Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης

Ενότητα: Ασκήσεις για τις ενότητες 7 – 8 (Πολυδιάστατη Κίνηση – Αναδρομικός τύπος Kaufman-Roberts)

Ιωάννης Μοσχολιός

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Περιεχόμενα

1. Σκοποί ενότητας 5

2. Περιεχόμενα ενότητας.. 5

3. Ασκήσεις για τις Ενότητες 7-8: (Πολυδιάστατη Κίνηση – Αναδρομικός τύπος Kaufman-Roberts).. 7

1. Σκοποί ενότητας

Ο βασικός σκοπός αυτής της ενότητας είναι η παρουσίαση ασκήσεων για την κατανόηση της ύλης των ενοτήτων 7 και 8 της θεωρίας του μαθήματος Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης. Οι ασκήσεις που παρουσιάζονται καλύπτουν όλο το φάσμα της αντίστοιχης ύλης της θεωρίας, ενώ κάθε άσκηση συνοδεύεται από λεπτομερή περιγραφή της διαδικασίας επίλυσης.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται ασκήσεις, καθώς και οι λύσεις τους, για την κατανόηση: 1) των συστημάτων απωλειών πολυδιάστατης τηλεπικοινωνιακής κίνησης, 2) των πολιτικών διάθεσης του διαθέσιμου εύρους ζώνης ενός συστήματος απωλειών και 3) του αναδρομικού τύπου των Kaufman-Roberts.

3. Ασκήσεις για τις Ενότητες 7-8: (Πολυδιάστατη Κίνηση – Αναδρομικός τύπος Kaufman-Roberts)

Άσκηση 1

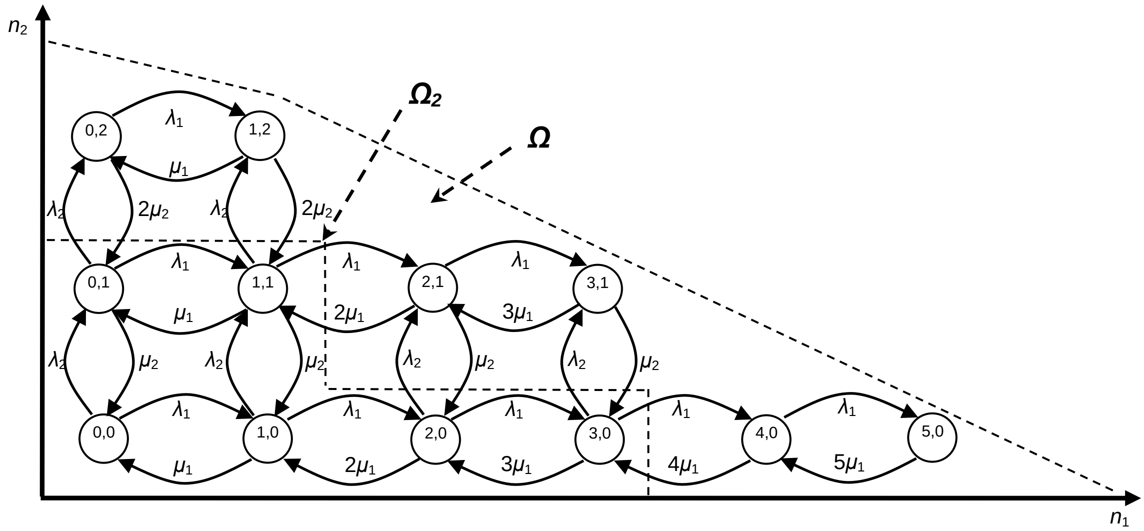
Θεωρείστε μια ζεύξη χωρητικότητας C=5 μονάδων εύρους ζώνης (bandwidth units, b.u.) η οποία εξυπηρετεί κλήσεις Poisson δύο κατηγοριών κίνησης με b_1 = 1 b.u. και b_2 = 2 b.u., εφαρμόζοντας την πολιτική πλήρους διάθεσης. Αν οι παράμετροι κίνησης κάθε κατηγορίας είναι λ_1, μ_1, λ_2, μ_2, τότε:

α) Να σχεδιάσετε το σύνολο καταστάσεων $\boldsymbol{\Omega}$.

β) Βάσει του (α) να σχεδιάσετε το υποσύνολο $\boldsymbol{\Omega}_2 = \{\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{\Omega} : \boldsymbol{nb} \leq C - b_2\}$ το οποίο έχει την εξής ιδιότητα: Μία νέα κλήση της 2ης κατηγορίας γίνεται δεκτή στο σύστημα αν την στιγμή της άφιξης της, το σύστημα βρίσκεται σε κάποια κατάσταση $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{\Omega}_2$.

Λύση

α, β) Το σύνολο καταστάσεων $\boldsymbol{\Omega}$ αποτελείται από 12 καταστάσεις και παρουσιάζεται στο σχήμα 1. Κάθε κατάσταση $\boldsymbol{n}$ = (n_1, n_2) ικανοποιεί την σχέση $n_1 + 2n_2 \leq 5$. Το υποσύνολο $\boldsymbol{\Omega}_2$ αποτελείται από 6 καταστάσεις, δηλαδή $\boldsymbol{\Omega}_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(3,0)\}$.



Σχήμα 1: Σύνολα καταστάσεων $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Omega_2}$ του συστήματος πλήρους διάθεσης της άσκησης 1.

Άσκηση 2

Θεωρείστε την Άσκηση 1 και έστω $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$. Για τις τιμές αυτές να υπολογίσετε την πιθανότητα απώλειας κλήσεως κάθε κατηγορίας κίνησης χρησιμοποιώντας: α) τις εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας (οι οποίες προκύπτουν μέσω του σχήματος 1), β) την λύση μορφής γινομένου του μοντέλου απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης και γ) τον αναδρομικό τύπο των Kaufman – Roberts.

Λύση

α) Για κάθε μια από τις 12 καταστάσεις $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$ του σχήματος 1, γράφουμε την αντίστοιχη εξίσωση σφαιρικής ισορροπίας υπό την μορφή *rate-in state* ***n*** = *rate-out of state* ***n***:

$\boldsymbol{n} = (0,0)$: $\mu_1 P(1,0) + \mu_2 P(0,1) = (\lambda_1 + \lambda_2) P(0,0) \Rightarrow P(1,0) + P(0,1) - 2P(0,0) = 0$

$\boldsymbol{n} = (0,1)$: $\lambda_2 P(0,0) + 2\mu_2 P(0,2) + \mu_1 P(1,1) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) P(0,1) \Rightarrow$

$P(0,0) + 2P(0,2) + P(1,1) - 3P(0,1) = 0$

$\boldsymbol{n} = (0,2)$: $\lambda_2 P(0,1) + \mu_1 P(1,2) = (\lambda_1 + 2\mu_2) P(0,2) \Rightarrow P(0,1) + P(1,2) - 3P(0,2) = 0$

$\boldsymbol{n} = (1,0)$: $\lambda_1 P(0,0) + \mu_2 P(1,1) + 2\mu_1 P(2,0) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) P(1,0) \Rightarrow$

$P(0,0) + P(1,1) + 2P(2,0) - 3P(1,0) = 0$

$\boldsymbol{n} = (1,1)$: $\lambda_1 P(0,1) + \lambda_2 P(1,0) + 2\mu_1 P(2,1) + 2\mu_2 P(1,2) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2) P(1,1) \Rightarrow$

$P(0,1) + P(1,0) + 2P(2,1) + 2P(1,2) - 4P(1,1) = 0$

$\boldsymbol{n} = (1,2)$: $\lambda_1 P(0,2) + \lambda_2 P(1,1) = (\mu_1 + 2\mu_2) P(1,2) \Rightarrow P(0,2) + P(1,1) - 3P(1,2) = 0$

$\boldsymbol{n} = (2,0)$: $\lambda_1 P(1,0) + \mu_2 P(2,1) + 3\mu_1 P(3,0) = (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_1) P(2,0) \Rightarrow$

$P(1,0) + P(2,1) + 3P(3,0) - 4P(2,0) = 0$

$\boldsymbol{n} = (2,1)$: $\lambda_1 P(1,1) + \lambda_2 P(2,0) + 3\mu_1 P(3,1) = (\lambda_1 + \mu_2 + 2\mu_1) P(2,1) \Rightarrow$

$P(1,1) + P(2,0) + 3P(3,1) - 4P(2,1) = 0$

$\boldsymbol{n} = (3,0)$: $\lambda_1 P(2,0) + \mu_2 P(3,1) + 4\mu_1 P(4,0) = (\lambda_1 + \lambda_2 + 3\mu_1) P(3,0) \Rightarrow$

$P(2,0) + P(3,1) + 4P(4,0) - 5P(3,0) = 0$

$\boldsymbol{n} = (3,1)$: $\lambda_1 P(2,1) + \lambda_2 P(3,0) = (\mu_2 + 3\mu_1) P(3,1) \Rightarrow P(2,1) + P(3,0) - 4P(3,1) = 0$

$\boldsymbol{n} = (4,0)$: $\lambda_1 P(3,0) + 5\mu_1 P(5,0) = (\lambda_1 + 4\mu_1) P(4,0) \Rightarrow P(3,0) + 5P(5,0) - 5P(4,0) = 0$

$\boldsymbol{n} = (5,0)$: $\lambda_1 P(4,0) = 5\mu_1 P(5,0) \Rightarrow P(4,0) - 5P(5,0) = 0$

Στο σημείο αυτό πρέπει να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα 12 εξισώσεων με 12 αγνώστους. Αντικαθιστώντας την εξίσωση της κατάστασης $\boldsymbol{n}$ = (1,1) με την εξίσωση $\sum_{\boldsymbol{n}\in\Omega} P(n_1,n_2)=1$, η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η εξής:

P(0,0)=0.156658, P(0,1)=0.156658, P(0,2)=0.078329, P(1,0)=0.156658, P(1,1)=0.156658,

P(1,2) = 0.078329, P(2,0) = 0.078329, P(2,1) = 0.078329, P(3,0) = 0.026110, P(3,1) = 0.026110, P(4,0) = 0.006527, P(5,0) = 0.001305.

Βασιζόμενοι στις παραπάνω τιμές, μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες απώλειας κλήσεως των δύο κατηγοριών κίνησης. Οι κλήσεις της 1ης κατηγορίας μπλοκάρονται και χάνονται όταν δεν υπάρχει διαθέσιμο εύρος ζώνης στην ζεύξη. Δηλαδή:

$$P_{b_1} = P(1,2)+P(3,1)+P(5,0)=0.105744\,.$$

Οι κλήσεις της 2ης κατηγορίας μπλοκάρονται και χάνονται όταν υπάρχουν λιγότερες από δύο μονάδες εύρους ζώνης διαθέσιμες στην ζεύξη. Δηλαδή:

$$P_{b_2} = P(0,2)+P(2,1)+P(4,0)+P(1,2)+P(3,1)+P(5,0)=0.268929$$

Από τα προηγούμενα είναι φανερό ότι η μέθοδος των εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας δεν μπορεί να εφαρμοστεί παρά μόνο σε συστήματα μικρής χωρητικότητας που εξυπηρετούν δύο ή το πολύ τρεις κατηγορίες κίνησης λόγω του μεγάλου αριθμού εξισώσεων που προκύπτουν.

β) Αν εφαρμόσουμε την λύση μορφής γινομένου, με $a_k = \dfrac{\lambda_k}{\mu_k}=1$ για k=1, 2:

$$P(n_1,n_2)=\frac{\dfrac{a_1^{n_1}}{n_1!}\dfrac{a_2^{n_2}}{n_2!}}{\sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{\Omega}}\dfrac{a_1^{n_1}}{n_1!}\dfrac{a_2^{n_2}}{n_2!}} \qquad (1)$$

τότε θα προκύψουν οι ίδιες τιμές (με εκείνες του ερωτήματος (α)) τόσο για τις $P(n_1, n_2)$ όσο και για τις πιθανότητες απώλειας κλήσεως.

Πράγματι, δεδομένου ότι ο παρονομαστής της (1) ισούται με:

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{\Omega}}\frac{a_1^{n_1}}{n_1!}\frac{a_2^{n_2}}{n_2!}=\frac{a_1^0}{0!}\frac{a_2^0}{0!}+\frac{a_1^0}{0!}\frac{a_2^1}{1!}+\frac{a_1^0}{0!}\frac{a_2^2}{2!}+\frac{a_1^1}{1!}\frac{a_2^0}{0!}+...+\frac{a_1^5}{5!}\frac{a_2^0}{0!}\overset{a_1=a_2=1}{=}6.38333\,.$$

έχουμε:

$$P(0,0)=\frac{\dfrac{a_1^0}{0!}\dfrac{a_2^0}{0!}}{6.38333}=\frac{1}{6.38333}=0.156658\,,$$

$$P(0,1)=\frac{\dfrac{a_1^0}{0!}\dfrac{a_2^1}{1!}}{6.38333}=\frac{1}{6.38333}=0.156658\,,$$

$$P(0,2)=\frac{\frac{a_1^0}{0!}\frac{a_2^2}{2!}}{6.38333}=\frac{0.5}{6.38333}=0.078329$$, κτλ.

Η (1) είναι σαφώς πιο εύχρηστη από την μέθοδο του ερωτήματος (α). Ωστόσο λόγω των παραγοντικών αλλά και του παρονομαστή της (1) (ο υπολογισμός του οποίου συνεπάγεται την γνώση όλων των καταστάσεων του συνόλου **Ω**) δεν χρησιμοποιείται σε συστήματα μεγάλης χωρητικότητας που εξυπηρετούν πολλές κατηγορίες κίνησης.

γ) Ο αναδρομικός τύπος των Kaufman – Roberts απλοποιείται στην παρακάτω σχέση:

$$jq(j)=a_1b_1q(j-b_1)+a_2b_2q(j-b_2)\Rightarrow jq(j)=q(j-1)+2q(j-2)$$

Επειδή $q(0)=1$, έχουμε:

$$j=1:\ q(1)=q(0)+0=1 \quad \Rightarrow q(1)=1.0$$
$$j=2:\ 2q(2)=q(1)+2q(0)=3 \quad \Rightarrow q(2)=1.5$$
$$j=3:\ 3q(3)=q(2)+2q(1)=3.5 \quad \Rightarrow q(3)=1.16667$$
$$j=4:\ 4q(4)=q(3)+2q(2)=4.1667 \Rightarrow q(4)=1.041667$$
$$j=5:\ 5q(5)=q(4)+2q(3)=3.375 \quad \Rightarrow q(5)=0.675$$

οπότε η σταθερά κανονικοποίησης ισούται με: $G=\sum_{j=0}^{C}q(j)=6.38333$.

Οι πιθανότητες απώλειας κλήσεως των δύο κατηγοριών δίνονται από τις σχέσεις:

$$P_{b_1}=\sum_{j=C-b_1+1}^{C}\frac{q(j)}{G}=\frac{q(5)}{G}=0.105744$$
$$P_{b_2}=\sum_{j=C-b_2+1}^{C}\frac{q(j)}{G}=\frac{q(4)+q(5)}{G}=0.268929$$

Όπως αναμενόταν ο αναδρομικός τύπος των Kaufman-Roberts οδηγεί στα ίδια αποτελέσματα με εκείνα των εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας και της λύσης μορφής γινομένου, αλλά με σαφώς πιο εύκολο τρόπο. Ο τύπος αυτός έχει πολυπλοκότητα O(KC) και χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας απώλειας κλήσεως σε συστήματα μεγάλης χωρητικότητας που εξυπηρετούν πολλές κατηγορίες κίνησης.

Άσκηση 3

Θεωρείστε την Άσκηση 2 και υπολογίστε τις πιθανότητες απώλειας κλήσεως των δύο κατηγοριών κίνησης χρησιμοποιώντας τον παρακάτω αλγόριθμο συνέλιξης (ο αλγόριθμος περιγράφεται για δύο κατηγορίες κίνησης) [1]:

Βήμα 1: Για κάθε κατηγορία κίνησης *k* (*k*=1, 2) υπολογίστε την μη-κανονικοποιημένη πιθανότητα $q_k(j)$, *j*=1,…,*C*, υποθέτοντας ότι η ζεύξη εξυπηρετεί μόνο κλήσεις της κατηγορίας *k*. Θεωρείστε ότι $q_k(0)=1$ για *k*=1, 2 και χρησιμοποιείστε τον αναδρομικό τύπο των Kaufman-Roberts για μια κατηγορία κίνησης.

Βήμα 2: Αν θεωρήσουμε το σύμβολο (*) για την πράξη της συνέλιξης, να χρησιμοποιηθεί ο παρακάτω γενικός τύπος υπολογισμού των *q*(*j*) για δύο κατηγορίες κίνησης *i*, *k*:

$$q(j) = P_i(j) * P_k(j) = \sum_{x=0}^{j} P_i(x) P_k(j-x)$$

όπου οι τιμές των $P_k(j) = \dfrac{q_k(j)}{G}$, $P_i(j) = \dfrac{q_i(j)}{G}$.

Λύση

Βήμα 1

1η κατηγορία κίνησης (α_1 = 1 erl, b_1 = 1 b.u.)

$$q_1(0) = 1$$
$$q_1(1) = a_1 b_1 q_1(0) \Rightarrow q_1(1) = 1$$
$$2q_1(2) = a_1 b_1 q_1(1) \Rightarrow q_1(2) = 0.5$$
$$3q_1(3) = a_1 b_1 q_1(2) \Rightarrow q_1(3) = 0.166667$$
$$4q_1(4) = a_1 b_1 q_1(3) \Rightarrow q_1(4) = 0.041667$$
$$5q_1(5) = a_1 b_1 q_1(4) \Rightarrow q_1(5) = 0.008333$$
$$G = \sum_{j=0}^{C=5} q_1(j) = 2.716667$$

και οι κανονικοποιημένες τιμές των $q_1(j)$ είναι οι εξής:

$$P_1(0) = q_1(0)/G = 0.368098$$
$$P_1(1) = q_1(1)/G = 0.368098$$
$$P_1(2) = q_1(2)/G = 0.184049$$
$$P_1(3) = q_1(3)/G = 0.061350$$
$$P_1(4) = q_1(4)/G = 0.015337$$
$$P_1(5) = q_1(5)/G = 0.003067$$

2η κατηγορία κίνησης (a_1 = 1 erl, b_1 = 2 b.u.)

$$q_2(0) = 1$$
$$q_2(1) = a_2 b_2 q_2(-1) \Rightarrow q_2(1) = 0$$
$$2q_2(2) = a_2 b_2 q_2(0) \Rightarrow q_2(2) = 1.0$$
$$3q_2(3) = a_2 b_2 q_2(1) \Rightarrow q_2(3) = 0$$
$$4q_2(4) = a_2 b_2 q_2(2) \Rightarrow q_2(4) = 0.5$$
$$5q_2(5) = a_2 b_2 q_2(4) \Rightarrow q_2(5) = 0$$
$$G = \sum_{j=0}^{C=5} q_2(j) = 2.5$$

και οι κανονικοποιημένες τιμές των $q_2(j)$ είναι οι εξής:

$$P_2(0) = q_2(0)/G = 0.4$$
$$P_2(1) = q_2(1)/G = 0$$
$$P_2(2) = q_2(2)/G = 0.4$$
$$P_2(3) = q_2(3)/G = 0$$
$$P_2(4) = q_2(4)/G = 0.2$$
$$P_2(5) = q_2(5)/G = 0$$

Βήμα 2

Εφαρμογή του τύπου $q(j) = P_i(j) * P_k(j) = \sum_{x=0}^{j} P_i(x) P_k(j-x)$ για δύο κατηγορίες κίνησης:

$$j = 0 \Rightarrow \quad q(0) = P_1(0) * P_2(0) = P_1(0)P_2(0) = 0.147239$$
$$j = 1 \Rightarrow \quad q(1) = P_1(1) * P_2(1) = \sum_{x=0}^{j=1} P_1(x)P_2(j-x) = P_1(0)P_2(1) + P_1(1)P_2(0) = P_1(1)P_2(0) = 0.147239$$
$$j = 2 \Rightarrow \quad q(2) = P_1(2) * P_2(2) = \sum_{x=0}^{j=2} P_1(x)P_2(j-x) = P_1(0)P_2(2) + P_1(1)P_2(1) + P_1(2)P_2(0) = 0.220859$$
$$j = 3 \Rightarrow \quad q(3) = P_1(3) * P_2(3) = \sum_{x=0}^{j=3} P_1(x)P_2(j-x) = P_1(0)P_2(3) + P_1(1)P_2(2) + P_1(2)P_2(1) + P_1(3)P_2(0) = 0.171779$$

Ομοίως $q(4)$ = 0.153374 και $q(5)$ = 0.099386

Η σταθερά κανονικοποίησης $G = \sum_{j=0}^{5} q(j) = 0.939876$.

Επομένως:

$$P(0) = \frac{q(0)}{G} = 0.156659, \; P(1) = \frac{q(1)}{G} = 0.156659 \text{ κτλ.}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι τόσο οι τιμές των $q(j)$ όσο και των πιθανοτήτων απώλειας κλήσεως συμπίπτουν με εκείνες της Άσκησης 2 (εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας, λύση μορφής γινομένου, αναδρομικός τύπος Kaufman-Roberts). Ωστόσο πρέπει να σημειώσουμε ότι ο αλγόριθμος της συνέλιξης που παρουσιάστηκε στην άσκηση αυτή μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε μοντέλα που έχουν λύση μορφής γινομένου. Διαφορετικά, ο αλγόριθμος γίνεται ιδιαίτερα πολύπλοκος.

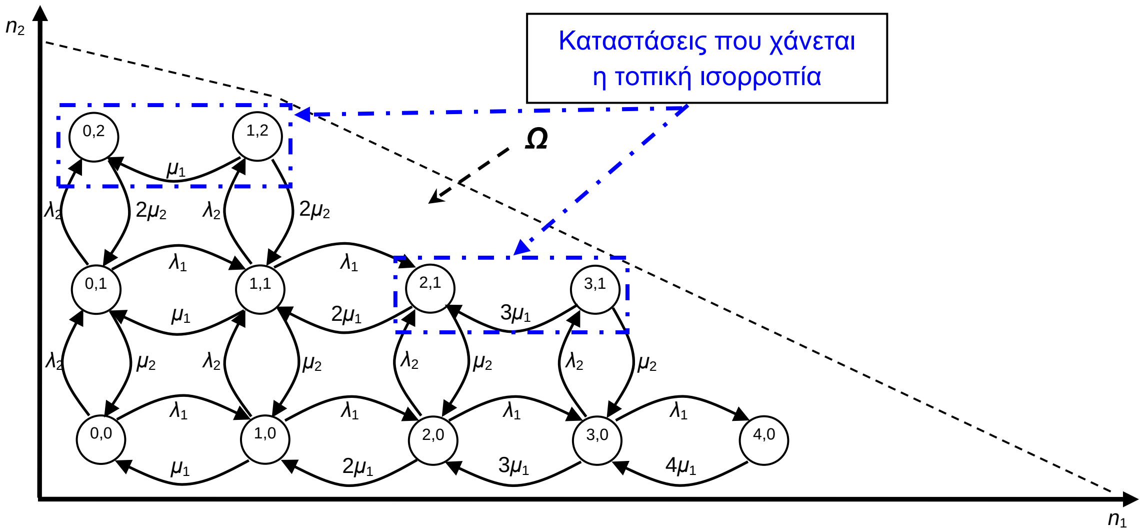
[1] V. B. Iversen, “The exact evaluation of multi-service loss system with access control”, Teleteknik, English ed., Vol 31, No 2, pp. 56-61, 1987.

Άσκηση 4

Θεωρείστε την Άσκηση 1 όπου υποθέτουμε ότι στην ζεύξη εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης, με παραμέτρους t_1 = 1, t_2 = 0. Να σχεδιάσετε το σύνολο καταστάσεων ***Ω*** και να δείξετε μεταξύ ποιων καταστάσεων παύει να ισχύει η έννοια της τοπικής ισορροπίας.

Λύση

Το σύνολο καταστάσεων ***Ω*** αποτελείται από 11 καταστάσεις και παρουσιάζεται στο σχήμα 2. Κάθε κατάσταση ***n*** = (n_1, n_2) ικανοποιεί την σχέση $n_1 + 2n_2 + b_k \leq 5 - t_k$. Λόγω της πολιτικής δέσμευσης εύρους ζώνης η τοπική ισορροπία παύει να ισχύει μεταξύ των γειτονικών καταστάσεων: α) (0,2) και (1,2) και β) (2,1) και (3,1). Ως παράδειγμα θεωρείστε την περίπτωση όπου το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση (0,2) την στιγμή που φτάνει μια κλήση της 1ης κατηγορίας. Εξαιτίας της πολιτικής δέσμευσης εύρους ζώνης, η κλήση μπλοκάρεται και χάνεται. Θεωρείστε τώρα ότι το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση (1,2). Στην περίπτωση αυτή, η κλήση της 1ης κατηγορίας μπορεί να εξυπηρετηθεί και να φύγει από το σύστημα. Τότε η νέα κατάσταση του συστήματος είναι η (0,2).



Σχήμα 2: Σύνολο καταστάσεων ***Ω*** του συστήματος δέσμευσης εύρους ζώνης της άσκησης 4.

Άσκηση 5

Θεωρείστε την Άσκηση 4 και έστω $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$. Για τις τιμές αυτές και βασιζόμενοι στις εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας του σχήματος 2, να υπολογίσετε τη πιθανότητα απώλειας κλήσεως των δύο κατηγοριών κίνησης.

Λύση

Για κάθε μια από τις 11 καταστάσεις $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$ του σχήματος 2, γράφουμε την αντίστοιχη εξίσωση σφαιρικής ισορροπίας υπό την μορφή *rate-in state* $\boldsymbol{n}$ = *rate-out of state* $\boldsymbol{n}$:

$\boldsymbol{n}$ = (0,0): $\mu_1 P(1,0) + \mu_2 P(0,1) = (\lambda_1 + \lambda_2)P(0,0) \Rightarrow P(1,0) + P(0,1) - 2P(0,0) = 0$

$\boldsymbol{n}$ = (0,1): $\lambda_2 P(0,0) + 2\mu_2 P(0,2) + \mu_1 P(1,1) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)P(0,1) \Rightarrow$

$P(0,0) + 2P(0,2) + P(1,1) - 3P(0,1) = 0$

$\boldsymbol{n}$ = (0,2): $\lambda_2 P(0,1) + \mu_1 P(1,2) = 2\mu_2 P(0,2) \Rightarrow P(0,1) + P(1,2) - 2P(0,2) = 0$

$\boldsymbol{n}$ = (1,0): $\lambda_1 P(0,0) + \mu_2 P(1,1) + 2\mu_1 P(2,0) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)P(1,0) \Rightarrow$

$P(0,0) + P(1,1) + 2P(2,0) - 3P(1,0) = 0$

$\boldsymbol{n}$ = (1,1): $\lambda_1 P(0,1) + \lambda_2 P(1,0) + 2\mu_1 P(2,1) + 2\mu_2 P(1,2) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)P(1,1) \Rightarrow$

$P(0,1) + P(1,0) + 2P(2,1) + 2P(1,2) - 4P(1,1) = 0$

$\boldsymbol{n}$ = (1,2): $\lambda_2 P(1,1) = (\mu_1 + 2\mu_2)P(1,2) \Rightarrow P(1,1) - 3P(1,2) = 0$

$\boldsymbol{n}$ = (2,0): $\lambda_1 P(1,0) + \mu_2 P(2,1) + 3\mu_1 P(3,0) = (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_1)P(2,0) \Rightarrow$

$P(1,0) + P(2,1) + 3P(3,0) - 4P(2,0) = 0$

$\boldsymbol{n}$ = (2,1): $\lambda_1 P(1,1) + \lambda_2 P(2,0) + 3\mu_1 P(3,1) = (\mu_2 + 2\mu_1)P(2,1) \Rightarrow$

$P(1,1) + P(2,0) + 3P(3,1) - 3P(2,1) = 0$

$\boldsymbol{n}$ = (3,0): $\lambda_1 P(2,0) + \mu_2 P(3,1) + 4\mu_1 P(4,0) = (\lambda_1 + \lambda_2 + 3\mu_1)P(3,0) \Rightarrow$

$P(2,0) + P(3,1) + 4P(4,0) - 5P(3,0) = 0$

$\boldsymbol{n}$ = (3,1): $\lambda_2 P(3,0) = (\mu_2 + 3\mu_1)P(3,1) \Rightarrow P(3,0) - 4P(3,1) = 0$

$\boldsymbol{n}$ = (4,0): $\lambda_1 P(3,0) = 4\mu_1 P(4,0) \Rightarrow P(3,0) - 4P(4,0) = 0$

Στο σημείο αυτό πρέπει να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα 11 εξισώσεων με 11 αγνώστους. Αντικαθιστώντας την εξίσωση της κατάστασης $\boldsymbol{n}$ = (1,1) με την εξίσωση $\sum_{\boldsymbol{n}\in\Omega} P(n_1, n_2) = 1$, η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η εξής:

$P(0,0)=0.168605$, $P(0,1)=0.183140$, $P(0,2)=0.116279$, $P(1,0)=0.154070$, $P(1,1)=0.148256$,

$P(1,2) = 0.049419$, $P(2,0) = 0.072674$, $P(2,1) = 0.078488$, $P(3,0) = 0.019380$, $P(3,1) = 0.004845$, $P(4,0) = 0.004845$.

Βασιζόμενοι στις παραπάνω τιμές, μπορούμε να υπολογίσουμε τη πιθανότητα απώλειας κλήσεως των δύο κατηγοριών κίνησης ως εξής:

$$P_{b_1} = P_{b_2} = P(0,2) + P(2,1) + P(4,0) + P(1,2) + P(3,1) = 0.253876 \,.$$

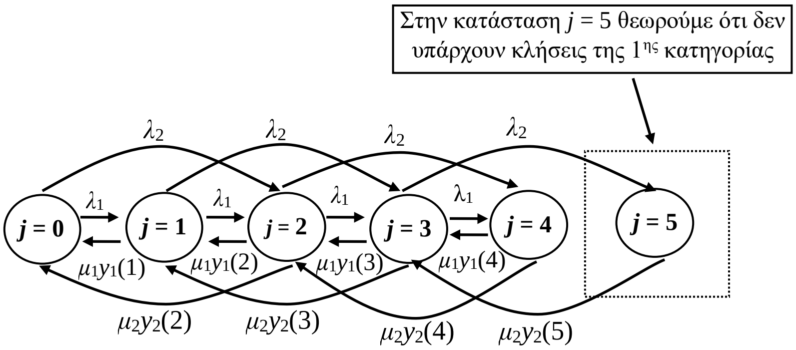
όπου $P_{b_1} = P_{b_2}$ επειδή $b_1 + t_1 = b_2 + t_2$.

Άσκηση 6

Θεωρείστε την Άσκηση 5. Αφού σχεδιάσετε την μονοδιάστατη αλυσίδα Markov του συστήματος, για j=0,…,C, να υπολογίσετε την πιθανότητα απώλειας κλήσεως των δύο κατηγοριών χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο του Roberts.

Λύση

Η μονοδιάστατη αλυσίδα Markov του συστήματος παρουσιάζεται στο σχήμα 3.



Σχήμα 3: Μονοδιάστατη αλυσίδα Markov (Άσκηση 6, πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης).

Ο αναδρομικός τύπος του Roberts απλοποιείται στην παρακάτω σχέση:

$$jq(j) = a_1 b_1 q(j-b_1) + a_2 b_2 q(j-b_2) \Rightarrow \begin{cases} jq(j) = q(j-1) + 2q(j-2) & \gamma\iota\alpha \;\; j = 1,...,4 \\ jq(j) = \;\; 0 \;\; + 2q(j-2) & \gamma\iota\alpha \;\; j = 5 \end{cases}$$

Επειδή $q(0) = 1$, έχουμε:

$$j=1:\ q(1)=q(0)+0=1 \qquad \Rightarrow q(1)=1.0$$
$$j=2:\ 2q(2)=q(1)+2q(0)=3 \qquad \Rightarrow q(2)=1.5$$
$$j=3:\ 3q(3)=q(2)+2q(1)=3.5 \qquad \Rightarrow q(3)=1.16667$$
$$j=4:\ 4q(4)=q(3)+2q(2)=4.1667 \Rightarrow q(4)=1.041667$$
$$j=5:\ 5q(5)=0+2q(3)=2.33334 \qquad \Rightarrow q(5)=0.466668$$

Ενώ η σταθερά κανονικοποίησης ισούται με: $G=\sum_{j=0}^{C} q(j)=6.175$.

Οι πιθανότητες απώλειας κλήσεως υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$P_{b_1}=\sum_{j=C-b_1-t_1+1}^{C}\frac{q(j)}{G}=\frac{q(4)+q(5)}{G}=0.244263$$
$$P_{b_2}=\sum_{j=C-b_2-t_2+1}^{C}\frac{q(j)}{G}=\frac{q(4)+q(5)}{G}=0.244263$$

όπου παρατηρούμε ότι οι τιμές αυτές είναι αρκετά κοντά στις ακριβείς τιμές (0.253876) της Άσκησης 5.

Είναι χαρακτηριστικό ότι ο προσεγγιστικός (αλλά αναδρομικός) τύπος του Roberts απλοποιεί τον υπολογισμό των πιθανοτήτων απώλειας κλήσεως και παρέχει ικανοποιητική ακρίβεια ακόμα και στην περίπτωση μικρών συστημάτων (όπως το σύστημα της άσκησης μας).

Άσκηση 7

Σε μία τηλεπικοινωνιακή ζεύξη χωρητικότητας 6 μονάδων εύρους ζώνης, φθάνουν κλήσεις δύο διαφορετικών κατηγοριών κίνησης. Το σύστημα μπορεί να εξυπηρετήσει το πολύ 3 κλήσεις της πρώτης κατηγορίας και καμία της δεύτερης ή το πολύ 2 κλήσεις της δεύτερης κατηγορίας και καμία της πρώτης. Το αρχικά προσφερόμενο φορτίο κίνησης των δύο κατηγοριών είναι α_1 = 1 και α_2 = 0.5 erl, αντίστοιχα.

α) Πόσες μονάδες εύρους ζώνης απαιτούν οι κλήσεις των δύο κατηγοριών κίνησης;

β) Πόσες και ποιες είναι οι δυνατές καταστάσεις (n_1, n_2) του συστήματος όπου n_1, n_2 είναι οι κλήσεις της 1ης και 2ης κατηγορίας που εξυπηρετούνται από την ζεύξη, αντίστοιχα.

γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα να είναι κατειλημμένες το πολύ 2 μονάδες εύρους ζώνης της ζεύξης.

δ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα απώλειας κλήσεως κάθε κατηγορίας κίνησης.

Λύση

α) Από την εκφώνηση της άσκησης συμπεραίνουμε ότι b_1 = 2 μονάδες εύρους ζώνης και b_2 = 3 μονάδες εύρους ζώνης. Πράγματι, με τις τιμές αυτές το σύστημα μπορεί να εξυπηρετήσει το πολύ 3 κλήσεις της πρώτης κατηγορίας και καμία της δεύτερης ή το πολύ 2 κλήσεις της δεύτερης κατηγορίας και καμία της πρώτης.

β) Οι δυνατές καταστάσεις, της μορφής (n_1, n_2), είναι **οκτώ**: (0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (3,0).

γ) Από τον αναδρομικό τύπο των Kaufman-Roberts υπολογίζουμε αρχικά όλες τις μη-κανονικοποιημένες τιμές των $q(j)$, για j = 0, …, 6.

Έχουμε:

$q(0) = 1.0$

$1q(1) = \alpha_1 b_1 q(1-b_1) + \alpha_2 b_2 q(1-b_2) = 2q(-1) + 1.5q(-2) = 0 \rightarrow q(1) = 0.0$

$2q(2) = \alpha_1 b_1 q(2-b_1) + \alpha_2 b_2 q(2-b_2) = 2q(0) + 1.5q(-1) = 2 \rightarrow q(2) = 1.0$

$3q(3) = \alpha_1 b_1 q(3-b_1) + \alpha_2 b_2 q(3-b_2) = 2q(1) + 1.5q(0) = 1.5 \rightarrow q(3) = 0.5$

$4q(4) = \alpha_1 b_1 q(4-b_1) + \alpha_2 b_2 q(4-b_2) = 2q(2) + 1.5q(1) = 2 \rightarrow q(4) = 0.5$

$5q(5) = \alpha_1 b_1 q(5-b_1) + \alpha_2 b_2 q(5-b_2) = 2q(3) + 1.5q(2) = 2.5 \rightarrow q(5) = 0.5$

$6q(6) = \alpha_1 b_1 q(6-b_1) + \alpha_2 b_2 q(6-b_2) = 2q(4) + 1.5q(3) = 1.75 \rightarrow q(6) = 0.29166$

$G = \sum_{j=0}^{C} q(j) = 3.79166$ (σταθερά κανονικοποίησης)

Επομένως, η πιθανότητα να είναι κατειλημμένες το πολύ 2 μονάδες εύρους ζώνης της ζεύξης ισούται με: $\frac{q(0)+q(1)+q(2)}{G} = \frac{2.0}{3.79166} = 0.5275$.

δ)

$$P_{b_1} = \sum_{j=C-b_1+1}^{C} \frac{q(j)}{G} = \frac{q(5)+q(6)}{G} = 0.20879$$

$$P_{b_2} = \sum_{j=C-b_2+1}^{C} \frac{q(j)}{G} = \frac{q(4)+q(5)+q(6)}{G} = 0.34066$$

Άσκηση 8

Σε μία τηλεπικοινωνιακή ζεύξη χωρητικότητας 7 μονάδων εύρους ζώνης, φθάνουν κλήσεις δύο διαφορετικών κατηγοριών κίνησης. Οι κλήσεις της 1ης κατηγορίας έχουν απαίτηση σε εύρος ζώνης b_1=2 μονάδες εύρους ζώνης. Αν η παράμετρος δέσμευσης εύρους ζώνης των κλήσεων της 1ης κατηγορίας είναι $t_1 = 1$ ενώ η παράμετρος δέσμευσης εύρους ζώνης των κλήσεων της 2ης κατηγορίας είναι $t_2 = 0$, τότε επιτυγχάνεται εξισορρόπηση της πιθανότητας απώλειας κλήσεων μεταξύ των δύο κατηγοριών κίνησης. Το αρχικά προσφερόμενο φορτίο κίνησης των δύο κατηγοριών είναι $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_2 = 0.5$ erl, αντίστοιχα. Να υπολογιστούν:

α) Πόσες μονάδες εύρους ζώνης απαιτούν οι κλήσεις της δεύτερης κατηγορίας κίνησης;

β) πόσες και ποιες είναι οι δυνατές καταστάσεις (n_1, n_2) του συστήματος όπου n_1, n_2 είναι οι κλήσεις της 1ης και 2ης κατηγορίας που εξυπηρετούνται από την ζεύξη, αντίστοιχα,

γ) η πιθανότητα να είναι κατειλημμένες το πολύ 3 μονάδες εύρους ζώνης της ζεύξης,

δ) η πιθανότητα να είναι κατειλημμένες τουλάχιστον 5 μονάδες εύρους ζώνης,

ε) η κοινή πιθανότητα απώλειας κλήσεως και

στ) η μέση τιμή των κατειλημμένων γραμμών της ζεύξης.

Λύση

α) Στη ζεύξη εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης. Προκειμένου να πετύχουμε εξισορρόπηση της πιθανότητας απώλειας κλήσεων μεταξύ των δύο κατηγοριών κίνησης θα πρέπει να ισχύει $b_1 + t_1 = b_2 + t_2$. Επομένως, $b_2 = 3$ μονάδες εύρους ζώνης.

β) Οι δυνατές καταστάσεις, της μορφής (n_1, n_2), είναι **οκτώ**: (0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (3,0).

γ) Από τον αναδρομικό τύπο του Roberts, για την πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης, υπολογίζουμε αρχικά όλες τις μη-κανονικοποιημένες τιμές των $q(j)$, για $j = 0, \ldots, 7$. Θεωρούμε ότι $D_1(j - b_1) = b_1$ για $j = 1, 2, \ldots, C - t_1 \rightarrow j = 1, 2, \ldots, 6$ ενώ για $j = 7$ ισχύει $D_1(j - b_1) = D_1(5)=0$.

Έχουμε:

$q(0) = 1.0$

$1q(1) = \alpha_1 b_1 q(1\text{-}b_1) + \alpha_2 b_2 q(1\text{-}b_2) = 2q(-1) + 1.5q(-2) = 0 \rightarrow q(1) = 0.0$

$2q(2) = \alpha_1 b_1 q(2\text{-}b_1) + \alpha_2 b_2 q(2\text{-}b_2) = 2q(0) + 1.5q(-1) = 2 \rightarrow q(2) = 1.0$

$3q(3) = \alpha_1 b_1 q(3\text{-}b_1) + \alpha_2 b_2 q(3\text{-}b_2) = 2q(1) + 1.5q(0) = 1.5 \rightarrow q(3) = 0.5$

$4q(4) = \alpha_1 b_1 q(4\text{-}b_1) + \alpha_2 b_2 q(4\text{-}b_2) = 2q(2) + 1.5q(1) = 2 \rightarrow q(4) = 0.5$

$5q(5) = \alpha_1 b_1 q(5\text{-}b_1) + \alpha_2 b_2 q(5\text{-}b_2) = 2q(3) + 1.5q(2) = 2.5 \rightarrow q(5) = 0.5$

$6q(6) = \alpha_1 b_1 q(6\text{-}b_1) + \alpha_2 b_2 q(6\text{-}b_2) = 2q(4) + 1.5q(3) = 1.75 \rightarrow q(6) = 0.29166$

$7q(7) = 0 + \alpha_2 b_2 q(7\text{-}b_2) = 0 + 1.5q(4) = 0.75 \rightarrow q(7) = 0.107$

$$G=\sum_{j=0}^{C} q(j)=3.89866$$ (σταθερά κανονικοποίησης)

Επομένως, η πιθανότητα να είναι κατειλημμένες το πολύ 3 μονάδες εύρους ζώνης της ζεύξης ισούται με:

$$\frac{q(0)+q(1)+q(2)+q(3)}{G}=\frac{2.5}{3.89866}=0.6412\,.$$

δ) Η πιθανότητα να είναι κατειλημμένες τουλάχιστον 5 μονάδες εύρους ζώνης ισούται με:

$$\frac{q(5)+q(6)+q(7)}{G}=\frac{0.89866}{3.89866}=0.2305\,.$$

ε) Η κοινή πιθανότητα απώλειας κλήσεως ισούται με:

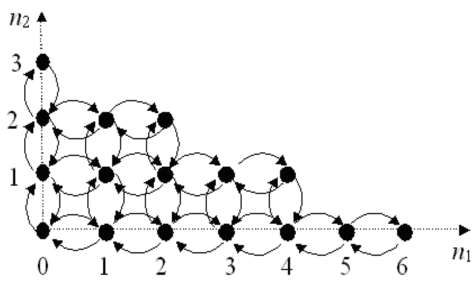
$$P_{b_{equal}}=P_{b_{1,2}}=\sum_{j=C-b_1-t_1+1}^{C}\frac{q(j)}{G}=\frac{q(5)+q(6)+q(7)}{G}=\frac{0.89866}{3.89866}=0.2305\,.$$

στ) Η μέση τιμή των κατειλημμένων γραμμών της ζεύξης ισούται με:

$$E(j)=\sum_{j=1}^{C} j\,\frac{q(j)}{G}=\frac{q(1)+2q(2)+3q(3)+...+7q(7)}{G}=2.693\,.$$

Άσκηση 9

Σε μια τηλεπικοινωνιακή ζεύξη χωρητικότητας C = 6 μονάδων εύρους ζώνης φθάνουν δύο κατηγορίες κλήσεων με ρυθμό λ_1 = 2.0 sec^{-1} και λ_2 = 0.2 sec^{-1} ενώ η μέση τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης των κλήσεων είναι μ^{-1} = 1 sec και για τις δύο υπηρεσίες. Η απαίτηση σε εύρος ζώνης των δύο κατηγοριών είναι $b_1 = x$ και $b_2 = y$ μονάδες εύρους ζώνης. Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται το σύνολο των δυνατών καταστάσεων ***Ω*** του συστήματος (n_1, n_2 ο αριθμός των κλήσεων της υπηρεσίας 1, 2, αντιστοίχως).



Σχήμα 4: Σύνολο δυνατών καταστάσεων ***Ω***

α) Βάσει του σχήματος, ποια είναι η πολιτική διάθεσης του εύρους ζώνης και ποιες οι τιμές των b_1, b_2;

β) Να υπολογισθεί η πιθανότητα όλες οι μονάδες εύρους ζώνης της ζεύξης να είναι ελεύθερες.

γ) Να υπολογισθεί η πιθανότητα τουλάχιστον μία μονάδα εύρους ζώνης της ζεύξης να είναι κατειλημμένη.

δ) Να υπολογισθεί η πιθανότητα απώλειας των κλήσεων της 1ης και της 2ης κατηγορίας.

ε) Αν ο ρυθμός εξυπηρέτησης των κλήσεων μειωθεί στο μισό, να δικαιολογήσετε τι θα συμβεί στην πιθανότητα απώλειας των κλήσεων των δύο κατηγοριών, χωρίς να κάνετε πράξεις.

στ) Πως μπορούμε να εξισορροπήσουμε τις απώλειες των δύο υπηρεσιών;

Λύση

α) Στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική πλήρους διάθεσης (complete sharing policy) του εύρους ζώνης του συστήματος, ενώ οι τιμές των b_1, b_2 είναι οι εξής: $b_1 = 1$ και $b_2 = 2$.

β) Από τον αναδρομικό τύπο των Kaufman-Roberts υπολογίζουμε αρχικά όλες τις μη-κανονικοποιημένες τιμές των $q(j)$, για $j = 0, \ldots, 6$.

Γνωρίζουμε ότι: $\alpha_1 = \lambda_1/\mu_1 = 2.0$ erl και $\alpha_2 = \lambda_2/\mu_2 = 0.2$ erl

Έχουμε:

$q(0) = 1.0$

$1q(1) = \alpha_1 b_1 q(1\text{-}b_1) + \alpha_2 b_2 q(1\text{-}b_2) = 2q(0) + 0.4q(-1) = 2 \rightarrow q(1) = 2.0$

$2q(2) = \alpha_1 b_1 q(2\text{-}b_1) + \alpha_2 b_2 q(2\text{-}b_2) = 2q(1) + 0.4q(0) = 4.4 \rightarrow q(2) = 2.2$

$3q(3) = \alpha_1 b_1 q(3\text{-}b_1) + \alpha_2 b_2 q(3\text{-}b_2) = 2q(2) + 0.4q(1) = 5.2 \rightarrow q(3) = 1.73333$

$4q(4) = \alpha_1 b_1 q(4\text{-}b_1) + \alpha_2 b_2 q(4\text{-}b_2) = 2q(3) + 0.4q(2) = 4.34666 \rightarrow q(4) = 1.08667$

$5q(5) = \alpha_1 b_1 q(5\text{-}b_1) + \alpha_2 b_2 q(5\text{-}b_2) = 2q(4) + 0.4q(3) = 2.86667 \rightarrow q(5) = 0.57333$

$6q(6) = \alpha_1 b_1 q(6\text{-}b_1) + \alpha_2 b_2 q(6\text{-}b_2) = 2q(5) + 0.4q(4) = 1.581328 \rightarrow q(6) = 0.26355$

$G = \sum_{j=0}^{C} q(j) = 8.85688$ (σταθερά κανονικοποίησης)

Επομένως, η πιθανότητα όλες οι μονάδες εύρους ζώνης της ζεύξης να είναι ελεύθερες ισούται με την πιθανότητα το σύστημα να είναι άδειο, δηλαδή: $\frac{q(0)}{G} = \frac{1.0}{8.85688} = 0.1129$.

γ) Η πιθανότητα τουλάχιστον μία μονάδα εύρους ζώνης της ζεύξης να είναι κατειλημμένη ισούται με: $1 - \frac{q(0)}{G} = 0.8871$.

δ)

$$P_{b_1} = \sum_{j=C-b_1+1}^{C} \frac{q(j)}{G} = \frac{q(6)}{G} = 0.02976$$

$$P_{b_2} = \sum_{j=C-b_2+1}^{C} \frac{q(j)}{G} = \frac{q(5)+q(6)}{G} = 0.09449$$

ε) Μείωση του ρυθμού εξυπηρέτησης συνεπάγεται αύξηση του χρόνου εξυπηρέτησης των κλήσεων, άρα αύξηση του φορτίου κίνησης. Επομένως, η πιθανότητα απώλειας κλήσεων θα αυξηθεί τόσο για τις κλήσεις της 1ης όσο και της 2ης κατηγορίας.

στ) Εξισορρόπηση των απωλειών επιτυγχάνουμε αν εφαρμόσουμε στο σύστημα την πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης με παραμέτρους $t_1 = 1$ και $t_2 = 0$.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού ΕκδόσεωνΈργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Ιωάννης Μοσχολιός. «Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης, Ασκήσεις για τις ενότητες 7 – 8: Πολυδιάστατη Κίνηση – Αναδρομικός τύπος Kaufman-Roberts». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE772/ .

Σημείωμα Αδειοδότησης

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό δεν κάνει χρήση εικόνων/σχημάτων/διαγραμμάτων/φωτογραφιών ή πινάκων από έργα τρίτων:

Πηγές:

[1] Μ. Λογοθέτης, *Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως και Εφαρμογές*, 2η έκδοση, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2012.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «***Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα* Πανεπιστημίου Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.