Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης

Ενότητα 1, 2, 3, 4: Επιλεγμένες Ασκήσεις

Μιχαήλ Λογοθέτης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Παράδειγμα 1ο

Σε μια τηλεφωνική ζεύξη με 4 trunks μετρούμε τον αριθμό των κλήσεων κάθε λεπτό της ώρας (min) επί 10 ώρες. Οι μετρήσεις είναι:

Αριθμός Κλήσεων	0	1	2	3	4
Αριθμός Συμβάντων	89	164	173	114	60

Επίσης, εμετρήθησαν 34 απωλεσθείσες κλήσεις. Να υπολογισθούν:

(**a**) Η διεκπεραιουμένη κίνηση.

(**b**) Ο βαθμός εξυπηρέτησης της ζεύξης.

(**c**) Το προσφερόμενο φορτίο κίνησης στην ζεύξη.

(**d**) Η μέση τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης των κλήσεων.

Παράδειγμα 1ο - ΛΥΣΗ

(**a**) Εντός 10 ωρών, παίρνοντας μία μέτρηση κάθε ένα min, πήραμε 600 μετρήσεις (πράγματι, 89+164+173+114+60 = 600).

Βάσει της 4ης ιδιότητας του φορτίου κινήσεως, η διεκπεραιουμένη κίνηση α_c ισούται με την μέση τιμή των κατειλημμένων trunks.

Άρα:
α_c=(0*89 + 1*164 + 2*273 + 3*114 + 4*60)/600 = 1092/600 = 1.82 erl

(**b**) Ο βαθμός εξυπηρέτησης, B, της ζεύξης ισούται με την πιθανότητα η ζεύξη να είναι πλήρως κατειλημμένη. Επομένως αυτό θα προκύψει από την σχετική συχνότητα με την οποία οι μετρήσεις δείχνουν ότι η ζεύξη είναι πλήρως κατειλημμένη: B = 60/600 = 0.1 = 10%.

Παράδειγμα 1ο - ΛΥΣΗ (συνέχεια)

(**c**) Το προσφερόμενο φορτίο κίνησης α υπολογίζεται από την σχέση
$\alpha_c = \alpha\,(1\text{-}B) \Rightarrow \alpha = \alpha_c/(1\text{-}B) = 1.82/(1\text{-}0.1) = 1.82/0.9 = 2.02$ erl

(**d**) Η μέση τιμή h του χρόνου εξυπηρέτησης των κλήσεων θα προκύψει από την 1η ιδιότητα του φορτίου κίνησης:

$\alpha_c = c\,h$, όπου c είναι ο αριθμός των κλήσεων που εξυπηρετήθηκαν, εντός t=10 ωρών.

Εντός του χρονικού διαστήματος των 10 ωρών, μετρήσαμε 34 κλήσεις που δεν εξυπηρετήθηκαν και υπολογίσαμε ότι B = 0.1. Άρα, αφού:

B = (κλήσεις που χάθηκαν)/(συνολικές N),

ο συνολικός αριθμός N των προσφερθεισών κλήσεων στην τηλεφωνική ζεύξη θα είναι:

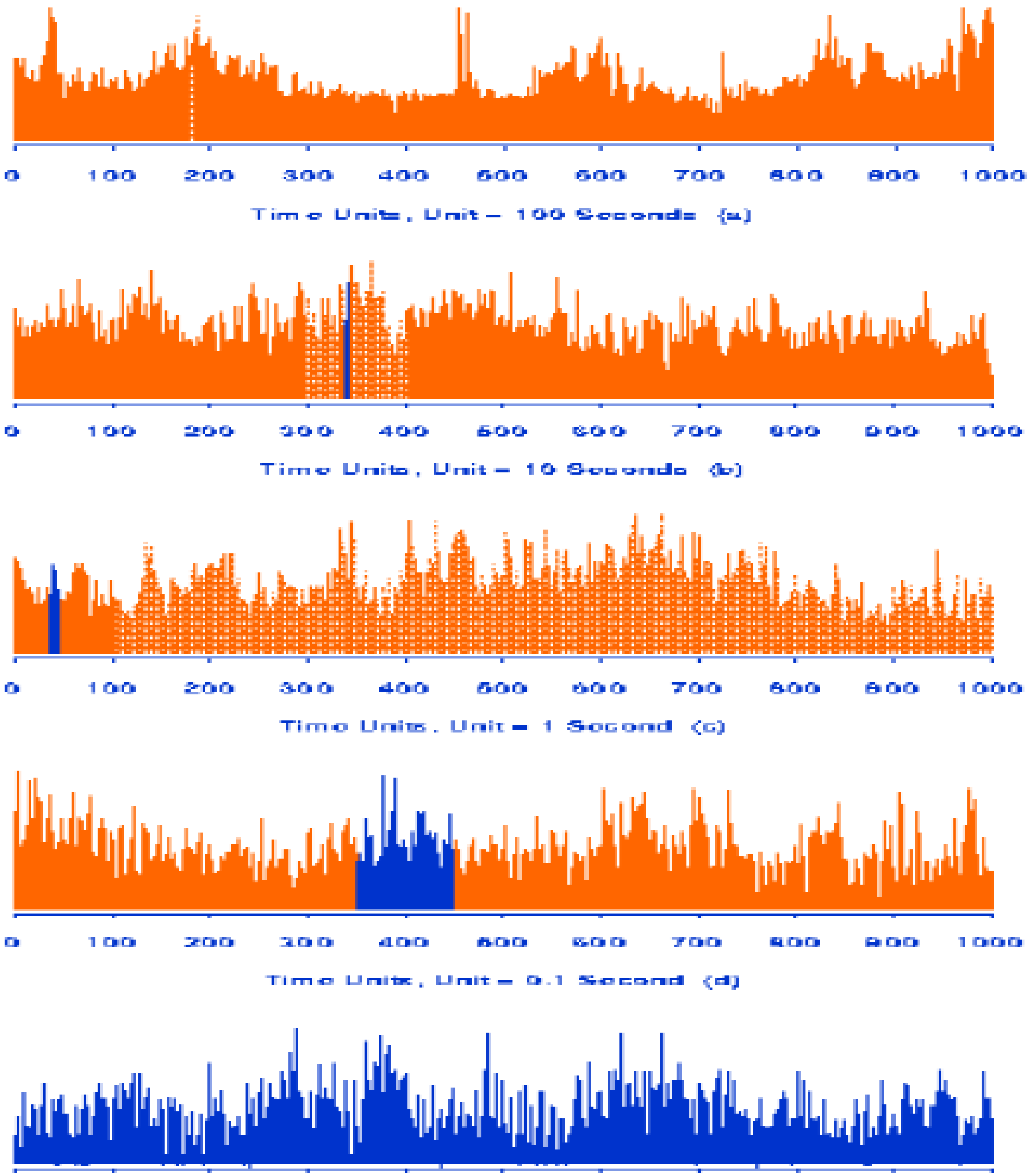
N = (κλήσεις που χάθηκαν)/B =34/0.1 = 340 κλήσεις.

Άρα c = N – 34 = 340 – 34 = 306 κλήσεις.

Επομένως $\alpha_c = (c\,h)/t \Rightarrow 1.82 = (306/10)*h \Rightarrow$

h = 1.82/30.6 ώρες = 0.0595 ώρες = 3.57 min = 3 min + 34 sec.

Self-similar Internet traffic (multi-fractals)



Παράδειγμα 2ο

Έστω μία κυψέλη (*cell*) του δικτύου της κινητής τηλεφωνίας. Στον σταθμό βάσης (της κυψέλης αυτής) καταφθάνουν αιτήσεις σύνδεσης (*call-setup)* που προέρχονται τόσο από <u>νέες κλήσεις</u> που θέλουν να συνδεθούν στο δίκτυο, όσο και από κλήσεις που είναι ήδη συνδεδεμένες στο δίκτυο αλλά ευρίσκονται σε γειτονική κυψέλη και λόγω της μετακίνησής τους θέλουν να περάσουν στην κυψέλη μας. Οι κλήσεις αυτές λέγονται κλήσεις **μεταπομπής (*handover*)**. Προφανώς ο σταθμός βάσης πρέπει να δώσει προτεραιότητα στις κλήσεις μεταπομπής ώστε να εξυπηρετηθούν χωρίς διακοπή. Προς τον σκοπό αυτό ίσως να απορρίψει την αίτηση σύνδεσης κάποιων νέων κλήσεων. Ας υποθέσουμε ότι οι κλήσεις μεταπομπής <u>δεν μπλοκάρονται</u>. Κάθε κλήση που γίνεται αποδεκτή στην κυψέλη μας καταλαμβάνει ένα ελεύθερο κανάλι (δι-κατευθυντήριο).

Μετρήσεις κατά την <u>ώρα αιχμής</u> στην κυψέλη μας έδειξαν ότι η μέση τιμή του χρόνου κατάληψης ενός καναλιού είναι **1.64 min** (άσχετα με το είδος των κλήσεων, αν πρόκειται δηλαδή για νέες κλήσεις ή μεταπομπής).

Επίσης εμετρήθησαν κατά μέσον όρον συνολικά **52 κλήσεις**, και απώλειες <u>2%</u> επί του αριθμού <u>όλων των αιτήσεων σύνδεσης</u>.

Η μέση τιμή του χρόνου μεταξύ των διαδοχικών αφίξεων των νέων κλήσεων (*interarrival time*) είναι **3 sec** (δηλαδή αφίξεις νέων κλήσεων έχουμε κάθε 3 sec κατά μέσον όρον).

(α) *Να υπολογισθεί ο ρυθμός αφίξεως των κλήσεων μεταπομπής.*

(β) *Το ποσοστό των νέων κλήσεων που μπλοκάρονται.*

Παράδειγμα 2ο - ΛΥΣΗ

Ο αριθμός Ν (κατά μέσον όρο) των κλήσεων στο σύστημα: $N = 52$.
Η μέση τιμή της διάρκειας Τ των κλήσεων στο σύστημα (κυψέλη): $T = 1.64$ min.
Η πιθανότητα απωλείας κλήσεως (οποιασδήποτε): $B = 0.02 = 2$ %.
Η μέση τιμή των μεσοδιαστημάτων των αφίξεων των νέων κλήσεων: 3 sec
$\Rightarrow$ ρυθμός άφιξης των νέων κλήσεων $\lambda_v = 20$ κλήσεις/min.
Αν λ_h είναι ο ρυθμός των κλήσεων μεταπομπής (handover), τότε ο συνολικός προσφερόμενος αριθμός κλήσεων στην κυψέλη είναι $\lambda_v + \lambda_h$. Λόγω των απωλειών Β όμως, ο ρυθμός με τον οποίον οι κλήσεις εισέρχονται στο σύστημα είναι:

$$\lambda = (\lambda_v + \lambda_h)(1-B)$$

Από τον νόμο του Little (επέκταση): $N = \lambda T \quad \Rightarrow \quad N = (\lambda_v + \lambda_h)(1-B)\, T$
$\Rightarrow \lambda_h = N/(T(1-B)) - \lambda_v \Rightarrow \lambda_h = 52/(1.64(1-0.02)) - 20 \Rightarrow \lambda_h = 12.3544$ κλήσεις/min.

(**b**) Οι κλήσεις μπλοκάρονται με ρυθμό:

$$\lambda_B = (\lambda_v + \lambda_h)B = (20 + 12.3544)*0.02 = 0.647 \text{ κλήσεις/min}$$

Το ποσοστό των νέων κλήσεων που μπλοκάρονται είναι, B_v:

$$B_v = \lambda_B/\lambda_v \Rightarrow B_v = 0.647 / 20 = 0.03235 = 3.235 \%.$$

Καθόσον: $\lambda_B = \lambda_v B_v + \lambda_h B_h$ Αν $B_h = 0 \Rightarrow \lambda_B = \lambda_v B_v \Rightarrow B_v = \lambda_B / \lambda_v$

Παράδειγμα 3ο

- Μια επιχείρηση προσφέρει υπηρεσίες στους πελάτες της οι οποίες μπορούν να μοντελοποιηθούν ως ένα σύστημα απωλειών Erlang με s εξυπηρετητές (servers). Έστω ότι ο ρυθμός άφιξης των πελατών είναι κατά μέσον όρο σταθερός και ίσος προς 4 πελάτες την ώρα, ενώ η μέση τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης ενός πελάτη είναι 1 ώρα. Η επιχείρηση θα μπορούσε να έχει s = 1, 2, 3, …, 10 servers.

- Για κάθε πελάτη που εξυπηρετεί, η επιχείρηση κερδίζει G = 2.5 euro. Το ωριαίο λειτουργικό κόστος της επιχείρησης είναι $K_{\text{λειτουργίας}}$= 1 euro ανά εξυπηρετητή (την ώρα), ανεξάρτητα από το αν ο εξυπηρετητής είναι κατειλημμένος ή όχι. Να υπολογιστεί:

α) Ο βέλτιστος αριθμός εξυπηρετητών (servers) καθώς και το αντίστοιχο ωριαίο κέρδος.

β) Η τιμή του s πέρα από την οποία είναι τελείως ασύμφορη η λειτουργία της επιχείρησης.

γ) Τι θα συμβεί αν διπλασιαστεί η ωριαία τιμή του λειτουργικού κόστους ανά εξυπηρετητή.

Παράδειγμα 3ο - ΛΥΣΗ

Ανά ώρα, θα πρέπει να ισχύει:

Κέρδος = (Μέση τιμή κατειλημμένων servers)*G - $K_{λειτουργίας}$*s

Όπου με βάση την 4η ιδιότητα του φορτίου κίνησης ισχύει:

(Μέση τιμή κατειλημμένων servers) = (διεκπεραιουμένη κίνηση) = (α(1-$E_s(\alpha)$))

Το προσφερόμενο φορτίο κίνησης στην επιχείρηση είναι $\alpha = \lambda\ h = 4$ erl.

$E_s(\alpha)$ = η πιθανότητα απώλειας πελάτη, βάσει της Erlang B formula.

https://www.erlang.com/calculator/erlb/

Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει τις τιμές της πιθανότητας απώλειας πελάτη και του Κέρδους = $(\alpha(1 - E_s(a)) * G - K_{λειτουργίας} * s$ για τις διάφορες τιμές του s.

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E_s(4.0)$	0.800	0.615	0.451	0.311	0.199	0.117	0.063	0.030	0.013	0.005
Κέρδος	1.00	1.85	2.49	2.89	3.01	2.83	2.37	1.70	0.87	-0.05

α) Επομένως, η βέλτιστη τιμή του κέρδους είναι 3.01 euro ανά ώρα και επιτυγχάνεται με **5 εξυπηρετητές**.

β) Η λειτουργία της επιχείρησης είναι τελείως ασύμφορη όταν ο αριθμός των εξυπηρετητών υπερβεί την τιμή **9**.

γ) Με βάση την δεύτερη στήλη του πίνακα, προκύπτει ότι για $\boldsymbol{s = 1}$ η ποσότητα $a(1\text{-}E_s(a))$* 2.5 = 2.

Επομένως όταν $K_{λειτουργίας}$= 2 και s = 1 τότε η επιχείρηση λειτουργεί με **μηδενικό κέρδος**. Άρα **για $s \geq 1$ η επιχείρηση πρέπει να πάψει να λειτουργεί.**

Παράδειγμα 4ο

- Ένας συγκεντρωτής τηλεφωνικών γραμμών εξυπηρετεί 20 οικίες, που προσφέρουν κίνηση 4.4 erl (συνολικώς προσφερόμενο φορτίο κίνησης).

(**a**) Αν ο επιθυμητός βαθμός εξυπηρέτησης της ζεύξης είναι 1%, πόσες γραμμές εξόδου πρέπει να έχει ο συγκεντρωτής;

- *Υπόδειξη:* https://www.erlang.com/calculator/engset/

(**b**) Αν το φορτίο κίνησης μειωθεί σε 0.8 erl πόσες εξόδους πρέπει να έχει ο συγκεντρωτής;

(**c**) Αν χρησιμοποιηθεί το μοντέλο M/M/s (Erlang B-formula) για τον συγκεντρωτή, πόσες εξόδους πρέπει να έχει ο συγκεντρωτής σε κάθε περίπτωση φορτίου (4.4 και 0.8 erl); Δικαιολογήστε τις διαφορές.

- *Υπόδειξη:* https://www.erlang.com/calculator/erlb/

Παράδειγμα 4ο - ΛΥΣΗ

(a) Ο συγκεντρωτής γραμμών έχει περιορισμένες εισόδους (n=20), δηλ. πρόκειται για σύστημα M(n)/M/s.

Πρέπει να υπολογίσουμε την χωρητικότητά του, s, με δεδομένα τον GoS ≤ 1% και το συνολικό προσφερόμενο φορτίο κίνησης α = 4.4 erl.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το πρόγραμμα https://www.erlang.com/calculator/engset/ για δεδομένα εισόδου:

- **traffic =4.4 erl**, **number of traffic sources n=20** και **Grade-of-Service (blocking) = 0.01**. Θα μας δώσει **9 γραμμές εξόδου (lines)**
- Επακριβώς, blocking 0.00921 = 0.921% < 1%.

(b) Αν το φορτίο κίνησης μειωθεί σε 0.8 erl, τότε μέσω Engset (https://www.erlang.com/calculator/engset/) για δεδομένα εισόδου:

- **traffic =0.80 erl**, **number of traffic sources n=20** και **Grade-of-Service (blocking) = 0.01**. Θα μας δώσει **4 γραμμές εξόδου (lines).**

Παράδειγμα 4ο – ΛΥΣΗ (συνέχεια)

(**c**) Αν αντί του μοντέλου M(n)/M/s χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο M/M/s, και επομένως αντί του τύπου του Engset για τον υπολογισμό της πιθανότητας απωλείας κλήσεως χρησιμοποιήσουμε την B-Formula του Erlang, για $E_s(4.4) \leq 1\%$, από τους πίνακες του Erlang (ή από https://www.erlang.com/calculator/erlb/) θα βρούμε **10 γραμμές εξόδου**.

- Για προσφερόμενο φορτίο κίνησης α=0.8 erl, από την B-Formula του Erlang, για $E_s(0.8) \leq 1\%$, βρίσκουμε s = **4 γραμμές εξόδου**, όπως και μέσω του M(n)/M/s.

Δικαιολόγηση:

- Επειδή το συνολικό φορτίο των 0.8 erl είναι πολύ μικρό, μπορεί να θεωρήσει κανείς ότι οι 20 γραμμές εισόδου είναι πάρα πολλές (ή πρακτικά άπειρες), δηλαδή οι κλήσεις προέρχονται από άπειρο πληθυσμό και επομένως είναι τυχαίες (όχι ψευδο-τυχαίες). Άρα ο υπολογισμός της χωρητικότητας του συστήματος (γραμμές εξόδου του συγκεντρωτή) βάσει του τύπου απωλειών του Engset, θα δώσει τα ίδια αποτελέσματα με τον B τύπο του Erlang.

- Όσο δηλαδή το προσφερόμενο φορτίο κίνησης μικραίνει, τόσο τα αποτελέσματα των δύο μοντέλων θα τείνουν να συμπέσουν, ενώ αντιθέτως όσο το προσφερόμενο φορτίο κίνησης μεγαλώνει τόσο τα αποτελέσματα των δύο μοντέλων θα αποκλίνουν.

Παράδειγμα 5ο

- Θέλουμε να συνδέσουμε με μια ομάδα γραμμών (trunks) δύο PBX (π.χ. δύο ξενοδοχειακές μονάδες) με **GOS = 1%,** δηλ. πιθανότητα απωλείας κλήσεως $B \leq 0.01$. Γενικά ένα τηλέφωνο χρησιμοποιείται είτε για να ξεκινήσει μια κλήση είτε για να απαντήσει σε κλήση. Ο ρυθμός κλήσεων (calling rate) καθορίζεται από το φορτίο κίνησης ανά τηλέφωνο, όταν αυτό χρησιμοποιείται για να **αρχίζει** κλήσεις. Έστω ότι ένα τηλέφωνο χρησιμοποιείται μια φορά σε διάστημα μιας ώρας και για **3 min** κατά μέσον όρο. Οπότε το φορτίο κίνησης ανά τηλέφωνο είναι **0.05 erl (=3/60)**, από το οποίο το **50%** υποθέτουμε ότι είναι κατά μέσο όρο εξερχόμενες κλήσεις και το υπόλοιπο **50%** εισερχόμενες κλήσεις. Έτσι ο ρυθμός γέννησης κλήσεων γίνεται **0.025 erl ανά τηλέφωνο**. Το κάθε PBX υποστηρίζει **500** τηλέφωνα.

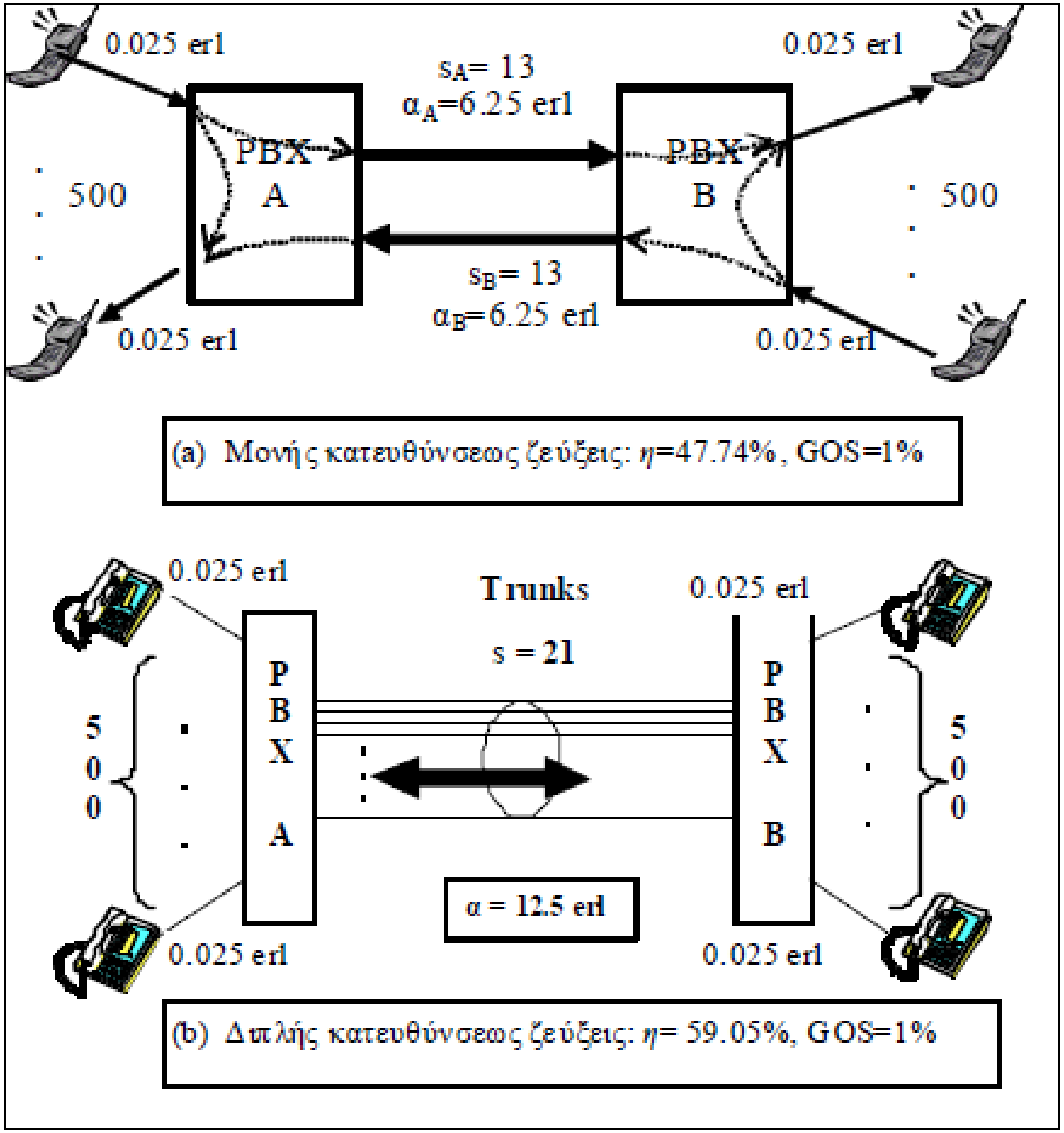
(a) Αν το φορτίο κίνησης μοιράζεται ομοιόμορφα στις δύο κατευθύνσεις μεταξύ των δύο PBX (A και B), να σχεδιαστεί η ζεύξη ξεχωρίζοντας τα trunks ανά κατεύθυνση.

(b) Να υπολογισθεί ο αριθμός των απαιτουμένων trunks έχοντας μία δικατευθυντήρια ζεύξη.

(c) Ποια η απόδοση των trunks στις περιπτώσεις (a) και (b).

(d) Αν το φορτίο κίνησης αυξηθεί κατά 50% ποιο είναι το blocking στην ζεύξη που σχεδιάσατε, στις περιπτώσεις (a) και (b).

Παράδειγμα 5ο - ΣΧΗΜΑ



Παράδειγμα 5ο - ΛΥΣΗ

(a) Ζεύξη μονής κατεύθυνσης.

Κίνηση A → B: α_A= 0.025 x 500 x 0.5 = 6.25 erl. Ομοίως, Κίνηση B → A: α_B= 6.25 erl.

Επειδή ο αριθμός των πηγών (τηλέφωνα) είναι αρκετά μεγάλος και τα τηλέφωνα χρησιμοποιούνται τυχαία, μπορούμε να εφαρμόσουμε το μοντέλο M/M/s(0) (Erlang) π.χ. https://www.erlang.com/calculator/erlb/

$E_s(6.25) \leq 0.01 \Rightarrow$ **s = 13 trunks** ανά κατεύθυνση, και blocking $E_{13}(6.25)$= 0.00692 < 1%

(b) Ζεύξη αμφίδρομη.

Το συνολικό φορτίο κίνησης είναι $\alpha = \alpha_A + \alpha_B$ = 6.25 + 6.25 erl = 12.50 erl.

$E_s(12.5) \leq 0.01 \Rightarrow$ **s = 21 trunks** (ενιαία ζεύξη), και blocking $E_{21}(6.25)$= 0.00798 < 1%.

(c) Απόδοση trunks - Ζεύξη μονής κατεύθυνσης: $\eta=\alpha_c/s$=6.25(1-0.00692)/13=**47.74%**.

Ζεύξη αμφίδρομη: $\eta=\alpha_c/s$=12.50(1-0.00798)/21=**59.05%** > 47.74% (Large scale effect)

(d) Αύξηση φορτίου 50%. $\alpha_A=\alpha_B$= 6.25 x 1.5 = 9.375 erl, **E_{13}(9.375)= 6.49%** (από 0.692%)

Ζεύξη αμφίδρομη: α = 12.50 x 1.5 = 18.75 erl, **E_{21}(18.75)= 10.224%** (από 0.798%)

Παράδειγμα 6ο

- **Α.** Τρεις πάροχοι ανταγωνιστικών συστημάτων κινητών επικοινωνιών καλύπτουν μία αστική περιοχή ως ακολούθως: Ο πρώτος πάροχος χρησιμοποιεί **400 cells** (κυψέλες) με **24 κανάλια** (δικατευθυντήριοι ραδιοδίαυλοι) σε κάθε cell. Ο δεύτερος πάροχος χρησιμοποιεί **100 cells** με **64 κανάλια** σε κάθε cell. Ο τρίτος πάροχος χρησιμοποιεί **60 cells** με **96 κανάλια** σε κάθε cell.

  Όσον αφορά στην συμπεριφορά των χρηστών για τηλεπικοινωνιακή εξυπηρέτηση, έγιναν οι κατωτέρω μετρήσεις την ώρα μεγίστης αιχμής, στην αστική περιοχή:

  Το **50%** των χρηστών κάνει: **1,5 κλήσεις** κατά μέσον όρον.
  Το **40%** των χρηστών κάνει: **4 κλήσεις** κατά μέσον όρον.
  Το **7,5%** των χρηστών κάνει: **6 κλήσεις** κατά μέσον όρον.
  Το **2,5%** των χρηστών κάνει: **8 κλήσεις** κατά μέσον όρον.

  Επίσης όσον αφορά στην διάρκεια των κλήσεων μετρήθηκαν ότι:

  Το **40%** των χρηστών κάνει κλήσεις διάρκειας: **0 – 60 sec**.
  Το **30%** των χρηστών κάνει κλήσεις διάρκειας: **60 – 120 sec**.
  Το **20%** των χρηστών κάνει κλήσεις διάρκειας: **120 – 240 sec**.
  Το **10%** των χρηστών κάνει κλήσεις διάρκειας: **240 – 660 sec**.

Παράδειγμα 6ο

Η συμπεριφορά των χρηστών (συνδρομητών) είναι κοινή.

- Με βάση τις μετρήσεις που έγιναν στην διάρκεια της ώρας αιχμής, δείξατε ότι κατά μέσον όρο, ένας χρήστης πραγματοποιεί 3 κλήσεις την ώρα, με μέση διάρκεια 120 sec.

  Σημειωτέον, θεωρούμε ότι ένας χρήστης κάνοντας μία κλήση στο δίκτυο ενός παρόχου ζητεί 1 κανάλι για να εξυπηρετηθεί.

- Βρείτε πόσους χρήστες μπορεί να εξυπηρετήσει ο κάθε πάροχος στην περιοχή αυτή, με ποιότητα (βαθμό) εξυπηρέτησης κοινή μεταξύ των χρηστών: 1% (δηλ. 1 απώλεια κλήσης στις 100 κλήσεις).

- **Β.** Όπως θα υπολογίσετε, ο πρώτος πάροχος έχει τους περισσότερους χρήστες, ενώ ο τρίτος τους λιγότερους. Για να έχουν και οι τρεις πάροχοι περίπου τον ίδιο αριθμό χρηστών, πόσες κυψέλες θα πρέπει να έχουν ο δεύτερος και ο τρίτος πάροχος;

Παράδειγμα 6ο

- Γ. Αν αντί να αυξήσουν τον αριθμό των κυψελών στην περιοχή κάλυψης ο Δεύτερος και ο Τρίτος Πάροχος, για να αυξήσουν τον αριθμό των χρηστών θα μπορούσαν να μειώσουν την ποιότητα εξυπηρέτησης. Με τι ποιότητα/βαθμό εξυπηρέτησης πρέπει να εξυπηρετούν τους χρήστες για να έχουν τον ίδιο αριθμό χρηστών όπως ο Πρώτος Πάροχος;

- Δ. Αν ο τρίτος πάροχος αυξήσει τον αριθμό των καναλιών ανά κυψέλη σε 124 (από 96), πόσους χρήστες θα μπορέσει να εξυπηρετήσει με ίδιο βαθμό εξυπηρέτησης με τον Πρώτο Πάροχο;

- Στο Διαδίκτυο, μπορείτε να βρείτε πολλά «εργαλεία» υπολογισμού του Β-τύπου του Erlang (π.χ. http://www.site2241.net/erlang.htm).

Παράδειγμα 6ο - ΛΥΣΗ

- Η μεθοδολογία επίλυσης του θέματος αυτού έχει ως ακολούθως: Θεωρούμε μία κυψέλη, στην οποία γνωρίζουμε την χωρητικότητά της σε κανάλια. Για την εύρεση του αριθμού των χρηστών θα χρησιμοποιήσουμε τον **Β-τύπο απωλειών του Erlang**. Ο τύπος αυτός συνδέει τρεις παραμέτρους: το φορτίο κίνησης (μετρείται σε μονάδες erlang), την χωρητικότητα του συστήματος και τον βαθμό εξυπηρέτησης. Δύο παράμετροι πρέπει να δίδονται ως είσοδοι, οπότε η τρίτη παράμετρος υπολογίζεται ως αποτέλεσμα.

  Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν τον τύπο αυτόν για την εύρεση του (συνολικού) φορτίου κίνησης που μπορεί να δεχθεί μια κυψέλη από τους χρήστες, με είσοδο την χωρητικότητα (αριθμός καναλιών) και τον βαθμό εξυπηρέτησης (0.01 = 1%). Έχοντας υπολογίσει το (συνολικό) φορτίο κίνησης της κυψέλης, θα βρούμε τον αριθμό των χρηστών της κυψέλης, επιμερίζοντας το συνολικό φορτίο με το φορτίο κίνησης ενός χρήστη (το οποίο υπολογίζεται από την συμπεριφορά του χρήστη). Ακολούθως με βάση το σύνολο των κυψελών κάθε παρόχου υπολογίζεται ο συνολικός αριθμός χρηστών – συνδρομητών.

Παράδειγμα 6ο - ΛΥΣΗ

- Σημειωτέον ότι ο B-τύπος απωλειών του Erlang, δέχεται ως είσοδο το φορτίο κίνησης και την χωρητικότητα του συστήματος (π.χ. μιας κυψέλης), και δίδει ως αποτέλεσμα τον βαθμό εξυπηρέτησης (πιθανότητα απωλείας κλήσεως). Επομένως το λογισμικό θα υλοποιεί στον Η/Υ τον B-τύπο, ώστε να μπορούμε να βρίσκουμε το φορτίο κίνησης όταν γνωρίζομε την χωρητικότητα του συστήματος (αριθμός καναλιών) και τον βαθμό εξυπηρέτησης.
- Το φορτίο κίνησης που προσφέρει ένας χρήστης κατά μέσον όρον είναι:

  Προσφερομένη κίνηση από έναν χρήστη (κατά μέσον όρον) = c h

  Με βάση τις μετρήσεις που έγιναν στην διάρκεια της ώρας αιχμής, έχομε:

- c = 1,5x0,5+4x0,4+6x0,075+8x0,025 = 0,75+1,6+0,45+0,2 = 3 κλήσεις/ώρα
- h = 30x0,4 + 90x0,3 + 180x0,2 + 450x0,1 = 12 + 27 + 36 + 45 = 120 s = 2 min
- Οπότε: α_1 = 3x2/60 = 6/60 = 0.1 erl ανά χρήστη.

Παράδειγμα 6ο - ΛΥΣΗ

Α. ΣΕ ΚΑΘΕ ΚΥΨΕΛΗ

- Πρώτος Πάροχος: C=24 κανάλια, B=1% $\Rightarrow$ α= 15.3 erl $\Rightarrow$

  $N_A=\alpha/\alpha_1=$ **153 χρήστες**

- Δεύτερος Πάροχος: C=64 κανάλια, B=1% $\Rightarrow$ α= 50.6 erl $\Rightarrow$
  $N_B=\alpha/\alpha_1=$ **506 χρήστες**

- Τρίτος Πάροχος: C=96 κανάλια, B=1% $\Rightarrow$ α= 80.3 erl $\Rightarrow$

  $N_\Gamma=\alpha/\alpha_1=$ **803 χρήστες**

- Συνολικοί χρήστες Πρώτου Παρόχου = 153 x 400 = **61200 χρήστες**
- Συνολικοί χρήστες Δευτέρου Παρόχου = 506 x 100 = **50600 χρήστες**
- Συνολικοί χρήστες Τρίτου Παρόχου = 803 x 60 = **48180 χρήστες**

Παράδειγμα 6ο - ΛΥΣΗ

Β.

- Ο συνολικός αριθμός χρηστών του Δευτέρου Παρόχου για να ανέλθει σε 61200 χρήστες, ο Δεύτερος Πάροχος χρειάζεται **61200 / 506 = 121** κυψέλες συνολικά.
- Ο συνολικός αριθμός χρηστών του Τρίτου Παρόχου για να ανέλθει σε 61200 χρήστες, ο Τρίτος Πάροχος χρειάζεται **61200 / 803 = 76** κυψέλες συνολικά.

Γ.

- Ο Δεύτερος Πάροχος πρέπει να εξυπηρετεί 61200 /100 = 612 χρήστες ανά κυψέλη δηλ. το φορτίο ανά κυψέλη θα είναι 612 * 0.1 = 61.2 erl $\Rightarrow$
- Δεύτερος Πάροχος: C = 64 κανάλια, α = 61.2 erl $\Rightarrow$ **B ≈ 7%**
- Ο Τρίτος Πάροχος πρέπει να εξυπηρετεί 61200 /60 = 1020 χρήστες ανά κυψέλη δηλ. το φορτίο ανά κυψέλη θα είναι 1020 * 0.1 = 102 erl $\Rightarrow$
- Τρίτος Πάροχος: C = 96 κανάλια, α = 102 erl $\Rightarrow$ **B ≈ 11.44%**

Παράδειγμα 6ο - ΛΥΣΗ

Δ.

- Τρίτος Πάροχος: C=124 κανάλια, B=1% $\Rightarrow$ α=106.78 erl $\Rightarrow$

  $N_Γ=α/α_1=1067$ χρήστες

- Συνολικοί χρήστες Τρίτου Παρόχου = 1067 x 60 = **64020 χρήστες**

Παράδειγμα 7ο

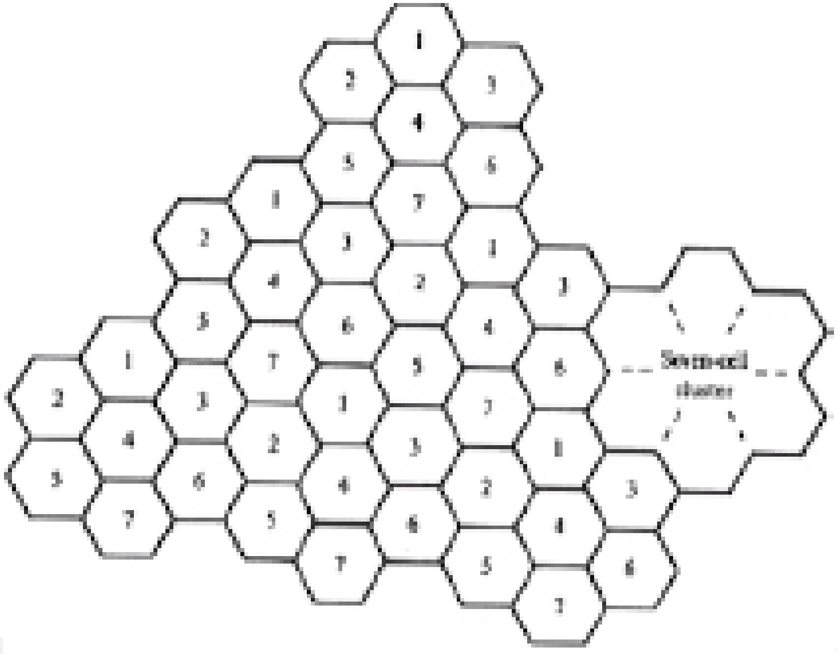
- Αστική περιοχή εξυπηρετείται από ασύρματο κυψελωτό δίκτυο τεχνολογίας GSM <u>συνολικού</u> εύρους ζώνης συχνοτήτων **50 MHz**, χρησιμοποιώντας **συστάδες των 7 κυψελών**, όπως απεικονίζεται στο σχήμα, κατωτέρω. Το δίκτυο επιμερίζει το εύρος ζώνης των 50 MHz σε ραδιοδίαυλους εύρους ζώνης **400kHz** (συνολικά και για τις δύο κατευθύνσεις επικοινωνίας). Κάθε ραδιοδίαυλος υποστηρίζει **8 κανάλια χρηστών** (μέσω συστήματος TDMA - πολυπλεξίας με επιμερισμό χρόνου). Θεωρήστε το δίκτυο ως σύστημα απωλειών Erlang, με βαθμό εξυπηρέτησης, **GoS=1%**. Αν η συμπεροφορά των χρηστών είναι αυτή που καταγράφεται στην επομένη σελίδα, υπολογίστε:

(α) Τον αριθμό των ραδιοδιαύλων ανά κυψέλη και σε ολόκληρο το δίκτυο, καθώς και την συνολική χωρητικότητα σε κανάλια χρηστών ανά κυψέλη και σε ολόκληρο το δίκτυο.

(β) Το προσφερόμενο φορτίο κίνησης σε κάθε κυψέλη και ο αντίστοιχος αριθμός χρηστών.

(γ) Τον συνολικό αριθμό των χρηστών που μπορεί να εξυπηρετήσει το δίκτυο.

(δ) Τον αριθμό των χρηστών που μία κυψέλη μπορεί να εξυπηρετήσει **ταυτόχρονα**.



Παράδειγμα 7ο - Σύστημα GSM

<u>Συμπεριφορά χρηστών</u>

Το 60% κάνει: 1 call/h για 1 min

Το 30% κάνει: 1 call/h για 5 min

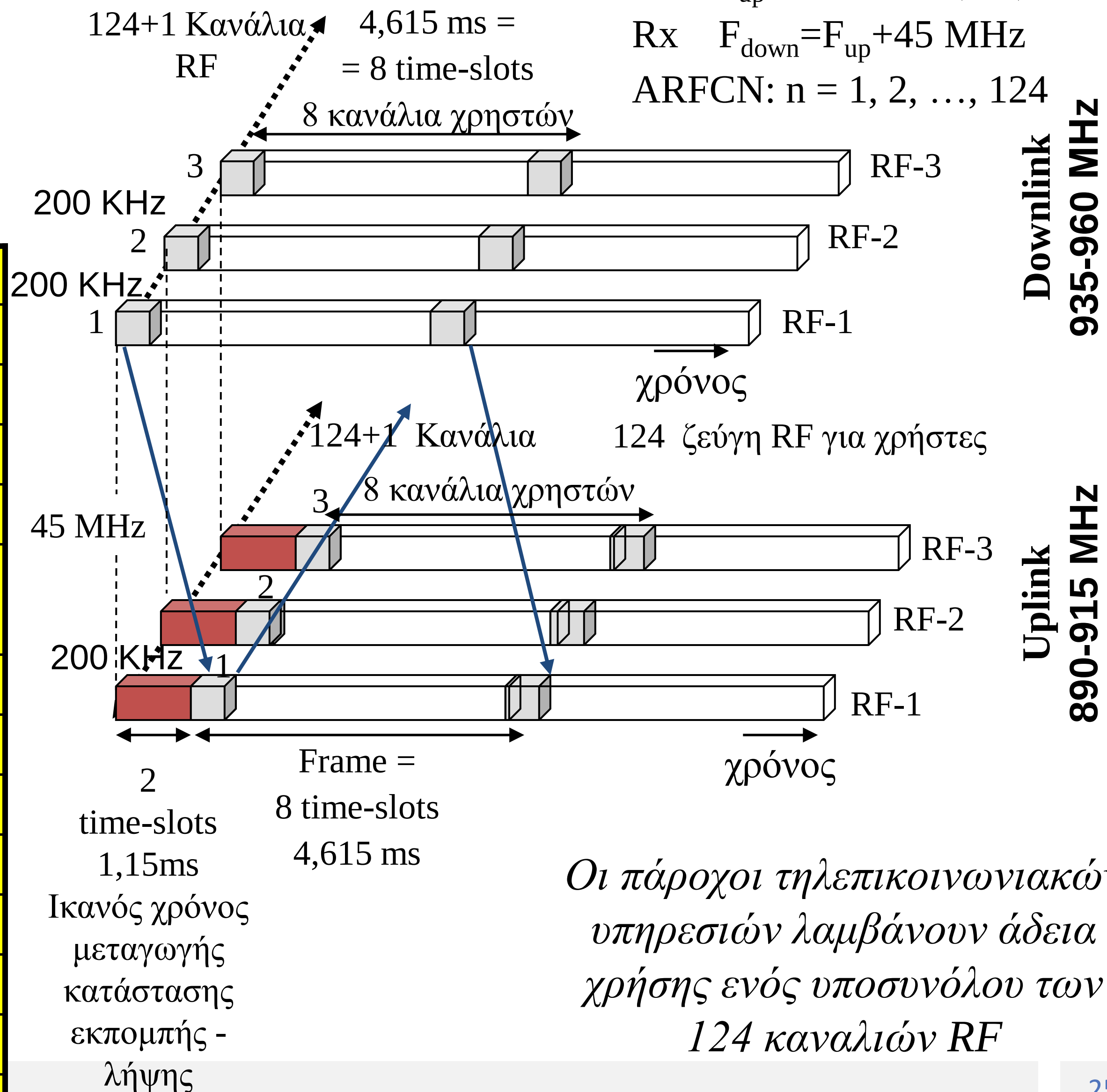
Το 10% κάνει: 3 call/h για 0.5 min

Medium Access	TDMA
Duplexing	FDD
Channel Spacing	200 KHz
Number of Radio Channels	124
Users per Frequency Pair	8
Mobile Tx Base Tx	(880) 890-915 (925) 935-960
Transmission Rate	270,833 Kbps
Rx/Tx Spacing frequency	45 MHz
Rx/Tx Spacing time	1,15 ms
Slots per Frame	8
Frame Period	4,615 ms
Time Slot Period	576,9 μs
Bit Period	3,692 μs
Bits per Slot	148

Tx F_{up}=890,2+0,2(n-1) MHz

Rx F_{down}=F_{up}+45 MHz

ARFCN: n = 1, 2, …, 124



Οι πάροχοι τηλεπικοινωνιακών υπηρεσιών λαμβάνουν άδεια χρήσης ενός υποσυνόλου των 124 καναλιών RF

Παράδειγμα 7ο - ΛΥΣΗ

(α) Ο αριθμός των ραδιοδιαύλων (RF) είναι: Rc = 50000kHz / 400kHz = 125 =124 +1 control
Οπότε, για χρήστες, ανά κυψέλη: 124 / 7 =[17.7]= **17** (ραδιοδιαύλους–ζώνες συχνοτήτων).

- Όλο το δίκτυο, όπως προκύπτει από το σχήμα, έχει 49 κυψέλες, άρα 49x17=**833 διαύλους** (γίνεται επαναχρησιμοποίηση συχνοτήτων – frequency reuse).
- Ο συνολικός αριθμός καναλιών χρήστη ανά κυψέλη είναι Cc=17*8=**136 κανάλια/κυψέλη** και σε ολόκληρο το δίκτυο 136*49 = **6664 κανάλια**.

(β) Για $E_{136}(\alpha) \leq 1\%$, από την B-Formula του Erlang (https://www.erlang.com/calculator/erlb/) υπολογίζουμε το προσφερόμενο φορτίο κίνησης α = **118.15 erl ανά κυψέλη**.

- Κάθε χρήστης κατά μέσον όρον προσφέρει φορτίο κίνησης 0.6x1/60x1+0.3x1/60x5+0.10x3/50x0.5 = 0.01 + 0.025 + 0.003 = 0.038 erl
- Επομένως η κίνηση των 118.15 erl αντιστοιχεί σε 118.15/0.038 ≈ **3109 χρήστες/κυψέλη**

(γ) Ο συνολικός αριθμός χρηστών στο δίκτυο (που μπορεί να εξυπηρετηθεί με GoS=1%) θα είναι 49*3109 = **152341 χρήστες**

(δ) Ο συνολικός αριθμός χρηστών που μπορεί μία κυψέλη να εξυπηρετήσει ταυτόχρονα ισούται με την χωρητικότητα της κυψέλης σε κανάλια χρηστών, δηλ. **136 χρήστες**.

Παράδειγμα 8ο

Σε σύστημα αναμονής M/M/1 με άπειρες θέσεις στην ουρά αναμονής, ο ρυθμός άφιξης είναι λ = 20 κλήσεις/ώρα και ο ρυθμός εξυπηρέτησης μ = 27 κλήσεις/ώρα.

(Π.χ. *Άφιξη αεροπλάνων σε διάδρομο απογειώσεως.*)

Υπολογίστε:

(a) Τον συνολικό χρόνο Τ παραμονής των κλήσεων στο σύστημα κατά μέσον όρο.

(b) Την πιθανότητα αναμονής (στην ουρά αναμονής).

(c) Τον συνολικό αριθμό Ν των κλήσεων στο σύστημα κατά μέσον όρο.

(d) Τον μέσο χρόνο W παραμονής των κλήσεων στην ουρά αναμονής.

(e) Το μέσο μήκος L της ουράς αναμονής.

Παράδειγμα 8ο - ΛΥΣΗ

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι (α< s): $\alpha = \lambda/\mu$ = 20/27 = 0.74 erl < 1 erl (δηλ. ευστάθεια)

(a) Ο συνολικός χρόνος παραμονής των κλήσεων στο σύστημα προκύπτει από την "διαφορά του ρυθμού άφιξης από τον ρυθμό εξυπηρέτησης", ως εξής:

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda} \Rightarrow T = \frac{1}{27-20} = \frac{1}{7} hour = 8.6 \min$$

(b) Πιθανότητα αναμονής = Πιθανότητα ο server να είναι "busy" = Φορτίο κίνησης που διεκπεραιώνει ο server (3η ιδιότητα)= Προσφερόμενο φορτίο: M(0) = α

(c) $$N = \lambda T = \lambda/(\mu - \lambda) = 20/7 = 2.9$$

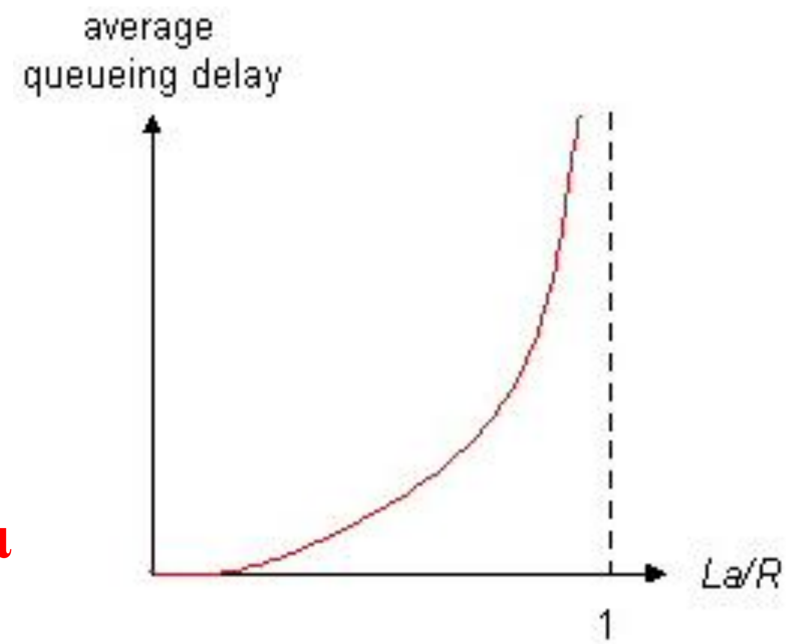
(d) $$W = T - 1/\mu = 8.6 - \frac{60}{27} = 6.4 \min$$

(e) $$L = \lambda W = \frac{20}{60} 6.4 = 2.1$$

Queueing delay (revisited)

- R= C = link bandwidth (bps)
- L=packet length (bits)
- a=average packet arrival rate
- λ = La
- μ = R = C

traffic intensity = α = **La/R** = λ/μ



- ❒ La/R ~ 0: average queueing delay small
- ❒ La/R -> 1: delays become large
- ❒ La/R > 1: more "work" arriving than can be serviced, average delay infinite!

Αν **α < s**

$$\boxed{\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{s}\right)^{r} = \frac{s}{s-\alpha}}$$

Παράδειγμα 9ο

- Το σύστημα αναμονής M/M/1 (με άπειρες θέσεις στην ουρά αναμονής) εμφανίζεται πολύ συχνά στην πράξη, σε δίκτυα Η/Υ. Π.χ. ανάμεσα σε δύο δρομολογητές, μια γραμμή μετάδοσης με χωρητικότητα C μονάδες εύρους ζώνης (ταχύτητα μετάδοσης), μπορεί να αναλυθεί ως σύστημα M/M/1, για να μελετήσουμε την ενδεχόμενη καθυστέρηση των πακέτων στην είσοδο της γραμμής μετάδοσης, όπου υπάρχει ουρά αναμονής. Για μια πρώτη εκτίμηση της συμφόρησης υποθέτουμε ότι τα πακέτα αφικνούνται στην είσοδο της γραμμής με κατανομή Poisson (τυχαία), σταθερού ρυθμού λ. Η ανάλυση είναι προσεγγιστική αλλά εύκολη, αρκεί να θεωρήσουμε ότι ένα πακέτο αντιστοιχεί σε κλήση. Επίσης, τα μήκη των πακέτων είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, και ακολουθούν την αρνητική εκθετική κατανομή με μέση τιμή *l*. Η μέση διάρκεια εξυπηρέτησης μιας κλήσης, h, αντιστοιχεί στο μέσο χρόνο μετάδοσης ενός πακέτου, δηλ. $h = l/C$. Επομένως το προσφερόμενο φορτίο κίνησης στην γραμμή μετάδοσης είναι $α = λl/C$. Αν **C=64 Kbps**, **λ=50 πακέτα/sec** και ***l*=125 bytes**:

α) Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε r πακέτα στο σύστημα (δηλ. συμπεριλαμβανομένης της ουράς αναμονής), για όλες τις τιμές του r.

β) Υπολογίστε την πιθανότητα αναμονής ενός πακέτου, το μέσος μήκος της ουράς αναμονής των πακέτων και τον μέσο χρόνο αναμονής.

γ) Ποια είναι η πιθανότητα ο χρόνος αναμονής πακέτου, να υπερβεί το 0.1 sec.

Παράδειγμα 9ο - ΛΥΣΗ

$$P_0 = \left(\sum_{r=0}^{s-1} \frac{\alpha^r}{r!} + \frac{\alpha^s}{s!} \frac{s}{s-\alpha} \right)^{-1} \qquad P_r = \frac{\alpha^s}{s!} \left(\frac{\alpha}{s} \right)^{r-s} P_0$$

$$L = \sum_{r=s}^{\infty} (r-s) P_r = \frac{\alpha^s}{s!} P_0 \sum_{r=0}^{\infty} r \left(\frac{\alpha}{s} \right)^r = M(0) \frac{\alpha}{s-\alpha} \qquad M(t) = M(0) e^{-(1-\rho)s\mu t}$$

α) Για s=1, παίρνουμε: P_0=1-α, και P_r =(1-α)α^r για r =0,1,2,3,... (γεωμετρική κατανομή)

β) Αφού 1 byte = 8 bits και α = λ*l*/C = 50*125*8/64000 erl = **0.78125 erl** (α < 1, επομένως το σύστημα είναι ευσταθές).

- Από την Erlang C-formula, πιθανότητα αναμονής: M(0) = α = **78.125%**.
- Το μήκος της ουράς αναμονής κατά μέσον όρο είναι: L = α^2/(1-α) = **2.79 πακέτα**.
- Ο χρόνος αναμονής κατά μέσον όρο είναι: W = L / λ = αh/(1-α) = **0.0558 s**

γ) Η πιθανότητα ο χρόνος αναμονής να είναι μεγαλύτερος από t δίδεται από τη σχέση:

$$M(t) = M(0) e^{-(1-\rho)s\mu t}$$

$\Rightarrow M(t)=\alpha\, e^{-1(1-\alpha)(C/\lambda)t} \Rightarrow M(0.1)=0.78125e^{-(1-0.78125)(64000/125/8)0.1}=0.78125\, e^{-1.4} \approx$ **19%**

Παράδειγμα 10ο

- Σε σύστημα αναμονής **M/M/3 (FIFO)**, μία κλήση καταφθάνει στο σύστημα και αναμένει εξυπηρέτηση (από έναν εξυπηρετητή) στην **4η θέση της ουράς αναμονής.**

- Αν κατά μέσον όρο η διάρκεια εξυπηρέτησης των κλήσεων από έναν εξυπηρετητή είναι **3 min**, να ευρεθεί η πιθανότητα, η κλήση αυτή να αναμένει προς εξυπηρέτηση περισσότερο από **5 min**.

Παράδειγμα 10ο - ΛΥΣΗ

- Η (υπό συνθήκη) πιθανότητα $Q_j(t)$ ότι μία κλήση θα αναμένει περισσότερο χρόνον από t, δεδομένου ότι j κλήσεις αναμένουν πριν απ' αυτήν (και για να εξυπηρετηθούν το πολύ j κλήσεις θα πρέπει να τερματίσουν ισάριθμες κλήσεις), εκφράζεται από το άθροισμα της κατανομής Poisson, ως εξής:

$$Q_j = \sum_{k=0}^{j} P_k(t) = e^{-s\mu t} \sum_{k=0}^{j} \frac{(s\mu t)^k}{k!}$$

Άρα για 4η θέση, j = 3 και $Q_3 = Q_3(5) = e^{-3(1/3)5}(1+5/1!+5^2/2!+5^3/3!) \Rightarrow$

$Q_3 = e^{-5}(1+5+12.5+20.83) = 39.33\, e^{-5} = 0.265 \Rightarrow$

Q_3 = 26.5%

Παράδειγμα 11ο

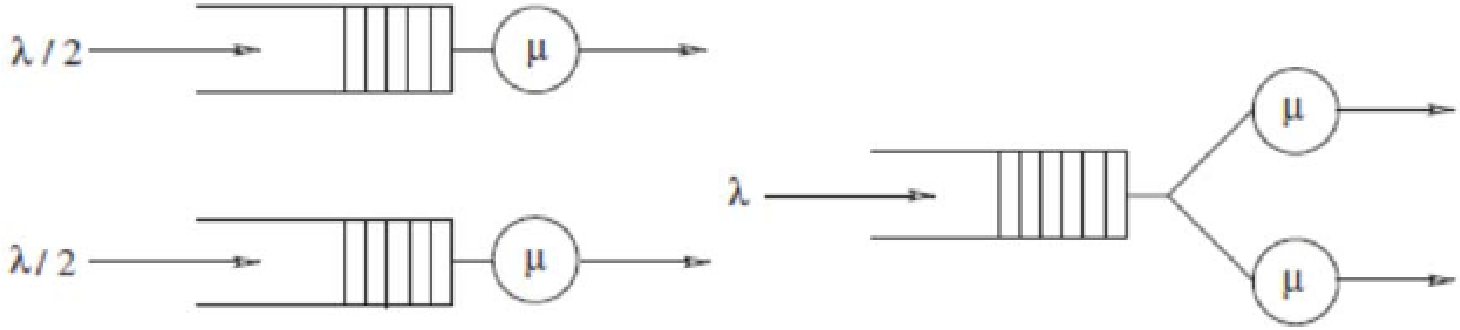
- Να συγκρίνετε, ως προς τον μέση καθυστέρηση (system response time) την απόδοση μεταξύ των ακόλουθων τριών περιπτώσεων συστημάτων αναμονής:

(α) δύο ξεχωριστών συστημάτων M/M/1,

(β) ενός συστήματος M/M/2 το οποίο δέχεται την συνολική κίνηση των δύο συστημάτων M/M/1, και

(γ) ενός συστήματος M/M/1 που δέχεται την συνολική κίνηση της περίπτωσης (α) αλλά διαθέτει εξυπηρετητή ο οποίος λειτουργεί δύο φορές ταχύτερα.

- Στο ακόλουθο σχήμα δίνονται τα προς μελέτη συστήματα των περιπτώσεων (α) και (β).



(α) (β)

Παράδειγμα 11ο - ΛΥΣΗ

- Έστω **δύο ανεξάρτητα** συστήματα αναμονής **M/M/1** με ρυθμό άφιξης των κλήσεων $\boldsymbol{\lambda/2}$ και ρυθμό εξυπηρέτησης $\boldsymbol{\mu}$ σε κάθε σύστημα.
Πρέπει: $\alpha = (\lambda/2)/\mu < 1 \Rightarrow \ \mathbf{2\boldsymbol{\mu} > \boldsymbol{\lambda}}$
- Η μέση τιμή του χρόνου $\mathbf{T_1}$ καθυστέρησης μιας κλήσεως σε κάθε σύστημα M/M/1 είναι:
$\mathbf{T_1} = 1/(\mu-\lambda/2) = \mathbf{2/(2\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda})}$

- Έστω ένα σύστημα αναμονής **M/M/1** με ρυθμό άφιξης των κλήσεων $\boldsymbol{\lambda}$ και ρυθμό εξυπηρέτησης $\mathbf{2\boldsymbol{\mu}}$.
Πρέπει: $\alpha = \lambda/(2\mu) < 1 \Rightarrow \ \mathbf{2\boldsymbol{\mu} > \boldsymbol{\lambda}}$
- Η μέση τιμή του χρόνου $\mathbf{T_3}$ καθυστέρησης μιας κλήσεως σε αυτό το σύστημα M/M/1 είναι:
$\mathbf{T_3 = 1/(2\mu-\lambda)}$

- Έστω ένα σύστημα αναμονής **M/M/2** με ρυθμό άφιξης των κλήσεων $\boldsymbol{\lambda}$ και ρυθμό εξυπηρέτησης $\boldsymbol{\mu}$.
Πρέπει: $\alpha = \lambda/\mu < 2 \Rightarrow \ \mathbf{2\boldsymbol{\mu} > \boldsymbol{\lambda}}$
- Η μέση τιμή του χρόνου $\mathbf{T_2}$ καθυστέρησης μιας κλήσεως σε αυτό το σύστημα M/M/2 είναι:
$N = \lambda T_2 = L + \alpha = M(0)\alpha/(2-\alpha) + \lambda/\mu$
$\Rightarrow \lambda T_2 = M(0)\lambda h/(2-\alpha) + \lambda/\mu$
$\Rightarrow T_2 = M(0)h/(2-\alpha) + 1/\mu$
$\Rightarrow T_2 = M(0)/(2\mu-\lambda) + 1/\mu$
$M(0)=\alpha^2/(2-\alpha)P_0$ όπου $P_0=(2-\alpha)/(2+\alpha)$
$\Rightarrow M(0) = \alpha^2/(2+\alpha) = \lambda^2 / [\mu(2\mu+\lambda)]$
Άρα $T_2 = \lambda^2/[\mu(2\mu+\lambda)(2\mu-\lambda)] + 1/\mu$
$\Rightarrow T_2 = \lambda^2/[\mu(4\mu^2-\lambda^2)] + 1/\mu$
$\Rightarrow T_2 = (1/\mu)[\lambda^2/(4\mu^2-\lambda^2) + 1]$
$\Rightarrow T_2 = (1/\mu)[\lambda^2/(4\mu^2-\lambda^2) + 1]$
$\Rightarrow \mathbf{T_2 = 4\boldsymbol{\mu}/(4\boldsymbol{\mu}^2-\boldsymbol{\lambda}^2)}$

Παράδειγμα 11ο – ΛΥΣΗ (συνέχεια)

ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

(α) $\mathbf{T_1 = 2/(2\mu\text{-}\lambda)}$

(β) $\mathbf{T_2 = 4\mu/(4\mu^2\text{-}\lambda^2)} = [2/(2\mu\text{-}\lambda)][2\mu/(2\mu+\lambda)]$

(γ) $\mathbf{T_3 = 1/(2\mu\text{-}\lambda)}$

Σύγκριση: $2/(2\mu\text{-}\lambda) > [2/(2\mu\text{-}\lambda)][2\mu/(2\mu+\lambda)] \Rightarrow 1 > 2\mu/(2\mu+\lambda) \Rightarrow 2\mu+\lambda > 2\mu$ *ισχύει!*

Άρα $\mathbf{T_1 > T_2}$

Σύγκριση: $[2/(2\mu\text{-}\lambda)][2\mu/(2\mu+\lambda)] > 1/(2\mu\text{-}\lambda) \Rightarrow 2[2\mu/(2\mu+\lambda)] > 1 \Rightarrow 4\mu > 2\mu+\lambda$

$\Rightarrow \quad 2\mu > \lambda$ *ισχύει!*

Άρα $\mathbf{T_2 > T_3}$

Επομένως $\mathbf{T_1 > T_2 > T_3}$ Δηλαδή καλύτερο (ταχύτερο) σύστημα είναι το (γ) που έχει ένα server αλλά με διπλάσια ταχύτητα από τους servers των υπολοίπων. *Παρόμοια αποτελέσματα δίδει η σύγκριση s ανεξάρτητων συστημάτων M/M/1 (rate λ/s) με ένα σύστημα M/M/s και ένα σύστημα M/M/1 με ρυθμό εξυπηρέτησης sμ.*

Παράδειγμα 12ο

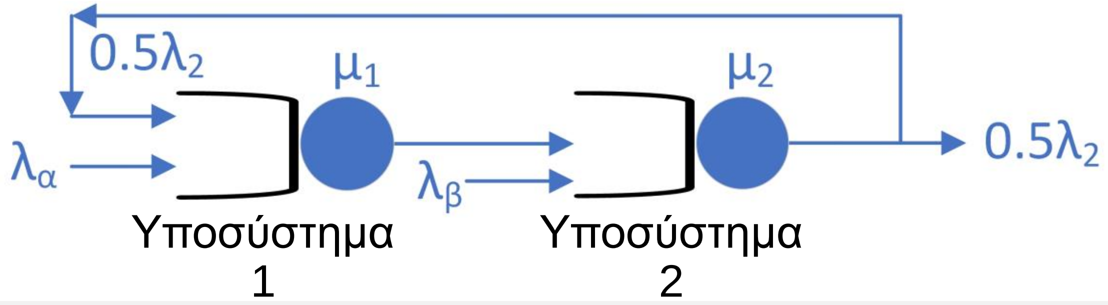
Ας θεωρήσουμε το κατωτέρω σύστημα αναμονής. Κλήσεις εισέρχονται στα υποσυστήματα αναμονής Μ/Μ/1 (FIFO) από εξωτερικές πηγές με ρυθμούς $\lambda_\alpha = 4$ κλήσεις/s και $\lambda_\beta = 2$ κλήσεις/s (αντιστοίχως, στο υποσύστημα 1 και 2).

1) Έστω ότι η πιθανότητα μετάβασης κλήσεων από την έξοδο του υποσυστήματος 2 στην είσοδο του 1 είναι 50%. Να υπολογίσετε τον συνολικό ρυθμό άφιξης των κλήσεων στο υποσύστημα 1, λ_1, και στο υποσύστημα 2, λ_2.

2) Υπολογίστε τον (ελάχιστο) ρυθμό εξυπηρέτησης κάθε υποσυστήματος Μ/Μ/1 ώστε το σύστημα να βρίσκεται σε ισορροπία. Ποια σχέση πρέπει να επικρατεί μεταξύ των ρυθμών εξυπηρέτησης (μ_1 και μ_2) των δύο αυτών υποσυστημάτων;

3) Αν ο μέσος αριθμός κλήσεων είναι $N_1 = 3$ και $N_2 = 2$ για τα υποσυστήματα 1 και 2, αντιστοίχως, να ευρεθεί ο μέσος χρόνος απόκρισης κάθε υποσυστήματος καθώς και ολοκλήρου του συστήματος αναμονής.

4) Να ευρεθεί ο ρυθμός εξυπηρέτησης (μ_1, μ_2) κάθε υποσυστήματος, κατά μέσον όρον.



Παράδειγμα 12ο - ΛΥΣΗ

1) Δεδομένου ότι τα υποσυστήματα M/M/1, Queue 1 και Queue 2, είναι συνδεδεμένα εν σειρά, βάσει του θεωρήματος του **Burke** ισχύει ότι κάθε ένα έχει ρυθμό αναχώρησης ίδιον με τον ρυθμό άφιξης. Επίσης, σύμφωνα με το θεώρημα του **Jackson**, ο συνολικός ρυθμός άφιξης κλήσεων σε κάθε υποσύστημα μπορεί να προσεγγιστεί από το άθροισμα επιμέρους ροών και οι αφίξεις να θεωρηθούν τυχαίες. Με βάση αυτά, από το σχήμα προκύπτει:

- $\lambda_1 = \lambda_\alpha + 0.5\lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 - 0.5\lambda_2 = \lambda_\alpha$
- $\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_\beta \quad \Rightarrow -\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_\beta$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει:

- $\lambda_1 = \begin{vmatrix} \lambda_\alpha & -0.5 \\ \lambda_\beta & 1 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} 1 & -0.5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{2\lambda_\alpha + \lambda_\beta} = 2x4 + 2 = 10$ κλήσεις/s
- $\lambda_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_\alpha \\ -1 & \lambda_\beta \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} 1 & -0.5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{2\lambda_\alpha + 2\lambda_\beta} = 2x4 + 2x2 = 12$ κλήσεις/s

Παράδειγμα 12ο - ΛΥΣΗ

2) Προκειμένου το όλο σύστημα να είναι σε ισορροπία, θα πρέπει να είναι σε ισορροπία το κάθε υποσύστημα. Δηλαδή το προσφερόμενο φορτίο κίνησης σε κάθε υποσύστημα πρέπει να είναι μικρότερο του 1 erl.

- $\alpha_1=\lambda_1/\mu_1 < 1 \Rightarrow \lambda_1<\mu_1 \Rightarrow 2\lambda_\alpha+\lambda_\beta=10 < \mu_1 \Rightarrow$ οριακά, $2\lambda_\alpha + \lambda_\beta \approx \mu_1$ (σχέση 1)
- $\alpha_2 = \lambda_2 / \mu_2 < 1 \Rightarrow \lambda_2 < \mu_2 \Rightarrow 2\lambda_\alpha+2\lambda_\beta=\mathbf{12}< \boldsymbol{\mu_2} \Rightarrow$ οριακά, $2\lambda_\alpha + 2\lambda_\beta \approx \mu_2 \Rightarrow$
  $2\lambda_\alpha + \lambda_\beta + \lambda_\beta \approx \mu_2 \Rightarrow$ (από σχέση 1) $\mu_1 + \lambda_\beta \approx \mu_2 \Rightarrow$ **10 κλήσεις/s** $< \boldsymbol{\mu_1} < \boldsymbol{\mu_2}$

3) Εφαρμόζοντας την επέκταση του Νόμου του Little στο M/M/1 queueing:

- $N_1=\lambda_1 T_1 \Rightarrow T_1=N_1/\lambda_1= 3/10 =$ **0.3 s** (Response Time του 1ου υποσυστήματος)
- $N_2=\lambda_2 T_2 \Rightarrow T_2=N_2/\lambda_2=2/12=$**0.16667 s** (Response Time του 2ου υποσυστήματος)

Ο συνολικός μέσος χρόνος απόκρισης, T, προκύπτει πάλι από την επέκταση του νόμου του Little, $T = N / \lambda = 5/6 =$ **0.833 s**, όπου $N = N_1 + N_2 = 5$ και $\lambda = \lambda_\alpha + \lambda_\beta = 6$ κλήσεις/s ο συνολικός εξωτερικός ρυθμός άφιξης των κλήσεων στο όλο σύστημα.

Και όχι T = T1 +T2 = 0.3 + 0.16667 = 0.46667s (αφού οι ουρές δεν είναι ανεξάρτητες)

4) Σε σύστημα αναμονής M/M/1 ισχύει:

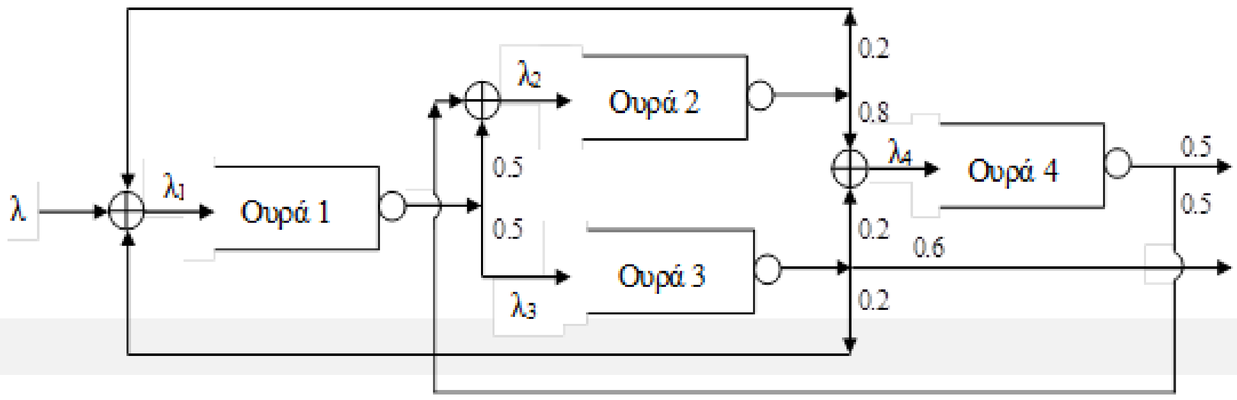
- $T_1=1/(\mu_1-\lambda_1) \Rightarrow T_1\mu_1-T_1\lambda_1=1 \Rightarrow 0.3\mu_1-0.3*10=1 \Rightarrow \mu_1=4/0.3=$**13.333 κλήσεις/s**
- $T_2=1/(\mu_2-\lambda_2) \Rightarrow T_2\mu_2-T_2\lambda_2=1 \Rightarrow 0.16667\mu_2-0.16667*12=1 \Rightarrow \mu_2=3/0.16667=$**18 κλήσεις/s**

Παράδειγμα 13ο

- Θεωρήστε το σύστημα (δίκτυο) αναμονής του παρακάτω σχήματος, όπου πακέτα δεδομένων φτάνουν από εξωτερική πηγή στο υποσύστημα 1 (δηλ. Ουρά 1) με ρυθμό λ, και αναχωρούν από τα υποσυστήματα 3 και 4 (δηλ. Ουρές 3 και 4). Ο ρυθμός άφιξης των πακέτων στα υποσυστήματα (ουρές) 1, 2, 3 και 4 ορίζεται ως λ_1 , λ_2 , λ_3 και λ_4 αντίστοιχα. Οι ρυθμοί εξυπηρέτησης των πακέτων για κάθε υποσύστημα-ουρά είναι $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ και $\mu_3 = \mu_4 = 0.5\mu$. Όλες οι ουρές αναμονής είναι M/M/1.

Α. Προσδιορίστε τον μέγιστο ρυθμό αφίξεων λ ώστε το (όλο) σύστημα να βρίσκεται σε ισορροπία.

Β. Έστω ότι λ = 0.1 πακέτα/s και μ = 1 πακέτο/s. Να προσδιορίσετε το μέσο επίπεδο χρήσης κάθε υποσυστήματος-ουράς, το μέσο πλήθος πακέτων N_i σε κάθε υποσύστημα-ουρά *i* (*i*=1,…,4) αλλά και στο σύστημα (των τεσσάρων ουρών) συνολικά καθώς και τον χρόνο προσπέλασης του συνολικού συστήματος από τα εισερχόμενα πακέτα.



Παράδειγμα 13ο - ΛΥΣΗ

- Ο ρυθμός άφιξης σε μια ουρά είναι ίσος με τον ρυθμό αναχώρησης από την ουρά.
- Σε περίπτωση πολλαπλών ροών άφιξης προς μια ουρά, η τελική ροή είναι το άθροισμα των επιμέρους ροών.

Α. Βασιζόμενοι στο σχήμα, προκύπτει το σύστημα εξισώσεων:

$\lambda_1 = \lambda + 0.2\lambda_2 + 0.2\lambda_3$

$\lambda_2 = 0.5\lambda_1 + 0.5\lambda_4$

$\lambda_3 = 0.5\lambda_1$

$\lambda_4 = 0.8\lambda_2 + 0.2\lambda_3$

με λύση:

$\lambda_1 = 1.395348\ \lambda$

$\lambda_2 = 1.279068\ \lambda$

$\lambda_3 = 0.697674\ \lambda$

$\lambda_4 = 1.162789\ \lambda$

Για να είναι το όλο σύστημα σε ισορροπία, θα πρέπει το επίπεδο χρήσης (φορτίο κίνησης) σε κάθε μία από τις 4 ουρές να είναι μικρότερο του 1. Θέτοντας $a = \lambda / \mu$ και επειδή από την εκφώνηση της άσκησης ισχύει $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ και $\mu_3 = \mu_4 = 0.5\mu$, το επίπεδο χρήσης σε κάθε ουρά είναι:

- $a_1 = \lambda_1 / \mu_1 = (1.395348\ \lambda) / (\mu) = 1.395348\ (\lambda / \mu) = 1.395348\ a$
- $a_2 = \lambda_2 / \mu_2 = (1.279068\ \lambda) / (\mu) = 1.279068\ (\lambda / \mu) = 1.279068\ a$
- $a_3 = \lambda_3 / \mu_3 = (0.697674\ \lambda) / (0.5\mu) = 1.395348\ (\lambda / \mu) = 1.395348\ a$
- $a_4 = \lambda_4 / \mu_4 = (1.162789\ \lambda) / (0.5\mu) = 2.325578\ (\lambda / \mu) = 2.325578\ a$

Παρατηρούμε ότι η Ουρά 4 εμφανίζει το μεγαλύτερο επίπεδο χρήσης και απαιτούμε η τιμή του a_4 να μην υπερβαίνει το 1. Δηλαδή: $a_4 < 1 \Rightarrow 2.325578\ a < 1 \Rightarrow$ **$\boldsymbol{\lambda < 0.43\ \mu}$**

Παράδειγμα 13ο - ΛΥΣΗ

Β. Επειδή λ = 0.1 πακέτα/s και μ = 1 πακέτο/s, έχουμε $a = \lambda / \mu = 0.1$.

Το μέσο επίπεδο χρήσης (φορτίο κίνησης) κάθε ουράς είναι:

- $a_1 = 0.1395348$
- $a_2 = 0.1279068$
- $a_3 = 0.1395348$
- $a_4 = 0.2325578$

Οπότε το μέσο πλήθος πακέτων σε κάθε ουρά M/M/1 υπολογίζεται ως εξής:

- $N_1 = a_1 / (1 - a_1) = 0.162162$
- $N_2 = a_2 / (1 - a_2) = 0.146666$
- $N_3 = a_3 / (1 - a_3) = 0.162162$
- $N_4 = a_4 / (1 - a_4) = 0.30303$

Το μέσο πλήθος πακέτων σ' όλο το σύστημα των τεσσάρων ουρών, N, προκύπτει ως: $N = \sum_{i=1}^{4} N_i = 0.77402$

Ο χρόνος προσπέλασης του συνολικού συστήματος από εισερχόμενα πακέτα υπολογίζεται με την βοήθεια του Νόμου του Little:

$$\mathbf{T = N / \lambda = 7.7402\ s}$$

Τέλος Ενότητας

Ερωτήσεις;