



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

---

## Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης

**Ενότητα:** Ασκήσεις για τις ενότητες 11 – 13 (Συστήματα υπερροής – Εναλλακτική δρομολόγηση - Προσομοίωση)

Ιωάννης Μοσχολιός

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

---

**ΑΝΟΙΚΤΑ** ακαδημαϊκά μαθήματα **ΠΠ**



## Περιεχόμενα

1. Σκοποί ενότητας .....	5
2. Περιεχόμενα ενότητας.....	5
3. Ασκήσεις για τις Ενότητες 11-13: (Συστήματα υπερροής – Εναλλακτική δρομολόγηση – Προσομοίωση).....	7



## **1. Σκοποί ενότητας**

Ο βασικός σκοπός αυτής της ενότητας είναι η παρουσίαση ασκήσεων για την κατανόηση της ύλης των ενότητων 11 ως και 13 της θεωρίας του μαθήματος Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης. Οι ασκήσεις που παρουσιάζονται καλύπτουν όλο το φάσμα της αντίστοιχης ύλης της θεωρίας, ενώ κάθε άσκηση συνοδεύεται από λεπτομερή περιγραφή της διαδικασίας επίλυσης.

## **2. Περιεχόμενα ενότητας**

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται ασκήσεις, καθώς και οι λύσεις τους, για την κατανόηση: 1) των συστημάτων υπερροής, 2) της θεωρίας ισοδύναμης τυχαίας κίνησης, 3) της εναλλακτικής δρομολόγησης και 4) βασικών θεμάτων προσομοίωσης.



### 3. Ασκήσεις για τις Ενότητες 11-13: (Συστήματα υπερροής – Εναλλακτική δρομολόγηση – Προσομοίωση)

#### Άσκηση 1

Τα προσφερόμενα φορτία κίνησης των 7.2, 4.5 και 5.7 erl επί των ζεύξεων με χωρητικότητες 9, 5 και 6 trunks, αντιστοίχως, υπερρέουν επί κοινής ζεύξης. Να σχεδιασθεί η χωρητικότητα της κοινής ζεύξης για GoS = 1%, με βάση την μέθοδο ERT. Ποια θα ήταν η χωρητικότητα της κοινής αυτής ζεύξης βάσει του τύπου Erlang B;

Υπόδειξη: Για υπολογισμούς με βάση τον τύπο Erlang B, βρείτε λογισμικό μέσω Διαδικτύου.

#### Λύση

##### ZΕΥΞΗ 1

$$E_9(7.2) = 0.132$$

Wilkinson:  $b_1 = 7.2 * 0.132 = 0.95 \text{ erl}$

$$v_1 = 0.95 * (1 - 0.95 + 7.2/(9 + 1 - 7.2 + 0.95)) = 1.87 \text{ erl}$$

##### ZΕΥΞΗ 2

$$E_5(4.5) = 0.243$$

Wilkinson:  $b_2 = 4.5 * 0.243 = 1.09 \text{ erl}$

$$v_2 = 1.09 * (1 - 1.09 + 4.5/(5 + 1 - 4.5 + 1.09)) = 1.80 \text{ erl}$$

##### ZΕΥΞΗ 3

$$E_6(5.7) = 0.244$$

Wilkinson:  $b_3 = 5.7 * 0.244 = 1.39 \text{ erl}$

$$v_3 = 1.39 * (1 - 1.39 + 5.7/(6 + 1 - 5.7 + 1.39)) = 2.40 \text{ erl}$$

##### ΚΟΙΝΗ ΖΕΥΞΗ

$$\alpha = 0.95 + 1.09 + 1.39 = 3.43 \text{ erl}$$

$$v = 1.87 + 1.80 + 2.40 = 6.07 \text{ erl}$$

Rapp: Με  $z = v / \alpha = 1.77$  βρίσκουμε:

$$\alpha^* = 6.07 + 3 * 1.77 * (1.77 - 1) = 10.15 \text{ erl}$$

$$s^* = 10.16 * (3.43 + 1.77) / (3.43 + 1.77 - 1) - 3.43 - 1 = 8.13 \approx 8$$

Άρα, για να έχουμε απώλειες 1%, για κίνηση  $\alpha^* = 10.15 \text{ erl}$  απαιτούνται συνολικά 18 trunks, εκ των οποίων το 8 είναι φανταστικό και τα υπόλοιπα **10 πραγματικά**.

Αν βασιστούμε στον τύπο Erlang B, για GoS = 1% και προσφερόμενο φορτίο κίνησης 3.43 erl (τυχαία κίνηση), θα βρούμε **9 trunks** (1 λιγότερο).

## Άσκηση 2

Στο παράδειγμα 8.4 του βιβλίου "Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως και Εφαρμογές" (εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα 2012), αναφέρεται ότι η τιμή ATC = 0.83 erl αντιστοιχεί στο αμερικανικό ή ιαπωνικό σύστημα PCM των 24 καναλιών για GoS = 1%. Να βρεθεί η αντίστοιχη τιμή ATC (Additional Trunk Capacity) για το Ευρωπαϊκό σύστημα PCM (με 30 κανάλια χρηστών).

(Υπόδειξη:  $E_{31}(a+\Delta a) = E_{30}(a) = 0.01$ ,  $ATC = \Delta a$ ).

## Λύση

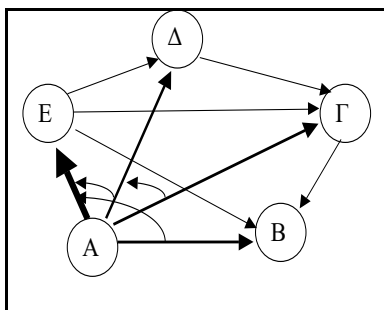
$$E_{30}(a) = 0.01 \Rightarrow a = 20.33 \text{ erl}$$

$$E_{31}(a) = 0.01 \Rightarrow a = 21.19 \text{ erl}$$

$$\text{Άρα } ATC = \Delta a = 21.19 - 20.33 = 0.86 \text{ erl.}$$

## Άσκηση 3

Έστω ένα τηλεφωνικό δίκτυο με πέντε κόμβους (κέντρα) Α, Β, Γ, Δ και Ε. Το κατωτέρω σχήμα απεικονίζει τον τρόπο διεκπεραίωσης της κίνησης από το κέντρο Α προς τα υπόλοιπα κέντρα. Πρόκειται για ένα σχέδιο εναλλακτικής δρομολόγησης της κίνησης (δίκτυο υπερροής) με τελική οδό μέσω του κόμβου Ε. Ο πίνακας παραπλεύρως του σχήματος δίνει την τυχαία κίνηση που προέρχεται από τον κόμβο Α και προορίζεται για τα υπόλοιπα κέντρα.



ΔΕΣΜΗ	ΕΙΔΟΣ	ΚΙΝΗΣΗ (erl)	ΧΩΡΗΤ. (trunks)
ΑΒ		8.5	5
ΑΓ		9.0	10
ΑΔ		5.5	4
ΑΕ		12	?



α) Πως χαρακτηρίζεται η κάθε ζεύξη (τι είδος είναι); Γράψτε 1 για την πρωτεύουσα ζεύξη υψηλής εκμετάλλευσης, 2 για την ενδιάμεση ζεύξη υψηλής εκμετάλλευσης και 3 για την ζεύξη τελικής διόδευσης.

β) Να βρεθεί η χωρητικότητα (σε trunks) της ζεύξεως ΑΕ, κατά τον οικονομικώτερο τρόπο, αν θέλουμε η πιθανότητα απωλείας κλήσεως να μη υπερβαίνει το 1%.

### Λύση

α)

ΔΕΣΜΗ	ΕΙΔΟΣ	ΚΙΝΗΣΗ (erl)	ΧΩΡΗΤ. (trunks)
ΑΒ	1	8.5	5
ΑΓ	1	9.0	10
ΑΔ	2	5.5	4
ΑΕ	3	12	?

β)

#### ΖΕΥΞΗ ΑΒ

$$E_5(8.5) = 0.50$$

Wilkinson:  $b_{AB} = 8.5 * 0.5 = 4.25 \text{ erl}$

$$v_{AB} = 4.25 * (1 - 4.25 + 8.5 / (5 + 1 - 8.5 + 4.25)) = 6.83 \text{ erl}$$

#### ΖΕΥΞΗ ΑΓ

$$E_{10}(9.0) = 0.17$$

Wilkinson:  $b_{AG} = 9.0 * 0.17 = 1.53 \text{ erl}$

$$v_{AG} = 1.53 * (1 - 1.53 + 9.0 / (10 + 1 - 9.0 + 1.53)) = 3.09 \text{ erl}$$

#### ΖΕΥΞΗ ΑΔ

$$b'_{AD} = 5.5 + 1.53 = 7.03 \text{ erl}$$

$$v'_{AD} = 5.5 + 3.09 = 8.59 \text{ erl}$$

Rapp: Με  $z = v'_{AD} / b'_{AD} = 1.222$  βρίσκουμε:

$$\alpha^*_{AD} = 8.59 + 3 * 1.222 * (1.222 - 1) = 9.4 \text{ erl}$$

$$s^*_{AD} = 9.4 * (7.03 + 1.222) / (7.03 + 1.222 - 1) - 7.03 - 1 = 2.7 \approx 3$$

$$s_{AD} = s + s^*_{AD} = 4 + 3 = 7 \text{ trunks}$$

$$E_7(9.4) = 0.38$$

Wilkinson:  $b_{A\Delta} = 9.4 * 0.38 = 3.57 \text{ erl}$

$$v_{A\Delta} = 3.572 * (1 - 3.572 + 9.4/(7 + 1 - 9.4 + 3.572)) = 6.27 \text{ erl}$$

### ZEYΞH AE

$$\alpha_{AE} = 12 + 4.25 + 3.57 = 19.82 \text{ erl}$$

$$v_{AE} = 12 + 6.83 + 6.27 = 25.10 \text{ erl}$$

Rapp: Με  $z = v_{AE} / \alpha_{AE} = 1.27$  βρίσκουμε:

$$\alpha_{AE}^* = 25.10 + 3 * 1.27 * (1.27 - 1) = 26.11 \text{ erl}$$

$$s_{AE}^* = 26.11 * (19.82 + 1.27) / (19.82 + 1.27 - 1) - 19.82 - 1 = 6.6 \approx 7$$

Άρα, για να έχουμε απώλειες 1%, για κίνηση  $\alpha_{AE}^* = 26.11 \text{ erl}$  απαιτούνται συνολικά 37 trunks, εκ των οποίων το 7 είναι φανταστικό και τα υπόλοιπα **30 πραγματικά**.

ΔΕΣΜΗ	ΕΙΔΟΣ	ΚΙΝΗΣΗ ( erl )	ΧΩΡΗΤ. (trunks)
AB	1	8.5	5
AΓ	1	9.0	10
AΔ	2	5.5	4
AE	3	12	30

### Άσκηση 4

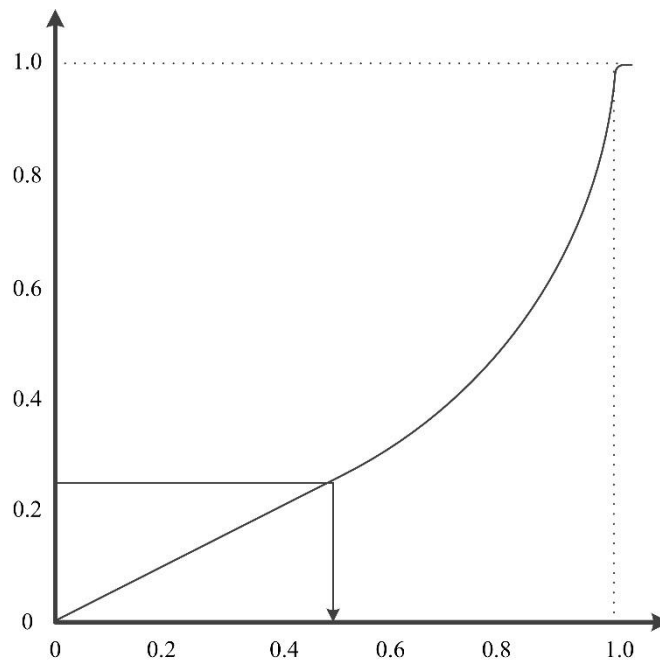
Χρησιμοποιώντας τυχαίους αριθμούς ομοιόμορφα κατανομημένους στο διάστημα (0,1), να παραχθούν τυχαίοι αριθμοί με πυκνότητα πιθανότητας,  $f(x) = 2x$  όταν το  $x$  ανήκει στο διάστημα [0,1] και  $f(x) = 0$ , για  $x$  εκτός του διαστήματος αυτού.

### Λύση

Αν  $Y$  είναι οι ομοιόμορφα κατανομημένοι θετικοί αριθμοί, τότε ο ζητούμενος τυχαίος αριθμός  $X$  παράγεται από την σχέση  $X = F^{-1}(Y)$  όπου  $F(x)$  είναι η συνάρτηση κατανομής της πιθανότητας και δίνεται από την σχέση:

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x f(\xi) d\xi = \int_0^x 2\xi d\xi = \left[ \xi^2 \right]_0^x = x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Αφού λοιπόν  $F(x) = x^2 \Rightarrow Y = x^2 \Rightarrow X = F^{-1}(Y) = \sqrt{Y}$



### Άσκηση 5

Να παραχθούν τυχαίοι αριθμοί με κατανομή Poisson και μέση τιμή 2.

### Λύση

Για να δημιουργήσουμε τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέση τιμή 2,

$$P(X=x) = (2^x/x!)e^{-2}, x=0, 1, 2, \dots$$

κατά το παράδειγμα 10.3 του βιβλίου "Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως και Εφαρμογές" (εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα 2012), θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση κατανομής (PDF), η

οποία είναι η  $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{r=0}^x P(X=r)$  και θα δημιουργήσουμε τον ακόλουθο πίνακα:

<b>x</b>	<b>P(X=x)</b>	<b>F(x)=P(X≤x)</b>
0	0.135335	0.135335
1	0.270670	0.406005
2	0.270670	0.676675
3	0.180446	0.857121
4	0.090223	0.947344
5	0.036089	0.983433
6	0.012029	0.995462
7	0.003437	0.998899
8	0.000859	0.999758
9	0.000190	0.999949
10	0.000038	0.999987

Ακολουθώς θα δημιουργήσουμε τυχαίους αριθμούς που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0, 1). Αν ο τυχαίος αριθμός ανήκει στο διάστημα (0, 0.135335), ο αντίστοιχος ακέραιος είναι ο 0, αν ανήκει στο (0.135335, 0.406005) ο αντίστοιχος ακέραιος είναι ο 1, αν ανήκει στο (0.406005, 0.676675) ο 2, ..., αν ανήκει στο (0.999949, 0.999987) ο 10, και αν ανήκει στο (0.999987, 1.) ο αντίστοιχος ακέραιος είναι μεγαλύτερος του 10. Έτσι λαμβάνουμε ακεραίους αριθμούς, κατανομής Poisson με μέση τιμή 2.

## Άσκηση 6

Σε ένα σύστημα αναμονής ο ρυθμός άφιξης των κλήσεων είναι, κατά μέσον όρο, 24 κλήσεις την ώρα. Από προσομοίωση της κίνησης στον Η/Υ, ελήφθησαν οι μετρήσεις, που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα, σε 10 χρονικά διαστήματα, για το μέσο μήκος της σχηματιζόμενης ουράς αναμονής. Τα δύο πρώτα διαστήματα εκτιμάται ότι εκφράζουν την μεταβατική κατάσταση του συστήματος (stabilization time).

- 1) Να βρεθεί το διάστημα εμπιστοσύνης στο οποίο ευρίσκεται το μήκος της ουράς αναμονής, κατά μέσον όρο, με πιθανότητα λάθους 5%, εφαρμόζοντας την μέθοδο της μέσης τιμής των υποσυνόλων (Batch Mean Method).
- 2) Αν η μέση τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης των κλήσεων είναι 5 min, να βρεθεί ο μέσος χρόνος αναμονής των κλήσεων στην ουρά, καθώς και ο μέσος χρόνος παραμονής των κλήσεων στο σύστημα.
- 3) Είναι ικανοποιητικός ο αριθμός των διαστημάτων μέτρησης; Πότε θεωρείται ικανοποιητικός;
- 4) Πότε είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε αντί της μεθόδου της μέσης τιμής των υποσυνόλων, την μέθοδο των επαναλήψεων;

Χρονικό Διάστημα	Μέσον μήκος ουράς
1	0.5098
2	3.5932
3	2.6066
4	2.1960
5	2.6180
6	3.0105
7	1.9609
8	2.4882
9	2.5795
10	3.2253

### Λύση

1) Αφού τα δύο πρώτα χρονικά διαστήματα ανήκουν στην μεταβατική κατάσταση κατά την προσομοίωση του συστήματος, εξαιρούνται από τις μετρήσεις. Άρα  $N = 8$  και έτσι υπολογίζουμε την μέση τιμή των μετρήσεων:

$$\bar{X} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 X_i = \frac{20.685}{8} = 2.586$$

Άρα το διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή των μετρήσεων θα είναι:

$$\left. \begin{array}{l} \mu_{\alpha}^+ \\ \mu_{\alpha}^- \end{array} \right\} = 2.586 \pm \frac{\sigma}{\sqrt{8}} u_{\alpha/2}$$

όπου  $\sigma$  είναι η τυπική απόκλιση των μετρήσεων και θα υπολογισθεί από την διασπορά:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^8 (X_i - 2.586)^2 =$$

$$= (0.00042436 + 0.1521 + 0.001024 + 0.18020025 + 0.39075001 + 0.00956484 + 0.00004225 + 0.40870449) / 7 = 0.1632586$$

Άρα  $\sigma = 0.404$  (τετραγωνική ρίζα του 0.1632586).

$u_{\alpha/2}$  είναι η τιμή της κανονικής κατανομής για την οποία:  $P\{X > u_{\alpha/2}\} = \alpha/2$ . Επειδή όμως χρησιμοποιούμε την διασπορά του δείγματος, θα χρησιμοποιήσουμε την αντίστοιχη τιμή της κατανομής  $t$  (Student).

Για  $\alpha=5\%$ , από πίνακα τιμών της κατανομής  $t$  για  $7 (= 8-1)$  βαθμούς ελευθερίας παίρνουμε ότι  $t_{0.05/2} = 2.365$ .

$$\text{Άρα } \left. \begin{array}{l} \mu_{\alpha}^{+} \\ \mu_{\alpha}^{-} \end{array} \right\} = 2.586 \pm \frac{0.404}{\sqrt{8}} 2.365 = 2.586 \pm 0.3378$$

Δηλαδή το διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο μήκος της ουράς αναμονής είναι το  $[2.248, 2.923]$ .

2) Ο μέσος χρόνος παραμονής των κλήσεων στην ουρά αναμονής είναι περίπου

$$W = L / \lambda = 2.586 / 24 = 0.10775 \text{ hours} = 6.465 \text{ min} \approx \mathbf{6.5 \text{ min.}}$$

Ο μέσος χρόνος παραμονής των κλήσεων στο σύστημα είναι περίπου  $T = w + h \approx 6,5 + 5 \text{ min} = \mathbf{11.5 \text{ min.}}$

3) Ο αριθμός των διαστημάτων μέτρησης θεωρείται ικανοποιητικός όταν το διάστημα εμπιστοσύνης είναι αρκετά «στενό». Στην προκειμένη περίπτωση το διάστημα εμπιστοσύνης είναι αρκετά ικανοποιητικό, αλλά θα μπορούσε να εκτιμηθεί σε συνολικό εύρος διαστήματος εμπιστοσύνης μικρότερο του 0.5.

4) Η μέθοδος της μέσης τιμής των υποσυνόλων μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν έχουμε στην διάθεσή μας βιβλιοθήκη παραγωγής ψευδο-τυχαίων αριθμών μεγάλης περιόδου. Διαφορετικά πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των επαναλήψεων.

## Άσκηση 7

Να προσομοιώσετε το σύστημα  $M/M/2$  στον  $H/Y$  με την μέθοδο της Μαρκοβιανής αλυσίδας (μέθοδος ρουλέτας) για φορτίο κίνησης  $\alpha = 1 \text{ erl}$ . Η προσομοίωση να γίνει για ακολουθία 16 τυχαίους αριθμούς με ομοιόμορφη κατανομή που θα δημιουργήσετε με την πολλαπλασιαστική μέθοδο του υπολοίπου ( $x_n = k x_{n-1} \pmod{M}$ ) με δικό σας "seed number", αλλά επιλέγοντας τις παραμέτρους έτσι ώστε να έχουμε μέγιστη περίοδο επανάληψης των ψευδοτυχαίων αριθμών ακριβώς 16 αριθμούς. Με βάση την προσομοίωση να υπολογίσετε την πιθανότητα απώλειας κλήσεως και να την συγκρίνετε με την τιμή 20% που προκύπτει από την Erlang B formula. Σημειώστε ότι η μέθοδος της ρουλέτας δεν χρησιμοποιείται σε μικρά συστήματα, παρά μόνον χάριν ασκήσεως.

*Υπόδειξη:* Δεν ζητείται κώδικας λογισμικού, παρά μόνον σε πίνακες, η δομή των δεδομένων και τα αποτελέσματα της προσομοίωσης, βήμα προς βήμα.

## Λύση

Με βάση το Κεφάλαιο 10 του βιβλίου "Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως και Εφαρμογές" (εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα 2012), έστω  $x_0=1 \pmod{2} \Rightarrow x_0 = 2n + 1, n=0, 1, 2, \dots$ , οπότε έστω  $x_0 = 3$ . Αποφεύγουμε την επιλογή  $x_0 = 1$ , διότι ουσιαστικά επιλέγουμε seed number, και θέλουμε οι διαδοχικοί seed numbers που θα επιλεγούν να μη διαιρούνται μεταξύ τους. Σημειωτέον:  $a \equiv b \pmod{n}$ , σημαίνει ότι η διαφορά  $a - b$  είναι πολλαπλάσια του  $n$ .

Θέλουμε 16 (ψευδο)τυχαίους αριθμούς. Αφού  $16 = 2^4$ , θα πάρουμε  $M = 2^6 = 64$ .

Επίσης, θέλουμε  $k = \pm 3 \pmod{8} \Rightarrow k = 8n \pm 3, n=0, 1, 2, \dots$ , οπότε έστω  $k=3$ .

Δηλ. βάσει της σχέσεως  $x_n = 3 x_{n-1} \pmod{64}$ , θα λάβουμε την ακολουθία των ψευδοτυχαίων αριθμών R της 1ης στήλης, την οποία διαιρώντας διά 64 την μεταθέτουμε στο διάστημα (0,1) (2η στήλη) :

A/A	R	(0, 1)	P <sub>a</sub>	P <sub>b</sub>	Κλήση	Trunks	Εξυπηρέτηση
1	3	0.047	1	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
2	9	0.141	0.50	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
3	27	0.422	0.67	0.34	Άφιξη	(1 1)	ΟΧΙ
4	17	0.266	0.67	0.34	Άφιξη	(1 1)	ΟΧΙ
5	51	0.797	0.67	0.34	Τερματισμός	(1 0)	
6	25	0.391	0.50	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
7	11	0.172	0.67	0.34	Άφιξη	(1 1)	ΟΧΙ
8	33	0.516	0.67	0.34	Άφιξη	(1 1)	ΟΧΙ
9	35	0.547	0.67	0.34	Άφιξη	(1 1)	ΟΧΙ
10	41	0.641	0.67	0.34	Άφιξη	(1 1)	ΟΧΙ
11	59	0.922	0.67	0.34	Τερματισμός	(1 0)	
12	49	0.766	0.50	0.50	Τερματισμός	(0 0)	
13	19	0.297	1	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
14	57	0.891	0.50	0.50	Τερματισμός	(0 0)	
15	43	0.672	1	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
16	1	0.016	0.50	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
17	3	0.047					

Αφού το σύστημα έχει χωρητικότητα 2 trunks, θα χρησιμοποιήσουμε στον H/Y ένα διάνυσμα 2 θέσεων με αρχικές τιμές (0 0) που σημαίνει ότι το σύστημα αρχικώς είναι κενό. Το διάνυσμα αυτό δείχνεται στην 5η στήλη του ανωτέρω πίνακα.

Ακολουθως, θα αλλάζουμε τις τιμές από 0 σε 1 για να δείχνουμε κατάληψη ελεύθερου trunk λόγω άφιξης κλήσεως (πιθανότητα  $P_a = a/(a+n)$ ), ή από 1 σε 0 για να δείχνουμε απελευθέρωση κατειλημμένου trunk λόγω τερματισμού κλήσεως (πιθανότητα  $P_b = n/(a+n)$ ).

Άφιξη κλήσεως θα έχουμε όταν ο τυχαίος αριθμός Y είναι:  $0 < Y < a / (a + n)$ .

Τερματισμό κλήσεως θα έχουμε όταν ο τυχαίος αριθμός Y είναι:  $a / (a + n) < Y < 1$ .

όπου:  $n = 0, 1, 2$ , και  $a = 1$ .

Αρχικά έχουμε πάντα άφιξη κλήσεως, αφού  $P_a = 1$  και  $P_b = 0$ .

Υπολογισμός της πιθανότητας απωλείας κλήσεως, B1:

Στον ανωτέρω πίνακα έχουμε καταγράψει 12 αφίξεις κλήσεων και 7 απώλειες (OXI).

Άρα  $B1 = 7/12$ .

Αν μάλιστα θεωρήσουμε ότι η πρώτη γραμμή του πίνακα αυτού εκφράζει μεταβατική κατάσταση, τότε

Άρα  $B1 = 7/11 \approx 64\%$ .

Επαναλαμβάνουμε την προσομοίωση με νέο seed number, π.χ.  $x_0 = 5$ .

A/A	R	(0, 1)	$P_a$	$P_b$	Κλήση	Trunks	Εξυπηρέτηση
1	5	0.078	1	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
2	15	0.234	0.50	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
3	45	0.703	0.67	0.34	Τερματισμός	(1 0)	
4	7	0.109	0.50	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
5	21	0.328	0.67	0.34	Άφιξη	(1 1)	ΟΧΙ
6	63	0.984	0.67	0.34	Τερματισμός	(1 0)	
7	61	0.953	0.50	0.50	Τερματισμός	(0 0)	
8	55	0.859	1	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
9	37	0.578	0.50	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
10	47	0.734	0.67	0.34	Τερματισμός	(1 0)	
11	13	0.203	0.50	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
12	39	0.609	0.67	0.34	Άφιξη	(1 1)	ΟΧΙ
13	53	0.828	0.67	0.34	Τερματισμός	(1 0)	
14	31	0.484	0.50	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
15	29	0.453	0.67	0.34	Άφιξη	(1 1)	ΟΧΙ
16	23	0.359	0.67	0.34	Άφιξη	(1 1)	ΟΧΙ
17	5	0.078					

Υπολογισμός της πιθανότητας απωλείας κλήσεως, B2:

Στον ανωτέρω πίνακα έχουμε καταγράψει 11 αφίξεις κλήσεων και 4 απώλειες (OXI).

Άρα  $B2 = 4/11$ .



Αν η πρώτη γραμμή του πίνακα αυτού εκφράζει μεταβατική κατάσταση του συστήματος, τότε

$$\text{Άρα } B2 = 4/10 \approx 40\%.$$

Επαναλαμβάνουμε την προσομοίωση με νέο seed number, τον  $x_0 = 15$ . Αξίζει να παρατηρήσετε ότι όλοι οι seed numbers θα δώσουν ακολουθία ψευδοτυχαίων αριθμών που θα είναι υποσύνολο των τυχαίων αριθμών που ήδη έχουμε λάβει. Άρα δεν θεωρείται αξιόπιστη η ακολουθία. Είναι λοιπόν προφανής η σημαντικότητα των τυχαίων αριθμών στην προσομοίωση.

Υπολογισμός της πιθανότητας απωλείας κλήσεως, B3:

Στον κατωτέρω πίνακα έχουμε καταγράψει 11 αφίξεις κλήσεων και 4 απώλειες.

$$\text{Άρα } B3 = 4/11.$$

Αν η 1<sup>η</sup> γραμμή του πίνακα αυτού εκφράζει μεταβατική κατάσταση του συστήματος, τότε

$$\text{Άρα } B3 = 4/10 \approx 40\%.$$

A/A	R	(0, 1)	P <sub>a</sub>	P <sub>b</sub>	Κλήση	Trunks	Εξυπηρέτηση
1	15	0.234	1	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
2	45	0.703	0.50	0.50	Τερματισμός	(0 0)	
3	7	0.109	1	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
4	21	0.328	0.50	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
5	63	0.984	0.67	0.34	Τερματισμός	(1 0)	
6	61	0.953	0.50	0.54	Τερματισμός	(0 0)	
7	55	0.859	1	0	Άφιξη	(1 0)	ΝΑΙ
8	37	0.578	0.50	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
9	47	0.734	0.67	0.34	Τερματισμός	(1 0)	
10	13	0.203	0.50	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
11	39	0.609	0.67	0.34	Άφιξη	(1 1)	ΟΧΙ
12	53	0.828	0.67	0.34	Τερματισμός	(1 0)	
13	31	0.484	0.50	0.50	Άφιξη	(1 1)	ΝΑΙ
14	29	0.453	0.67	0.34	Άφιξη	(1 1)	ΟΧΙ
15	23	0.359	0.67	0.34	Άφιξη	(1 1)	ΟΧΙ
16	5	0.078	0.67	0.34	Άφιξη	(1 1)	ΟΧΙ
17	15	0.234					

Άρα η πιθανότητα απωλείας κλήσεως είναι  $(B1 + B2 + B3) / 3 = 48\% > > 20\%$ .

## Άσκηση 8

Να προσομοιώσετε το σύστημα M/M/2 στον H/Y με την μέθοδο του χρονικού εντοπισμού (αληθούς χρόνου) για φορτίο κίνησης  $\alpha = 1$  erl και μέση τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης των κλήσεων,  $h = 1$  min. Η προσομοίωση να βασιστεί σε ακολουθία ψευδοτυχαίων αριθμών με ομοιόμορφη κατανομή που θα λάβετε από EXCEL spreadsheets (Microsoft Office Suite), χρησιμοποιώντας την συνάρτηση (εντολή) =RAND(). Από τους αριθμούς αυτούς να δημιουργήσετε ψευδοτυχαίους αριθμούς που θα ακολουθούν την (αρνητική) εκθετική κατανομή που θα χρειασθείτε - μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την απλή σχέση του παραδείγματος 10.2 του βιβλίου "Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως και Εφαρμογές" (εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα 2012)". Με βάση την προσομοίωση να υπολογίσετε την πιθανότητα απωλείας κλήσεως και να την συγκρίνετε με την τιμή 20% που προκύπτει από την Erlang B formula. Δεδομένου ότι οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί του EXCEL έχουν μεγάλη περίοδο, οι μετρήσεις της πιθανότητας απωλείας κλήσεως να γίνουν με βάση την μέθοδο της μέσης τιμής υποσυνόλων (Batch Mean Method), για 7 χρονικά διαστήματα των 15 min πραγματικού χρόνου λειτουργίας του συστήματος, συνολικά. Δώστε το αποτέλεσμα σε διάστημα εμπιστοσύνης 5% και σχολιάστε το.

Υπόδειξη: Δεν ζητείται κώδικας λογισμικού, παρά μόνον σε πίνακες, η δομή των δεδομένων και τα αποτελέσματα της προσομοίωσης, βήμα προς βήμα. Για να μην αλλάζουν συνεχώς οι τυχαίοι αριθμοί στο EXCEL, κάνετε copy - paste special (value).

## Λύση

Αφού ο ρυθμός αφίξεως των κλήσεων είναι  $\lambda = \alpha/h = 1$  κλήση ανά λεπτό της ώρας, για να καλύψουμε χρόνο  $15 \cdot 7 = 105$  min, θα χρειαστούμε περίπου 105 τυχαίους αριθμούς εκθετικής κατανομής (για να εκφράσουμε τις στιγμές αφίξεως των κλήσεων) και επιπλέον, άλλους 105 για να εκφράσουμε την χρονική στιγμή της αναχώρησης κάθε κλήσεως από το σύστημα.

Με την βοήθεια του Microsoft EXCEL, παίρνουμε τους αριθμούς εκθετικής κατανομής του Πίνακα 1. (Τα χρονικά διαστήματα μεταξύ διαδοχικών αφίξεων και αναχωρήσεων έχουν μέση τιμή 1 min, αφού  $1/\lambda = 1 \text{ h} = 1 \text{ min.}$ )

Από τον τυχαίο αριθμό  $Y = \text{RAND}()$  (ομοιόμορφης κατανομής στο διάστημα (0,1)) του EXCEL, δημιουργούμε τον  $X = -\ln(1-Y)$  που είναι αριθμός εκθετικής κατανομής (π.χ.  $Y=0.563006804$ ,  $X=0.827837653$ ). Ο πρώτος αριθμός δηλώνει την χρονική στιγμή (min) της άφιξης της 1ης κλήσεως στο σύστημα μετά την χρονική στιγμή  $t = 0$ . Ο δεύτερος αριθμός για να δηλώνει την χρονική στιγμή της άφιξης της 2ης κλήσεως, θα πρέπει να προστεθεί στον πρώτο αριθμό. Ο τρίτος αριθμός θα πρέπει να προστεθεί στο άθροισμα των 2 πρώτων, ώστε να μας δώσει την χρονική στιγμή άφιξης της 3ης κλήσεως, κ.ο.κ. Έτσι στον Πίνακα 1, οι τρεις πρώτοι αριθμοί, 0.827837653, 3.177249522 και 3.323410898 προέκυψαν από τους τυχαίους αριθμούς: 0.827837653, 2.349411869 και 0.146161376. Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε τις αναχωρήσεις.

Το 1ο διάστημα επεξεργασίας των τυχαίων αριθμών θα είναι από 0 - 15 min. Στο διάστημα αυτό βλέπουμε από τον Πίνακα 1 ότι έχουμε 12 αριθμούς τους οποίους τους τοποθετούμε για ευκολία στον Πίνακα 1.1. Η επεξεργασία/προσομοίωση γίνεται στον Πίνακα 1.2. Αρχικά το σύστημα είναι άδειο: κατάσταση (0 0). Με την άφιξη της 1ης κλήσης η κατάσταση του συστήματος γίνεται (1 0) και η κλήση εξυπηρετείται. Ακολούθως πρέπει να ταξινομήσουμε τους χρόνους και να γνωρίζουμε κάθε φορά τι είδους γεγονός έχουμε κάθε χρονική στιγμή (άφιξη ή αναχώρηση κλήσεως;). Αν έχουμε αναχώρηση η κατάσταση του συστήματος από 1 θα γίνει πάλι 0. Απώλεια κλήσεως έχουμε όταν

έχουμε γεγονός άφιξης κλήσεως ενώ το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση (1 1) (πλήρως κατειλημμένο). Σε κάθε Χρονικό Διάστημα (υποτίθεται ότι είναι ικανοποιητικά μεγάλο) μετρούμε την πιθανότητα απωλείας κλήσεως διαιρώντας το αριθμό των χαμένων κλήσεων (ΟΧΙ στην στήλη "Εξυπηρέτηση") με των αριθμό των αφίξεων στο συγκεκριμένο διάστημα.

Πίνακας 1

ΑΦΙΞΗ	ΑΝΑΧΩΡΗΣΗ	ΑΦΙΞΗ	ΑΝΑΧΩΡΗΣΗ	ΑΦΙΞΗ	ΑΝΑΧΩΡΗΣΗ
0.827837653	1.370522414	39.05056232	39.4527322	78.96021976	79.02922556
3.177249522	3.187837738	40.00584063	42.4859837	79.12146204	79.72378969
3.323410898	4.253506619	40.72374106	42.00783626	79.70245322	84.58735697
3.458961436	3.474916427	41.58023487	42.69221605	81.32141894	82.7775365
5.214893988	5.934223343	41.9470134	42.90142672	82.24892798	86.2428715
7.590246221	7.83993088	42.01470781	42.21314676	82.98719386	86.29647543
8.535562949	8.801873603	42.44475768	42.68758459	83.35760932	83.83119866
9.39917141	9.914702654	42.7373964	42.99124818	85.5699075	86.38517508
10.16660597	10.48963158	44.05054494	44.46089066	85.91416396	86.76023799
10.9445173	12.79228152	44.32073924	45.49501765	86.16141923	86.65263942
11.86013116	13.03652918	44.80921578	45.09915651	87.80532971	87.98005325
13.34139243	13.58103347	47.214006	48.45113453	88.55975021	89.94268403
15.13435919	15.31375107	48.0794302	48.10148436	89.08027537	89.0935454
15.65694593	16.27876523	51.12785545	52.00737408	89.51750809	90.09128216
16.68136102	20.48445001	52.27576381	52.88260879	89.92957928	93.01291225
16.8786356	16.99468703	52.62529532	52.76112717	90.19301863	90.90198361
18.09645994	18.86690013	54.51840697	55.39925206	91.80297537	93.16146122
19.02201492	22.03977792	56.45519446	56.60257253	93.82433655	94.91674087
19.25959534	23.22032054	56.46143648	58.34431015	96.90771757	97.09113162
19.39086081	19.72404145	57.17113932	57.66538203	98.59249091	99.68656455
21.29666244	21.80362586	58.52811868	61.9089345	98.92355319	99.43546513
22.08528481	22.78835997	61.65238447	61.69317775	99.36754833	99.39321405
22.25684103	22.51255426	62.13466711	62.43473005	99.58987467	101.9672828
23.24116893	23.8237043	62.24661273	62.92439723	99.78276807	100.6551976
24.53499655	24.6866123	62.76152022	63.14598232	100.6255745	101.6985453
26.18339421	26.47470216	67.54855228	67.89990804	100.8270607	101.0737695

27.89538377	28.41191742	67.82241795	68.0514688	101.8759411	102.0030571
27.95695096	28.7949059	68.75347987	69.16093242	103.9553848	104.4668901
28.04986643	29.97486652	68.8606842	69.51229763	104.4419192	105.6753843
29.93035129	30.87442611	70.84191132	71.16054954	105.2636357	106.0540391
30.09237861	32.45394206	71.49510678	71.53694827		
31.18799306	35.97200032	72.3602338	74.35837355		
33.41658931	34.20755977	72.36647593	73.59496362		
34.17722723	35.14171274	72.57075266	72.58368446		
34.55200481	37.01538644	72.69633525	73.41755592		
37.26621975	37.72788758	78.12224698	78.52965601		

Χρονικό Διάστημα 1: 0 - 15 min.

Πίνακας 1.1

A/A	Αφιξη	Τερματισμός
1	0.827837653	1.370522414
2	3.177249522	3.187837738
3	3.323410898	4.253506619
4	3.458961436	3.474916427
5	5.214893988	5.934223343
6	7.590246221	7.83993088
7	8.535562949	8.801873603
8	9.39917141	9.914702654
9	10.16660597	10.48963158
10	10.9445173	12.79228152
11	11.86013116	13.03652918
12	13.34139243	13.58103347

Πίνακας 1.2

Time Point	System State	Εξυπηρέτηση
0.00000	(0 0)	
0.827838	(1 0)	ΝΑΙ
1.370522	(0 0)	
3.17725	(1 0)	ΝΑΙ
3.187838	(0 0)	
3.323411	(1 0)	ΝΑΙ
3.458961	(1 1)	ΝΑΙ
3.474916	(1 0)	
4.253507	(0 0)	
5.214894	(1 0)	ΝΑΙ
5.934223	(0 0)	
7.590246	(1 0)	ΝΑΙ
7.839931	(0 0)	
8.535563	(1 0)	ΝΑΙ
8.801874	(0 0)	

9.399171	(1 0)	NAI
9.914703	(0 0)	
10.16661	(1 0)	NAI
10.48963	(0 0)	
10.94452	(1 0)	NAI
11.86013	(1 1)	NAI
12.79228	(0 1)	
13.03653	(0 0)	
13.34139	(1 0)	NAI
13.58103	(0 0)	
15.00000	Blocking =	0%

Χρονική Διάστημα 2: 15 - 30 min

Πίνακας 2.1

A/A	Αφιξη	Τερματισμός
1	15.13435919	15.31375107
2	15.65694593	16.27876523
3	16.68136102	20.48445001
4	16.8786356	16.99468703
5	18.09645994	18.86690013
6	19.02201492	22.03977792
7	19.25959534	23.22032054
8	19.39086081	19.72404145
9	21.29666244	21.80362586
10	22.08528481	22.78835997
11	22.25684103	22.51255426
12	23.24116893	23.8237043
13	24.53499655	24.6866123
14	26.18339421	26.47470216
15	27.89538377	28.41191742
16	27.95695096	28.7949059
17	28.04986643	29.97486652
18	29.93035129	30.87442611

Πίνακας 2.2

Time Point	System State	Εξυπηρέτηση
15.00000	(0 0)	
15.13435919	(1 0)	ΝΑΙ
15.31375107	(0 0)	
15.65694593	(1 0)	ΝΑΙ
16.27876523	(0 0)	
16.68136102	(1 0)	ΝΑΙ
16.8786356	(1 1)	ΝΑΙ
16.99468703	(1 0)	
18.09645994	(1 1)	ΝΑΙ
18.86690013	(1 0)	
19.02201492	(1 1)	ΝΑΙ
19.25959534	(1 1)	ΟΧΙ
19.39086081	(1 1)	ΟΧΙ
19.72404145		
20.48445001	(0 1)	
21.29666244	(1 1)	ΝΑΙ
21.80362586	(0 1)	
22.03977792	(0 0)	ΝΑΙ
22.08528481	(1 0)	ΝΑΙ
22.25684103	(1 1)	ΝΑΙ
22.51255426	(1 0)	
22.78835997	(0 0)	
23.22032054		
23.24116893	(1 0)	ΝΑΙ
23.8237043	(0 0)	

24.53499655	(1 0)	NAI
24.6866123	(0 0)	
26.18339421	(1 0)	NAI
26.47470216	(0 0)	
27.89538377	(1 0)	NAI
27.95695096	(1 1)	NAI
28.04986643	(1 1)	OXI
28.41191742	(0 1)	
28.7949059	(0 0)	
29.93035129		
29.97486652	(1 0)	NAI
30.00000	Blocking =	16.667%
30.87442611		

Χρονική Διάστημα 3: 30 - 45 min

Πίνακας 3.1

A/A	Αφιξη	Τερματισμός
1	30.09237861	32.45394206
2	31.18799306	35.97200032
3	33.41658931	34.20755977
4	34.17722723	35.14171274
5	34.55200481	37.01538644
6	37.26621975	37.72788758
7	39.05056232	39.4527322
8	40.00584063	42.4859837
9	40.72374106	42.00783626
10	41.58023487	42.69221605
11	41.9470134	42.90142672
12	42.01470781	42.21314676
13	42.44475768	42.68758459
14	42.7373964	42.99124818
15	44.05054494	44.46089066
16	44.32073924	45.49501765
17	44.80921578	45.09915651

Πίνακας 3.2

Time Point	System State	Εξυπηρέτηση
30.00000	(1 0)	
30.09237861	(1 1)	NAI
30.87442611	(0 1)	
31.18799306	(1 1)	NAI
32.45394206	(1 0)	
33.41658931	(1 1)	NAI
34.17722723	(1 1)	OXI
34.20755977	(1 0)	
34.55200481	(1 1)	NAI
35.14171274		
35.97200032	(0 1)	
37.01538644	(0 0)	
37.26621975	(1 0)	NAI
37.72788758	(0 0)	
39.05056232	(1 0)	NAI
39.4527322	(0 0)	
40.00584063	(1 0)	NAI
40.72374106	(1 1)	NAI
41.58023487	(1 1)	OXI
41.9470134	(1 1)	OXI
42.00783626	(1 0)	
42.01470781	(1 1)	NAI
42.21314676	(1 0)	
42.44475768	(1 1)	NAI
42.4859837	(0 1)	



42.68758459	(0 0)	
42.69221605		
42.7373964	(1 0)	NAI
42.90142672		
42.99124818	(0 0)	
44.05054494	(1 0)	NAI
44.32073924	(1 1)	NAI
44.46089066	(0 1)	
44.80921578	(1 1)	
45.00000	Blocking =	17.647%
45.09915651		
45.49501765		

Χρονική Διάστημα 4: 45 - 60 min

Πίνακας 4.1

Α/Α	Αφιξη	Τερματισμός
1	47.214006	48.45113453
2	48.0794302	48.10148436
3	51.12785545	52.00737408
4	52.27576381	52.88260879
5	52.62529532	52.76112717
6	54.51840697	55.39925206
7	56.45519446	56.60257253
8	56.46143648	58.34431015
9	57.17113932	57.66538203
10	58.52811868	61.9089345

Πίνακας 4.2

Time Points	System State	Εξυπηρέτηση
45.00000	(1 1)	
45.09915651	(0 1)	
45.49501765	(0 0)	
47.214006	(1 0)	NAI
48.0794302	(1 1)	NAI
48.10148436	(1 0)	
48.45113453	(0 0)	
51.12785545	(1 0)	NAI
52.00737408	(0 0)	
52.27576381	(1 0)	NAI
52.62529532	(1 1)	NAI
52.76112717	(1 0)	
52.88260879	(0 0)	
54.51840697	(1 0)	NAI
55.39925206	(0 0)	
56.45519446	(1 0)	NAI
56.46143648	(1 1)	NAI
56.60257253	(0 1)	
57.17113932	(1 1)	NAI
57.66538203	(0 1)	
58.34431015	(0 0)	
58.52811868	(1 0)	NAI
	Blocking=	0%
61.9089345		

Χρονική Διάστημα 5: 60 - 75 min

Πίνακας 5.1

Α/Α	Αφιξη	Τερματισμός
1	61.65238447	61.69317775
2	62.13466711	62.43473005
3	62.24661273	62.92439723
4	62.76152022	63.14598232
5	67.54855228	67.89990804
6	67.82241795	68.0514688
7	68.75347987	69.16093242
8	68.8606842	69.51229763
9	70.84191132	71.16054954
10	71.49510678	71.53694827
11	72.3602338	74.35837355
12	72.36647593	73.59496362
13	72.57075266	72.58368446
14	72.69633525	73.41755592

Πίνακας 5.2

Time Points	System State	Εξυπηρέτηση
60.00000	(1 0)	
61.65238447	(1 1)	NAI
61.69317775	(1 0)	
61.9089345	(0 0)	
62.13466711	(1 0)	NAI
62.24661273	(1 1)	NAI
62.43473005	(0 1)	
62.76152022	(1 1)	NAI
62.92439723	(1 0)	
63.14598232	(0 0)	
67.54855228	(1 0)	NAI
67.82241795	(1 1)	NAI
67.89990804	(0 1)	
68.0514688	(0 0)	
68.75347987	(1 0)	NAI
68.8606842	(1 1)	NAI
69.16093242	(0 1)	
69.51229763	(0 0)	
70.84191132	(1 0)	NAI
71.16054954	(0 0)	
71.49510678	(1 0)	NAI
71.53694827	(0 0)	
72.3602338	(1 0)	NAI
72.36647593	(1 1)	NAI
72.57075266	(1 1)	OXI

72.58368446		
72.69633525	(1 1)	OXI
73.41755592		
73.59496362	(1 0)	
74.35837355	(0 0)	
75.00000	Blocking=	14.286%

Χρονική Διάστημα 6: 75 - 90 min

Πίνακας 6.1

A/A	Αφιξη	Τερματισμός
1	78.12224698	78.52965601
2	78.96021976	79.02922556
3	79.12146204	79.72378969
4	79.70245322	84.58735697
5	81.32141894	82.7775365
6	82.24892798	86.2428715
7	82.98719386	86.29647543
8	83.35760932	83.83119866
9	85.5699075	86.38517508
10	85.91416396	86.76023799
11	86.16141923	86.65263942
12	87.80532971	87.98005325
13	88.55975021	89.94268403
14	89.08027537	89.0935454
15	89.51750809	90.09128216
16	89.92957928	93.01291225

Πίνακας 6.2

Time Points	System State	Εξυπηρέτηση
75.00000	(0 0)	
78.12224698	(1 0)	NAI
78.52965601	(0 0)	
78.96021976	(1 0)	NAI
79.02922556	(0 0)	
79.12146204	(1 0)	NAI
79.70245322	(1 1)	NAI
79.72378969	(0 1)	
81.32141894	(1 1)	NAI
82.24892798	(1 1)	OXI
82.7775365	(0 1)	
82.98719386	(1 1)	NAI
83.35760932	(1 1)	OXI
83.83119866		
84.58735697	(1 0)	
85.5699075	(1 1)	NAI
85.91416396	(1 1)	OXI
86.16141923	(1 1)	OXI
86.2428715		

86.29647543	(0 1)	
86.38517508	(0 0)	
86.65263942		
86.76023799		
87.80532971	(1 0)	NAI
87.98005325	(0 0)	
88.55975021	(1 0)	NAI
89.08027537	(1 1)	NAI
89.0935454	(1 0)	
89.51750809	(1 1)	NAI
89.92957928	(1 1)	OXI
89.94268403	(0 1)	
90.00000	Blocking =	31.25%
90.09128216		
93.01291225		

Χρονική Διάστημα 7: 90 - 105 min

Πίνακας 7.1

Α/Α	Αφιξη	Τερματισμός
1	90.19301863	90.90198361
2	91.80297537	93.16146122
3	93.82433655	94.91674087
4	96.90771757	97.09113162
5	98.59249091	99.68656455
6	98.92355319	99.43546513
7	99.36754833	99.39321405
8	99.58987467	101.9672828
9	99.78276807	100.6551976
10	100.6255745	101.6985453
11	100.8270607	101.0737695
12	101.8759411	102.0030571
13	103.9553848	104.4668901
14	104.4419192	105.6753843

Πίνακας 7.2

Time Points	State space	Εξυπηρέτηση
90.00000	(0 1)	
90.09128216	(0 0)	
90.19301863	(1 0)	NAI
90.90198361	(0 0)	
91.80297537	(1 0)	NAI
93.16146122	(0 0)	
93.82433655	(1 0)	NAI
94.91674087	(0 0)	
96.90771757	(1 0)	NAI
97.09113162	(0 0)	
98.59249091	(1 0)	NAI
98.92355319	(1 1)	NAI
99.36754833	(1 1)	OXI
99.39321405		
99.43546513	(1 0)	
99.58987467	(1 1)	NAI
99.68656455	(0 1)	
99.78276807	(1 1)	NAI
100.6255745	(1 1)	OXI
100.6551976	(0 1)	
100.8270607	(1 1)	NAI
101.0737695	(0 1)	
101.6985453		
101.8759411	(1 1)	NAI
101.9672828	(1 0)	
102.0030571	(0 0)	

103.9553848	(1 0)	NAI
104.4419192	(1 1)	N
104.4668901	(0 1)	
105.00000	Blocking =	14.286%
105.6753843		

Αφού φθάσαμε στην χρονική στιγμή 105 min, η προσομοίωση τερματίζεται και επεξεργαζόμαστε τις μετρήσεις. Όλα τα ακόλουθα, για να υπολογίσουμε την μέση τιμή!

Χρονικό Διάστημα	Blocking
1	0%
2	16.667%
3	17.647%
4	0%
5	14.286%
6	31.25%
7	14.286%

Μέση τιμή της πιθανότητας απωλείας κλήσεως είναι:

$$B = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 B_i = \frac{0.94136}{6} = 0.15869$$

Δηλ. **15.869%**

Σημειωτέον ότι από τις μετρήσεις εξαιρέσαμε το 1ο χρονικό διάστημα λειτουργίας του συστήματος διότι περιλαμβάνει την μεταβατική κατάσταση του συστήματος.

Το διάστημα εμπιστοσύνης για πιθανότητα λάθους 5% είναι:  $\left. \begin{matrix} \mu_{\alpha}^+ \\ \mu_{\alpha}^- \end{matrix} \right\} = 0.15869 \pm \frac{\sigma}{\sqrt{5}} u_{\alpha/2}$

όπου  $\sigma$  είναι η τυπική απόκλιση των μετρήσεων και θα υπολογισθεί από την διασπορά:

$$S^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^6 (B_i - 0.15869)^2 =$$

$$= (0.00006368 + 0.00031613 + 0.02518252 + 0.00025059 + 0.02365752 + 0.00025059) / 5 = 0.01$$

Άρα  $\sigma = 0.1$  (τετραγωνική ρίζα του 0.01).

$u_{\alpha/2}$  είναι η τιμή της κανονικής κατανομής για την οποία:  $P\{X > u_{\alpha/2}\} = \alpha/2$ . Επειδή όμως χρησιμοποιούμε την διασπορά του δείγματος θα χρησιμοποιήσουμε την αντίστοιχη τιμή της κατανομής  $t$  (Student).

Για  $\alpha = 5\%$ , από πίνακα τιμών της κατανομής  $t$  για 5 (= 6-1) βαθμούς ελευθερίας παίρνουμε ότι  $t_{0.05/2} = 2.776$

$$\text{Άρα } \left. \begin{array}{l} \mu_{\alpha}^{+} \\ \mu_{\alpha}^{-} \end{array} \right\} = 0.15869 \pm \frac{0.1}{\sqrt{5}} 2.776 = 0.15869 \pm 0.12415$$

Δηλαδή το διάστημα εμπιστοσύνης για την πιθανότητα απωλείας κλήσεως είναι :

από 3.454% μέχρι 28.284%, και προφανώς περιλαμβάνει την πιθανότητα 20%!

Το μεγάλο διάστημα τουλάχιστον δείχνει ότι πρέπει να ληφθούν περισσότερες μετρήσεις από την προσομοίωση.



# Σημειώματα

## Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

## Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ιωάννης Μοσχολιός, 2015.

Ιωάννης Μοσχολιός. «Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης, Ασκήσεις για τις ενότητες 11 – 13: Συστήματα υπερροής – Εναλλακτική δρομολόγηση - Προσομοίωση». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/courses/EE772/>.

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

### **Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων**

Το Έργο αυτό δεν κάνει χρήση εικόνων/σχημάτων/διαγραμμάτων/φωτογραφιών ή πινάκων από έργα τρίτων:

Πηγές:

[1] Μ. Λογοθέτης, *Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως και Εφαρμογές*, 2<sup>η</sup> έκδοση, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2012.

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Πανεπιστημίου Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

