναι η:

$$g(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x^j y^k Q_{jk} \quad (4)$$



Συστήματα υπερροής – Μοντέλο κίνησης υπερροής (5)

Τότε από την (1) έχουμε την μερική διαφορική εξίσωση:

$$(1-x)\frac{\theta}{\theta x}g(x,y) + (1-y)\frac{\theta}{\theta y}g(x,y) = \alpha(1-x)g(x,y) \quad (5)$$

όπου $\alpha = \lambda/\mu$.

Η λύση της (5) είναι της μορφής:

$$g(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r (1-y)^r \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_r(j) x^j \quad (6)$$

όπου το $\Phi_r(j)$ ορίζεται ως εξής :

$$\Phi_0(j) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^j}{j!} \quad (6\alpha)$$

$$\Phi_{r+1}(j) = \sum_{k=0}^j \Phi_r(k), \quad r = 1, 2, \dots$$



Συστήματα υπερροής – Μοντέλο κίνησης υπερροής (6)

Ο συντελεστής C_r στην σχέση (6) καθορίζεται έτσι ώστε να ικανοποιεί την οριακή συνθήκη (2) και την συνθήκη κανονικοποίησης:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} Q_{jk} = 1 \quad (7)$$

επομένως από το βιβλίο του Cooper^[1] (σελ. 66), έχουμε:

$$c_r = (-1)^r \frac{a^r}{r!} \frac{\Phi_0(s)}{\Phi_{r+1}(s)\Phi_r(s)} \quad (8)$$

[1] Cooper, R.B., “Introduction to Queuing Theory”, Second Ed., North Holland, 1981.



Συστήματα υπερροής – Μέση τιμή και διασπορά των κλήσεων υπερροής (1)

- Εφ' όσον η χωρητικότητα της εναλλακτικής οδού (ζεύξης) είναι άπειρη, οι κλήσεις που προσφέρονται σ' αυτή θα διεκπεραιώνονται και θα αποκαλούνται **κλήσεις υπερροής (overflow calls)**. Η μέση τιμή (mean) b και η διασπορά (variance) v των κλήσεων υπερροής δίνονται από τις σχέσεις:

$$b = aE_s(\alpha) \equiv b(s, \alpha) \quad (9\alpha)$$

$$v = b \left(1 - b + \frac{a}{s + 1 - a + b} \right) \equiv v(s, a) \quad (9\beta)$$

που καλούνται **τύποι του Wilkinson**.

Σε πρακτικά προβλήματα, χρειάζεται να βρούμε τα a και s όταν μας δίνονται τα b και v . Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει βάσει των (9α), (9β).



Συστήματα υπερροής – Μέση τιμή και διασπορά των κλήσεων υπερροής (2)

- Ωστόσο, ο **Rapp** βρήκε τις εξής σχέσεις που προσεγγιστικά μας δίνουν τα a και s σε κλειστή μορφή (**σχέσεις Rapp**):

$$a = v + 3z(z - 1), \quad s = a \frac{b + z}{b + z - 1} - b - 1 \quad (10)$$

όπου $z = v/b > 1$ και ονομάζεται **δείκτης διασποράς (index of variance – peakedness factor)**.

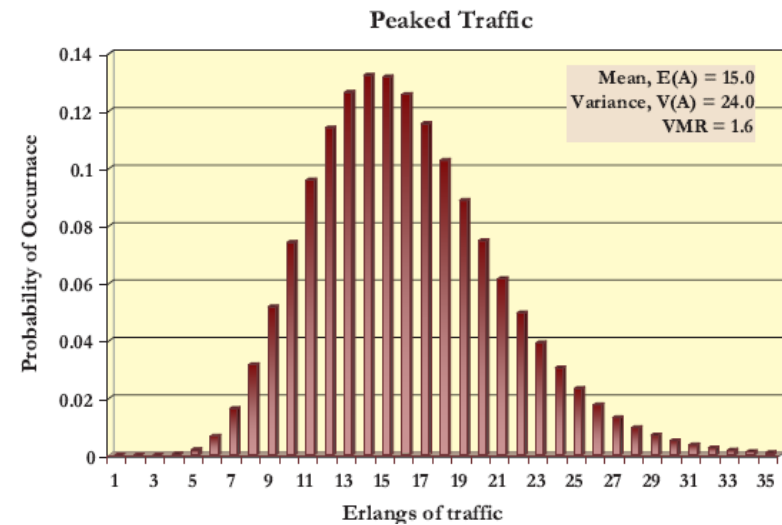
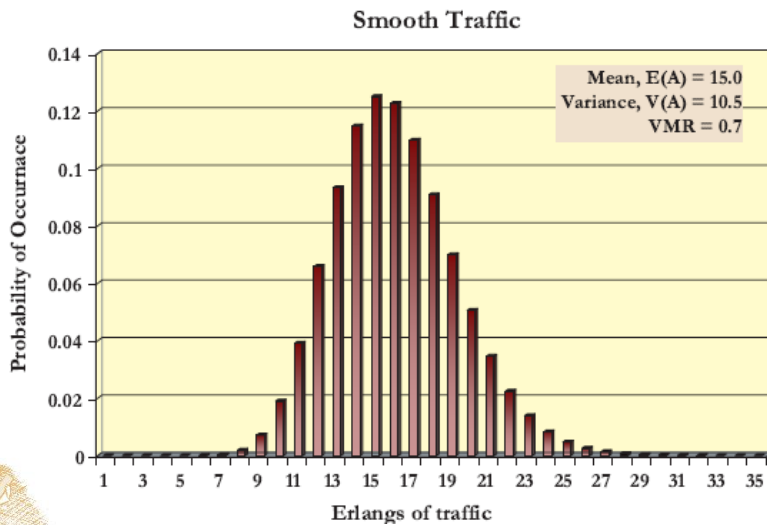
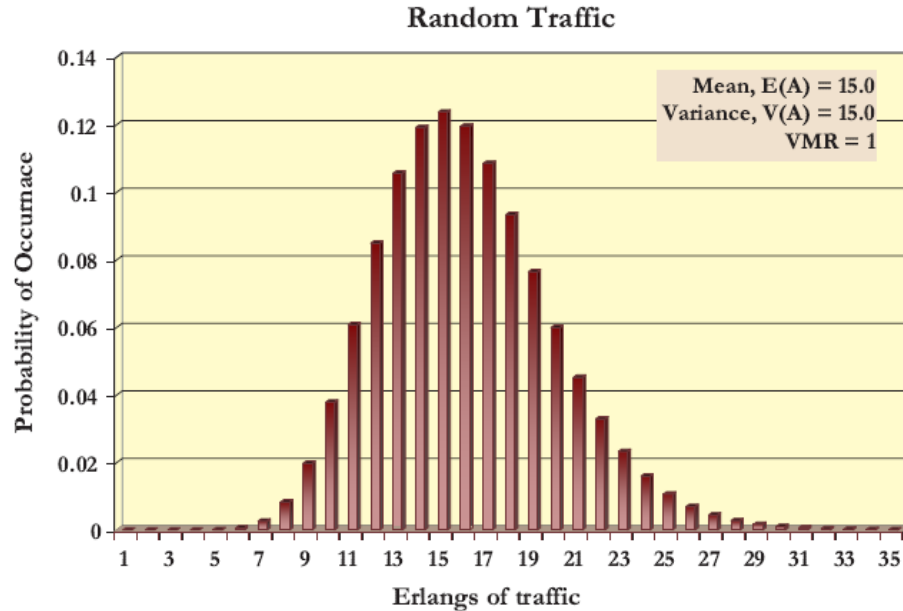
Ο πίνακας, παραπλεύρως, περιέχει παραδείγματα της σχέσης (10) (**άνω τιμή**).

Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις Rapp δίνουν αρκετά καλή προσέγγιση, παρότι είναι απλές αριθμητικές συναρτήσεις. (**Κάτω τιμή = ακριβής τιμή**)

b	z = 1.5		z = 2.0	
	α	s	α	s
1	3.750	4.250	8.000	10.000
	3.665	3.608	7.605	9.408
5	9.750	5.523	16.000	12.667
	9.463	5.184	15.356	11.915
20	32.250	12.823	46.000	27.191
	32.120	12.686	45.642	26.815
50	77.250	27.780	106.000	57.078
	77.187	27.715	105.812	56.887

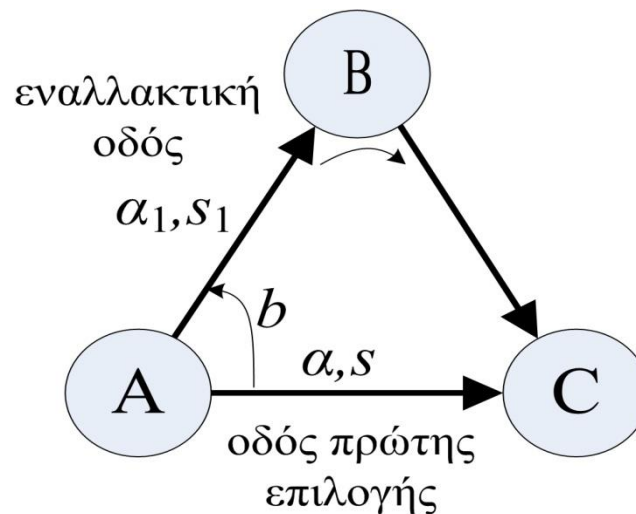


Random – Smooth – Peaked Traffic



Η θεωρία της ισοδύναμης τυχαίας κινήσεως (1)

Ας θεωρήσουμε το σύστημα εναλλακτικής δρομολόγησης του σχήματος. Η κίνηση υπερροής b του φορτίου a , από την οδό υψηλής εκμετάλλευσης (high usage – οδός πρώτης επιλογής) A-C, διοχετεύεται στην εναλλακτική διαδρομή A-B-C, αν όλη η χωρητικότητα της A-C είναι κατειλημμένη. Στην οδό 1^{ης} επιλογής έχουμε αφίξεις Poisson και εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης. Ακολούθως, οι αφίξεις Poisson αναφέρονται ως **τυχαία κίνηση (random traffic)**, σε αντίθεση προς την **μη τυχαία κίνηση (non-random traffic)** που εμπεριέχει την κίνηση υπερροής.



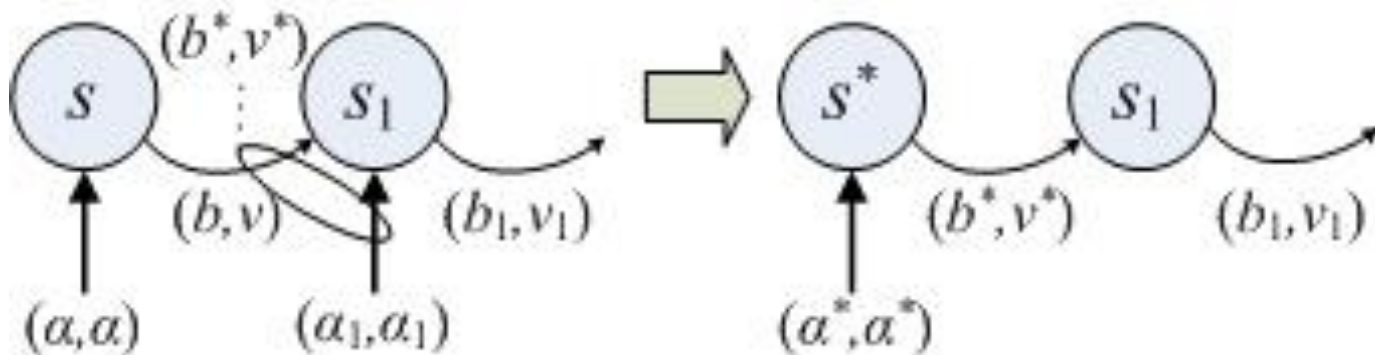
Η θεωρία της ισοδύναμης τυχαίας κινήσεως (2)

Το μοντέλο του συστήματος εναλλακτικής δρομολόγησης είναι αυτό που φαίνεται στο αριστερό μέρος του παρακάτω σχήματος.

Έστω s ο αριθμός των εξυπηρετητών στην οδό υψηλής εκμετάλλευσης. Η μέση τιμή b και η διασπορά v της κίνησης υπερροής που διοχετεύεται στην ζεύξη A-B από την A-C, δίνονται από τις **σχέσεις Wilkinson**:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(s, \alpha) \quad \text{και} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(s, \alpha) \quad (11)$$

δηλαδή $\mathbf{b}(\dots)$ και $\mathbf{v}(\dots)$ ορίζονται από την (9).

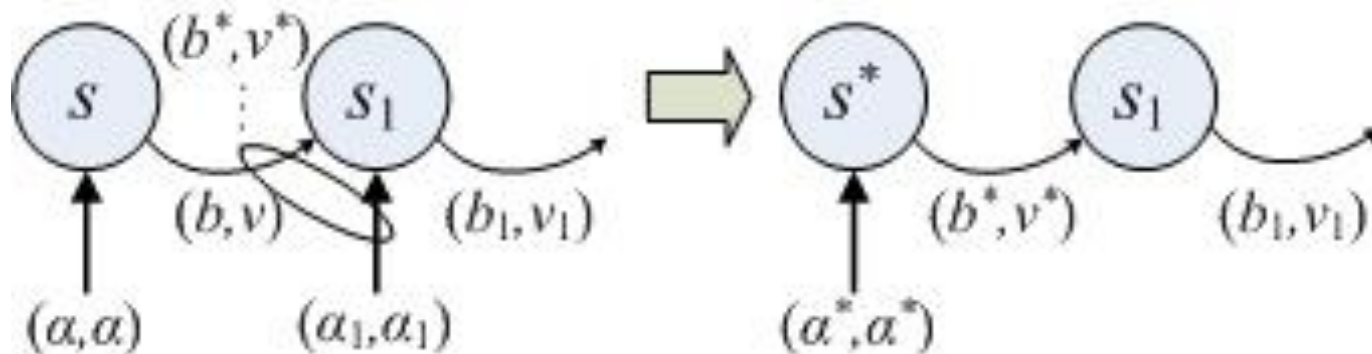


Η θεωρία της ισοδύναμης τυχαίας κινήσεως (3)

Έστω α_1 το προσφερόμενο φορτίο κίνησης στην ζεύξη A-B με τον ίδιο εκθετικό χρόνο εξυπηρέτησης (όπως στην ζεύξη A-C). Στο σχήμα μας φαίνεται ως (α_1, α_1) . Υποθέτοντας ότι οι κινήσεις (b, v) και (α_1, α_1) είναι ανεξάρτητες μεταξύ των, υπολογίζουμε την υπερτιθέμενη κίνηση (b^*, v^*) , ως:

$$b^* = \alpha_1 + b, \quad v^* = \alpha_1 + v \quad (12)$$

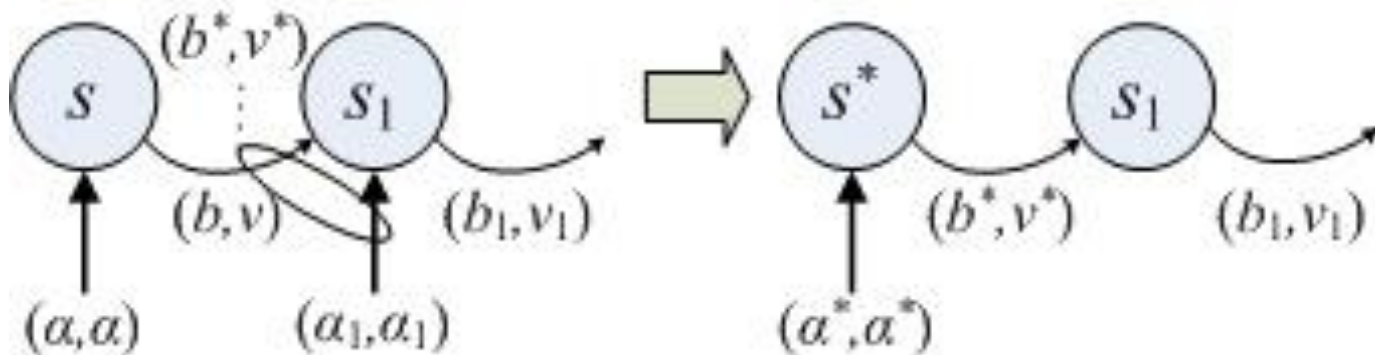
η οποία προφανώς είναι μη τυχαία, καθόσον $b^* \neq v^*$. Η μη τυχαία αυτή κίνηση υποθέτουμε ότι προκύπτει ως η υπερροή μιας φανταστικής τυχαίας κίνησης α^* που προσφέρεται σε φανταστικό αριθμό εξυπηρετητών s^* .



Η θεωρία της ισοδύναμης τυχαίας κινήσεως (4)

Από τις σχέσεις Rapp (10) μπορούμε να καθορίσουμε (προσεγγιστικά) τόσο το **ισοδύναμο φορτίο της τυχαίας κίνησης (equivalent random traffic) α^*** , όσο και τον αριθμό s^* των φανταστικών εξυπηρετητών, που (υποθέτουμε ότι) παράγουν την μη τυχαία κίνηση (b^*, v^*) , ως κίνηση υπερροής. Εξ ου και το όνομα **Equivalent Random Theory (ERT)**.

Αν s_1 είναι ο αριθμός των εξυπηρετητών στην διαδρομή A-B τότε το σύστημα στο αριστερό μέρος του σχήματος προσεγγίζεται μ' αυτό του δεξιού μέρους.



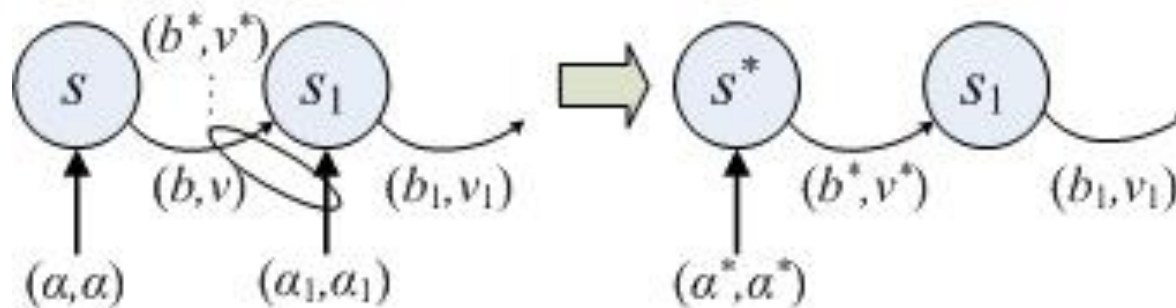
Η θεωρία της ισοδύναμης τυχαίας κινήσεως (5)

Το δεξιό μέρος του σχήματος είναι ένα σύστημα απωλειών με φορτίο τυχαίας κίνησης α^* που προσφέρεται σε (s^*+s_1) εξυπηρετητές (trunks). Επομένως, η μέση τιμή της κίνησης υπερροής b_1 που υπερρέει από τα s_1 trunks δίδεται από την σχέση $b_1 = b(s^*+s_1, \alpha^*) = \alpha^* E_{s^*+s_1}(\alpha^*)$. Ενώ, $b^* = \alpha^* E_{s^*}(\alpha^*)$. Άρα η πιθανότητα απωλείας κλήσεως B για την κίνηση υπερροής δίνεται από την σχέση:

$$B = \frac{b_1}{b^*} = \frac{E_{s_1+s^*}(\alpha^*)}{E_{s^*}(\alpha^*)} \quad (13)$$

όπου $E_s(\alpha)$ είναι ο τύπος απωλειών του Erlang (Erlang B-formula).

Η θεωρία αυτή, όπως είπαμε, ονομάζεται **θεωρία της ισοδύναμης τυχαίας κινήσεως, (equivalent random theory - ERT)**.



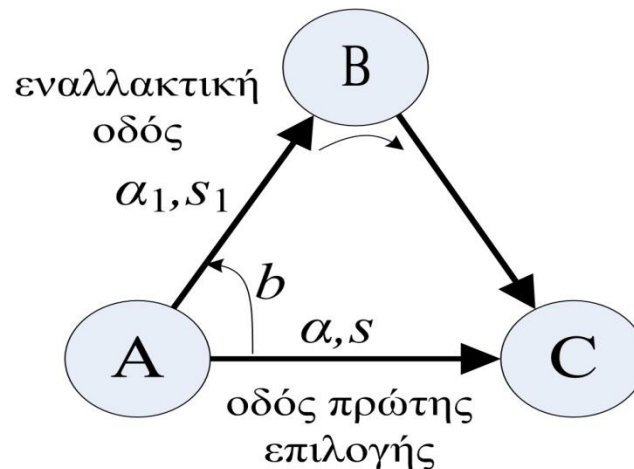
Παραδείγματα (1)

Παράδειγμα 1

Ας υπολογίσουμε την πιθανότητα απωλείας κλήσεως B στην διαδρομή A-B που φαίνεται στο σχήμα, όταν $\alpha = 5$ erl, $\alpha_1 = 10$ erl, $s = 5$ trunks και $s_1 = 20$ trunks.

Από την (11) έχουμε $b = 1.423$ και $v = 2.3332$ και επομένως $b^* = 11.4243$ και $v^* = 12.3332$ (παραλείπουμε την μονάδα erl). Επιλύοντας τις σχέσεις (11) αριθμητικά ως προς α^* και s^* , λαμβάνουμε $\alpha^* = 12.57$, $s^* = 1.24$ και $s^* + s_1 = 21.24$. Από τον B τύπο του Erlang, για **πραγματικό αριθμό εξυπηρετητών**, έχουμε:

$$E_{1.24}(\alpha^*) = 0.9089, \quad E_{21.24}(\alpha^*) = 0.0073 \quad \text{και} \quad B = 0.0081.$$



Παραδείγματα (2)

Παράδειγμα 1 (συνέχεια)

Αν αντί να επιλύσουμε αριθμητικά την (11) χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις Rapp (10) για τον υπολογισμό των α^* και s^* , λαμβάνουμε $\alpha^* = 12.59$ και $s^* = 1.26$ τα οποία δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Σημειωτέον ότι η ακριβής τιμή για το B είναι $B=0.0085$ (προκύπτει από την επίλυση των εξισώσεων μονίμου καταστάσεως του συστήματος).

Αν $\alpha=10$, $s=7$, $\alpha_1=12$, $s_1=25$ η μέθοδος ERT δίνει $B=0.0144$ ενώ η ακριβής τιμή είναι 0.0149 .

Αν $\alpha=15$, $s=10$, $\alpha_1=15$, $s_1=30$, η ERT δίνει $B=0.0219$ ενώ η ακριβής τιμή είναι 0.0222 .

Επομένως η ακρίβεια της μεθόδου ERT είναι ικανοποιητική για πρακτικές εφαρμογές.

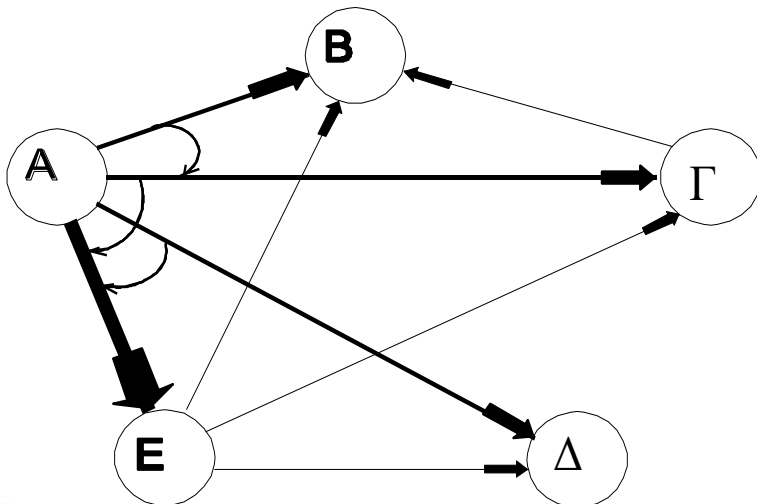


Παραδείγματα (3)

Παράδειγμα 2

Έστω ένα τηλεφωνικό δίκτυο με 5 τηλεφωνικά κέντρα, Α, Β, Γ, Δ και Ε. Το σχήμα απεικονίζει τον τρόπο διεκπεραιώσεως της κίνησης από το κέντρο Α προς τα υπόλοιπα κέντρα. Πρόκειται για ένα σχέδιο εναλλακτικής δρομολόγησης της κίνησης (δίκτυο υπερροής) με τελική οδό, μέσω του Ε.

Ο πίνακας δίνει την τυχαία κίνηση (σε erlang) που εκπηγάζει από το κέντρο Α και προορίζεται για τα υπόλοιπα κέντρα.



Δέσμη	Κίνηση	Χωρητικότητα
ΑΒ	77.0	?
ΑΓ	23.5	?
ΑΔ	52.5	?
ΑΕ	16.4	?

Παραδείγματα (4)

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)

Ζητείται να βρεθεί η χωρητικότητα (σε trunks) των ζεύξεων AB, ΑΓ, ΑΔ και ΑΕ, κατά τον οικονομικότερο τρόπο, αν θέλουμε σε κάθε ζεύξη η πιθανότητα απωλείας κλήσεως να μη υπερβαίνει το 3%. Ο υπολογισμός των trunks των ζεύξεων AB, ΑΓ και ΑΔ να γίνει με βάση την τυχαία κίνηση μόνο.

Λύση

Χρησιμοποιώντας τον τύπο απωλειών του Erlang, για πιθανότητα απωλείας κλήσεως 3% και προσφερόμενο φορτίο κίνησης 77.0 ή 23.5 ή 52.5 erl, υπολογίζουμε την χωρητικότητα των ζεύξεων AB, ΑΓ και ΑΔ, αντιστοίχως, σε 86 (πολύ οριακή τιμή, πρακτικά δεκτή), 31 και 61 trunks.

Ακολουθώς, πρέπει να υπολογίσουμε την χωρητικότητα της ζεύξεως ΑΕ, λαμβάνοντας υπ' όψη ότι η ζεύξη αυτή εξυπηρετεί τις υπερροές των ζεύξεων AB, ΑΓ και ΑΔ, όπως δηλώνεται στο σχέδιο υπερροής του δικτύου.

Παραδείγματα (5)

Από τους τύπους του Wilkinson υπολογίζουμε την υπερροή της κίνησης από την ζεύξη AB:

$$b_{AB}=77.0 E_{86}(77.0) =77.0 * 0.03 = 2.31 \text{ erl και } v_{AB}=11.42 \text{ erl.}$$

Η συνολική κίνηση που προσφέρεται στη ζεύξη AΓ, είναι μη τυχαία κίνηση με:

$$b'_{A\Gamma} = 23.5 + 2.31 = 25.81 \text{ erl και } v'_{A\Gamma} = 23.5 + 11.42 = 34.92 \text{ erl.}$$

Από τις σχέσεις του Rapp, με $z = v'_{A\Gamma} / b'_{A\Gamma} = 1.35$, μπορούμε να θεωρήσουμε την ισοδύναμη τυχαία κίνηση και τον φανταστικό αριθμό trunks που αντιστοιχεί στην μη τυχαία αυτή κίνηση:

$$\alpha^*_{A\Gamma} = 36.33 \text{ erl και } s^*_{A\Gamma} = 10.9 \text{ trunks} \sim 11 \text{ trunks.}$$



Παραδείγματα (6)

Σύμφωνα με την μέθοδο ERT, η ζεύξη ΑΓ αποτελείται από 42 trunks (31 πραγματικά (υπαρκτά) και 11 φανταστικά) και η υπερροή της υπολογίζεται από τους τύπους του Wilkinson για την φανταστική τυχαία κίνηση $\alpha^*_{ΑΓ}$:

$$b_{ΑΓ}=36.33E_{42}(36.33) = 36.33 * 0.05 = 1.81 \text{ erl και } v_{ΑΓ}=6.28 \text{ erl.}$$

Ομοίως, για την ζεύξη ΑΔ έχουμε υπερροή:

$$b_{ΑΔ}=52.5E_{61}(52.5) = 52.5 * 0.03 = 1.57 \text{ erl και } v_{ΑΔ}=6.55 \text{ erl.}$$



Παραδείγματα (7)

Επομένως, η συνολική κίνηση που προσφέρεται στην ζεύξη ΑΕ, βάσει του σχήματος υπερροής είναι το άθροισμα της τυχαίας κινήσεως που εκπηγάζει στον κόμβο Ε και των μη τυχαίων κινήσεων που προέρχονται από τις υπερροές των ζεύξεων ΑΓ και ΑΔ:

$$b'_{AE} = 16.4 + 1.81 + 1.57 = 19.78 \text{ erl}$$

$$v'_{AE} = 16.4 + 6.28 + 6.55 = 29.23 \text{ erl}$$

Από τις σχέσεις του Rapp, με $z = v'_{AE} / b'_{AE} = 1.47$, μπορούμε να υπολογίσουμε την ισοδύναμη τυχαία κίνηση και τον φανταστικό αριθμό trunks που αντιστοιχεί στην μη τυχαία αυτή κίνηση:

$$\alpha^*_{AE} = 31.31 \text{ erl και } s^*_{AE} = 12.07 \text{ trunks} = 12 \text{ trunks.}$$



Παραδείγματα (8)

Αφού θέλουμε οι τελικές απώλειες στην ζεύξη ΑΕ να είναι 3%, από τον Β τύπο του Erlang μπορούμε να βρούμε τον αριθμό των trunks που ικανοποιεί τις απώλειες αυτές για την κίνηση a_{AE}^* :

$$E_s(31.31)=0.03 \rightarrow s=39 \text{ trunks} = s_{AE} + s_{AE}^* .$$

Σύμφωνα με την ERT ο συνολικός αριθμός trunks αποτελείται από το άθροισμα των πραγματικών και φανταστικών trunks.

Αφού $s_{AE}^* = 12 \text{ trunks}$ και $s = 39 \text{ trunks} \rightarrow s_{AE} = 27 \text{ trunks}$, που είναι το ζητούμενο αποτέλεσμα.



Τέλος Ενότητας