Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης

Ενότητα: Ασκήσεις για τις ενότητες 1 – 2 (Εισαγωγή – Θεμελιώδεις σχέσεις)

Ιωάννης Μοσχολιός

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Περιεχόμενα

1. Σκοποί ενότητας

Ο βασικός σκοπός αυτής της ενότητας είναι η παρουσίαση ασκήσεων για την κατανόηση της ύλης των ενοτήτων 1 και 2 της θεωρίας του μαθήματος Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης. Οι ασκήσεις που παρουσιάζονται καλύπτουν όλο το φάσμα της αντίστοιχης ύλης της θεωρίας, ενώ κάθε άσκηση συνοδεύεται από λεπτομερή περιγραφή της διαδικασίας επίλυσης.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται ασκήσεις, καθώς και οι λύσεις τους, για την κατανόηση: 1) της έννοιας του φορτίου κίνησης και των ιδιοτήτων αυτού, 2) της έννοιας του βαθμού εξυπηρέτησης και της συμφόρησης κλήσεων, 3) της κατανομής Poisson, 4) της εκθετικής κατανομής, 5) της ιδιότητας PASTA και 6) του νόμου του Little.

3. Ασκήσεις για τις Ενότητες 1-2: (Εισαγωγή – Θεμελιώδεις σχέσεις)

Άσκηση 1

Κατά την διάρκεια της ώρας αιχμής (busy hour) παρατηρήσαμε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα στο οποίο διεκπεραιώθηκαν 8 τηλεφωνικές κλήσεις. Η διάρκεια αυτών των κλήσεων ήταν 3, 5, 6, 10, 12, 17, 20 και 29 λεπτά, αντιστοίχως. Να υπολογιστεί: α) το φορτίο κίνησης που διεκπεραίωσε το σύστημα, β) η μέση τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης των κλήσεων, γ) η μέση τιμή του ρυθμού άφιξης των κλήσεων, δ) οι κατειλημμένες γραμμές στο σύστημα (κατά μέσο όρο), ε) οι ελάχιστες γραμμές (links) που πρέπει να είναι εγκατεστημένες στο σύστημα αυτό, στ) η πιθανότητα οι γραμμές του ερωτήματος (ε) να είναι κατειλημμένες.

Λύση

α) Σύμφωνα με τον ορισμό του φορτίου κίνησης:

α= (3+5+6+10+12+17+20+29)/60 = 102/60 = 1.7 erlang

β) Ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης των κλήσεων, *h*, είναι:

(3+5+6+10+12+17+20+29)/ 8 = 102 / 8 = 12.75 min

γ) Με βάση την 1η ιδιότητα του φορτίου κίνησης έχουμε:

c = α / h = 1.7 / 12.75 = 0.1333 κλήσεις / min

δ) Σύμφωνα με την 4η ιδιότητα του φορτίου κίνησης, προκύπτει ότι 1.7 γραμμές ήταν κατειλημμένες κατά μέσο όρο.

ε) Εφόσον κάθε γραμμή μπορεί να «μεταφέρει» φορτίο κίνησης ενός erlang και το φορτίο κίνησης του τηλεπικοινωνιακού συστήματος είναι 1.7 erlang, απαιτούνται το λιγότερο δύο γραμμές.

στ) Σύμφωνα με την 3η ιδιότητα του φορτίου κίνησης, η πιθανότητα αυτή είναι ίση με 1.7 / 2 = 0.85.

Άσκηση 2

Να εξηγήσετε γιατί σε ένα σύστημα αναμονής με άπειρη ουρά και έναν εξυπηρετητή, η διεκπεραιουμένη κίνηση (carried traffic), α_c, πρέπει να ισούται με $1 – P_0$, όπου P_0 η πιθανότητα ο εξυπηρετητής να είναι ελεύθερος.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε κάποια από τις ιδιότητες του φορτίου κίνησης!

Λύση

Σύμφωνα με την 3η ιδιότητα του φορτίου κίνησης: «το φορτίο κίνησης που διεκπεραιώνεται από μία γραμμή μόνο, είναι ισοδύναμο με την πιθανότητα ότι η γραμμή χρησιμοποιείται». Στην περίπτωση μας, ο εξυπηρετητής είναι πάντοτε κατειλημμένος εκτός αν το σύστημα είναι άδειο. Επομένως, α_c = 1 – P_0.

Άσκηση 3

Σε μια τράπεζα εργάζονται δύο ταμίες. Στην τράπεζα υπάρχουν δύο θέσεις στις οποίες μπορούν να περιμένουν οι πελάτες μέχρι να εξυπηρετηθούν. Επομένως ο αριθμός των πελατών μέσα στο κατάστημα ποικίλει από 0 ως 4 (π.χ. στην περίπτωση που υπάρχουν τέσσερις πελάτες, δύο εξυπηρετούνται και δύο αναμένουν να εξυπηρετηθούν). Η πιθανότητα P_n να υπάρχουν ακριβώς n πελάτες στην τράπεζα, όπου n = 0, 1, 2, 3, 4, παίρνει τις τιμές:

$P_0 = \frac{1}{16}, P_1 = \frac{4}{16}, P_2 = \frac{6}{16}, P_3 = \frac{4}{16}, P_4 = \frac{1}{16}$. Να υπολογιστούν:

α) η μέση τιμή του αριθμού των πελατών στην τράπεζα

β) η πιθανότητα κανένας πελάτης να είναι στην αναμονή

γ) η πιθανότητα ένας πελάτης να είναι στην αναμονή

δ) η πιθανότητα δύο πελάτες να είναι στην αναμονή

ε) η μέση τιμή του αριθμού των πελατών που αναμένουν

στ) η μέση τιμή του αριθμού των πελατών που εξυπηρετούνται

Αν οι πελάτες καταφθάνουν στην τράπεζα με ρυθμό 4 πελάτες την ώρα και παραμένουν σ' αυτή μέχρι να εξυπηρετηθούν να υπολογιστούν: ζ) η μέση τιμή του χρόνου παραμονής των πελατών στην τράπεζα και η) η μέση τιμή του χρόνου αναμονής των πελατών. Τέλος, αν υποθέσουμε ότι οι δύο ταμίες εξυπηρετούν με την ίδια ταχύτητα, να υπολογιστεί: θ) η μέση τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης των πελατών.

Υπόδειξη: Στα ερωτήματα (α) και (ε) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό της μέσης τιμής!

Λύση

α) Από τον ορισμό της μέσης τιμής:

$$N = 0*P_0 + 1*P_1 + 2*P_2 + 3*P_3 + 4*P_4 \Rightarrow N = 0 + 1*\left(\frac{4}{16}\right) + 2*\left(\frac{6}{16}\right) + 3*\left(\frac{4}{16}\right) + 4*\left(\frac{1}{16}\right)$$
$$\Rightarrow N = 2$$

Επομένως στην τράπεζα υπάρχουν 2 πελάτες κατά μέσο όρο.

β) $P = P_0 + P_1 + P_2 = \frac{11}{16}$

γ) $P_3 = \frac{4}{16}$

δ) $P_4 = \frac{1}{16}$

ε) Από τον ορισμό της μέσης τιμής:

$$L = 0*P_0 + 0*P_1 + 0*P_2 + 1*P_3 + 2*P_4 \Rightarrow L = 1*\left(\frac{4}{16}\right) + 2*\left(\frac{1}{16}\right) \Rightarrow L = 0.375$$

Επομένως στην τράπεζα αναμένουν 0.375 πελάτες κατά μέσο όρο.

στ) Η μέση τιμή του αριθμού των πελατών που εξυπηρετούνται μπορεί να προκύψει είτε ως $N - L = 1.625$ είτε από το άθροισμα $1*P_1 + 2*P_2 + 2*P_3 + 2*P_4 = \frac{26}{16} = 1.625$

Επομένως στην τράπεζα εξυπηρετούνται 1.625 πελάτες κατά μέσο όρο.

ζ) Από την επέκταση του νόμου του Little: $T = N/\lambda$ = 2 / 4 = 0.5 ώρες = 30 λεπτά

η) Από τον νόμο του Little: $W = L/\lambda$ = 0.375 / 4 = 0.09375 ώρες = 5.625 λεπτά

θ) $h = T - W$ = 24.375 λεπτά

Άσκηση 4

Πέντε χρήστες μοιράζονται ένα τηλεπικοινωνιακό δίκτυο πρόσβασης. Κάθε χρήστης για να εξυπηρετηθεί καταλαμβάνει μια ζεύξη του δικτύου αυτού. Κατά την διάρκεια του χρόνου παρατήρησης του δικτύου, κάθε χρήστης μπορεί είτε να είναι ενεργός χρήστης (καταλαμβάνοντας μια ζεύξη του δικτύου) είτε όχι (ανενεργός χρήστης). Αν στο χρονικό διάστημα παρατήρησης το διεκπεραιούμενο φορτίο κίνησης για έναν χρήστη είναι κατά μέσον όρο *α* erl να υπολογιστούν:

α) Το συνολικό φορτίο κίνησης *A* που διεκπεραίωσε το σύστημα, συναρτήσει του *α*.

β) Η πιθανότητα *n* από τους 5 χρήστες να είναι ενεργοί, όπου *n* = 0, 1, 2, 3, 4, 5.

γ) Η μέση τιμή των ενεργών χρηστών.

Αν κατά την διάρκεια της ώρας αιχμής κάθε χρήστης καταλαμβάνει μια ζεύξη 3 φορές για 4 min κάθε φορά (κατά μέσον όρο), να υπολογιστούν:

δ) Το διεκπεραιούμενο φορτίο κίνησης *α* κάθε χρήστη (κατά μέσο όρο).

ε) Το συνολικό φορτίο κίνησης που διεκπεραιώνει το δίκτυο.

στ) Η πιθανότητα όλοι οι χρήστες να είναι ανενεργοί.

ζ) Η πιθανότητα όλοι οι χρήστες να είναι ενεργοί.

Λύση

α) Το συνολικό φορτίο κίνησης *A* = 5*α*

β) Σύμφωνα με την 3η ιδιότητα του φορτίου κίνησης: «*Το φορτίο κίνησης που διεκπεραιώνεται από μία γραμμή μόνο, είναι ισοδύναμο με την πιθανότητα ότι η γραμμή χρησιμοποιείται*».

Επομένως, η πιθανότητα ένας χρήστης να χρησιμοποιήσει μία ζεύξη είναι *α* και (1 – *α*) να μην τη χρησιμοποιήσει. Λαμβάνοντας υπόψη όλους τους δυνατούς συνδυασμούς μεταξύ των χρηστών, η πιθανότητα *P*, ότι *n* από τους 5 χρήστες είναι ενεργοί δίνεται από την διωνυμική κατανομή:

$$P(n \text{ ενεργοί χρήστες, } 5 \text{ χρήστες}) = \binom{5}{n} a^n (1-a)^{5-n} .$$

γ) Σύμφωνα με την 4η ιδιότητα του φορτίου κίνησης: «*Το φορτίο κίνησης που διεκπεραιώνεται από μία δέσμη γραμμών είναι ισοδύναμο με τον μέσο αριθμό κατειλημμένων γραμμών της δέσμης*»

Άρα, η μέση τιμή των κατειλημμένων ζεύξεων και επομένως των ενεργών χρηστών ισούται με *A*.

δ) $a = \frac{3}{60} * 4 \Rightarrow a = \frac{1}{5}\ erl$

ε) $A = 5a \Rightarrow A = 1\ erl$

στ) $P(0 \text{ ενεργοί χρήστες, } 5 \text{ χρήστες}) = \binom{5}{0} a^0 (1-a\ )^5 = (1-a)^5 = 0.32768$

ζ) $P(5 \text{ ενεργοί χρήστες, } 5 \text{ χρήστες}) = \binom{5}{5} a^5 (1-a)^0 = a^5 = 0.00032 .$

Άσκηση 5

Είκοσι χρήστες μοιράζονται ένα τηλεπικοινωνιακό δίκτυο πρόσβασης. Κάθε χρήστης για να εξυπηρετηθεί καταλαμβάνει μια ζεύξη του δικτύου αυτού. Κατά την διάρκεια του χρόνου παρατήρησης του δικτύου, κάθε χρήστης μπορεί είτε να είναι ενεργός χρήστης (καταλαμβάνοντας μια ζεύξη του δικτύου) είτε όχι (ανενεργός χρήστης). Αν κατά την διάρκεια της ώρας αιχμής κάθε χρήστης καταλαμβάνει μια ζεύξη 1 φορά για 6 min κάθε φορά (κατά μέσον όρο) τότε: α) να δώσετε σε πίνακα τις τιμές της συνάρτησης μάζας πιθανότητας (probability mass function) και της αθροιστικής πιθανότητας (cumulative probability) για όλες τις δυνατές τιμές των ενεργών χρηστών και β) να υπολογίσετε την πιθανότητα περισσότεροι από 7 χρήστες να είναι ενεργοί.

Λύση

α) Η πιθανότητα *P*, ότι *n* από τους 20 χρήστες είναι ενεργοί δίνεται από την διωνυμική κατανομή, με συνάρτηση μάζας πιθανότητας (probability mass function):

$$P(n \text{ ενεργοί χρήστες, } 20 \text{ χρήστες}) = \binom{20}{n} a^n (1-a)^{20-n} .$$

Η αθροιστική πιθανότητα (cumulative probability) υπολογίζεται από την σχέση:

$$F(b) = \sum_{n \le b} P(n \text{ ενεργοί χρήστες, } 20 \text{ χρήστες}) .$$

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές της συνάρτησης μάζας πιθανότητας και της αθροιστικής πιθανότητας:

20 χρήστες	**φορτίο κίνησης / χρήστη, *α* = 0.1**	
ενεργοί χρήστες	**Συνάρτηση μάζας πιθανότητας (Probability Mass Function)**	**Αθροιστική Πιθανότητα (Cumulative Probability)**
0	0,121576655	0,121576655
1	0,270170344	0,391746998
2	0,285179807	0,676926805
3	0,190119871	0,867046677
4	0,089778828	0,956825505
5	0,031921361	0,988746866
6	0,008867045	0,997613911
7	0,001970454	0,999584365
8	0,000355776	0,999940141
9	5,27076E-05	0,999992849
10	6,44204E-06	0,999999291
11	6,50711E-07	0,999999942
12	5,4226E-08	0,999999996
13	3,70776E-09	1
14	2,05987E-10	1
15	9,15496E-12	1
16	3,1788E-13	1
17	8,3106E-15	1
18	1,539E-16	1
19	1,8E-18	1
20	1E-20	1

β) $P(n \text{ ενεργοί χρήστες} > 7) = 1 - F(7) = 1 - \sum_{n \leq 7} P(n \text{ ενεργοί χρήστες, 20 χρήστες})$ =1-0.999584365 = 0.04156 %.

Άσκηση 6

Θεωρήστε ότι ο αριθμός των χρηστών είναι *N* και *α* το διεκπεραιούμενο φορτίο κίνησης κάθε χρήστη (μέση τιμή). Τότε: α) να εκφράσετε την πιθανότητα *k* από τους *N* χρήστες να είναι ενεργοί συναρτήσει του συνολικού διεκπεραιωμένου φορτίου κίνησης *A* και του αριθμού των χρηστών *N* και β) να αποδείξετε ότι για $N \to \infty$ και σταθερό φορτίο κίνησης *A*, η διωνυμική κατανομή συγκλίνει στην κατανομή Poisson με μέση τιμή *A*.

Λύση

α) Το συνολικό διεκπεραιούμενο φορτίο κίνησης είναι *A*=*Nα*, όπου *α* το διεκπεραιούμενο φορτίο κίνησης κάθε χρήστη. Επομένως:

$$P\left[k \text{ ενεργοί χρήστες}, N \text{ χρήστες}\right] = \binom{N}{k} a^k (1-a)^{N-k} = \frac{N!}{(N-k)!k!} \left(\frac{A}{N}\right)^k \left(1 - \frac{A}{N}\right)^{N-k}$$

β)

$$P\left[k \text{ ενεργοί χρήστες}, \infty \text{ χρήστες}\right] = \lim_{N \to \infty} \frac{N!}{(N-k)!k!} \left(\frac{A}{N}\right)^k \left(1 - \frac{A}{N}\right)^{N-k} =$$

$$= \frac{A^k}{k!} \lim_{N \to \infty} \left(\frac{N(N-1)(N-2)...(N-k+1)}{N^k} \right) \left(1 - \frac{A}{N}\right)^N \left(1 - \frac{A}{N}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{A^k}{k!} \lim_{N \to \infty} \left(\frac{N}{N} \frac{N-1}{N} \frac{N-2}{N} ... \frac{N-k+1}{N} \right) \left(1 - \frac{A}{N}\right)^N \left(1 - \frac{A}{N}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{A^k}{k!} (1) e^{-A} (1) = \frac{A^k}{k!} e^{-A}$$

Επομένως: $P\left[k \text{ ενεργοί χρήστες}, \infty \text{ χρήστες}\right] = \frac{A^k}{k!} e^{-A}$

Σημείωση: Στο τελευταίο βήμα της απόδειξης, χρησιμοποιήσαμε τον γνωστό τύπο $\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{-1}$.

Θέτοντας *x* = *N*/*A*, έχουμε $\lim_{N \to \infty} \left(1 - \frac{A}{N}\right)^{N/A} = e^{-1}$ από το οποίο προκύπτει ότι $\lim_{N \to \infty} \left(1 - \frac{A}{N}\right)^N = e^{-A}$

Παρατήρηση: Η κατανομή Poisson με παράμετρο *A* είναι μια αρκετά καλή προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους *N*, *α*, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{A^k}{k!}e^{-A} \approx \frac{N!}{\left(N-k\right)!k!}a^k\left(1-a\right)^{N-k}$$ για k = 0, 1, …,n

υπό την προϋπόθεση ότι $A = N\alpha$ και $N \geq 100$, $\alpha \leq 0.01$.

Πράγματι, έστω N = 100 χρήστες και α = 0.01 erl ανά χρήστη. Τότε η πιθανότητα k = 5 ενεργοί χρήστες στους N = 100 χρήστες υπολογίζεται με την χρήση της διωνυμικής κατανομής ως εξής:

$$P\left[5 \text{ ενεργοί χρήστες}, 100 \text{ χρήστες}\right] = \binom{100}{5}(0.01)^5\left(1-0.01\right)^{95} = 0.00290$$

Χρησιμοποιώντας την κατανομή Poisson με $A = N\alpha = 100 * 0.01 = 1$, η παραπάνω πιθανότητα προσεγγίζεται ως εξής:

$$\frac{A^k}{k!}e^{-A} = \frac{1}{5!}e^{-1} = 0.00306$$

Άσκηση 7

Θεωρούμε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα στο οποίο οι αφίξεις των χρηστών ακολουθούν μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 12 χρήστες την ώρα (κατά μέσο όρο). Να υπολογιστούν:

α) Η πιθανότητα ότι ακριβώς 6 χρήστες θα αφιχθούν εντός 30 λεπτών.

β) Η πιθανότητα ότι 3 ή περισσότεροι χρήστες θα αφιχθούν εντός 15 λεπτών.

γ) Η πιθανότητα ότι 2, 3 ή 4 χρήστες θα αφιχθούν εντός 5 λεπτών.

Λύση

α) Χρησιμοποιώντας την κατανομή Poisson με λ = 12 χρήστες / ώρα και t = 0.5 ώρες έχουμε:

$$P_k(t) = \frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!}e^{-\lambda t} \Rightarrow P_6(0.5) = \frac{\left(12*0.5\right)^6}{6!}e^{-12*0.5} = 0.1606$$

β) Επειδή λ = 12 χρήστες / ώρα και t = 0.25 ώρες, έχουμε:

$$P_{k>3}(t) = 1 - P_{k=0}(t) - P_{k=1}(t) - P_{k=2}(t) = 1 - \frac{\left(12*0.25\right)^0}{0!}e^{-12*0.25} - \frac{\left(12*0.25\right)^1}{1!}e^{-12*0.25} - \frac{\left(12*0.25\right)^2}{2!}e^{-12*0.25} \Rightarrow$$
$$P_{k>3}(t) = 1 - e^{-3}(1+3+4.5) = 0.5768$$

γ) Επειδή λ = 12 χρήστες / ώρα και t = 1/12 ώρες, έχουμε:

$$\text{Prob}\{2,3,4\,\text{χρήστες}\} = \sum_{k=2}^{4}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} = \left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)e^{-1} = \frac{17}{24}e^{-1} = 0.2606$$

Σημείωση: Η διαδικασία Poisson χρησιμοποιείται ευρέως στην θεωρία τηλεπικοινωνιακής κίνησης προκειμένου να περιγράψει τον τρόπο άφιξης των κλήσεων σ' ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα. Αποτελεί μια διαδικασία αφίξεων κατά την οποία ο αριθμός των αφίξεων εντός ενός χρονικού διαστήματος *t* ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή *λt* αφίξεις, ή μέσο ρυθμό άφιξης στην μονάδα του χρόνου ίσο με *λt/t=λ*. Επομένως, η πιθανότητα να συμβούν *k* αφίξεις μέσα σ' ένα χρονικό διάστημα *t*, $P_k(t)$, όπου $k \geq 0$, δίνεται από την σχέση:

$$P_k(t) = \frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

η οποία είναι η κατανομή Poisson.

Άσκηση 8

Να υπολογιστεί στην περίπτωση της διαδικασίας Poisson, η μέση τιμή των αφίξεων σε ένα χρονικό διάστημα *t* καθώς και η διασπορά.

Λύση

Έστω *N*(*t*) ο συνολικός αριθμός αφίξεων μέχρι την χρονική στιγμή *t*. Τότε:

$$E[N(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda t \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda t$$

αφού $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = e^{\lambda t}$.

Επίσης:

$$\begin{aligned} E[N^2(t)] &= E[N(t)(N(t)-1) + N(t)] = \lambda t + \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \\ &= \lambda t + \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{k-2}}{(k-2)! k(k-1)} (\lambda t)^2 \\ &= \lambda t + (\lambda t)^2. \end{aligned}$$

Οπότε $Var[N(t)] = E[N^2(t)] - \left(E[N(t)]\right)^2 = \lambda t + \left(\lambda t\right)^2 - \left(\lambda t\right)^2 = \lambda t = E[N(t)]$.

Σημείωση: Με βάση την τελευταία σχέση, $Var[N(t)] = E[N(t)]$, μπορούμε με μια διαδικασία Poisson να προσεγγίσουμε διαδικασίες άφιξης για τις οποίες ισχύει $Var[N(t)] \approx E[N(t)]$.

Άσκηση 9

Αν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων σ' ένα σύστημα είναι Poisson με μέση τιμή *λ*, να δείξετε ότι οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων των κλήσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/*λ*.

Λύση

Ορίζουμε ως *T* την τυχαία μεταβλητή «χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων». Τότε:

$\Pr\{T > t\} =$ πιθανότητα καμίας άφιξης εντός του διαστήματος $t = P_0(t) = e^{-\lambda t}$.

Επομένως, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (Cumulative Distribution Function, CDF) της *T* γράφεται ως:

$$A(t) = \Pr\{T \le t\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

ενώ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (Probability Density Function, PDF) δίνεται ως η παράγωγος της CDF:

$$a(t) = \frac{d}{dt}A(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Η μέση τιμή της εκθετικής κατανομής, δηλαδή ο μέσος χρόνος ανάμεσα στις αφίξεις, μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση ως εξής:

$$E[T] = \int_0^\infty t a(t)dt = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}dt = -te^{-\lambda t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = 0 - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

Πράγματι λοιπόν, η τυχαία μεταβλητή *T* ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/*λ*.

Σημείωση 1: Η προηγούμενη ανάλυση επιβεβαίωσε αυτό που διαισθητικά περιμέναμε να ισχύει: αν η μέση τιμή του ρυθμού άφιξης των κλήσεων είναι *λ*, τότε η μέση τιμή του χρόνου μεταξύ δύο αφίξεων είναι 1/*λ*.

Σημείωση 2: Προκειμένου να υπολογίσουμε την διασπορά της εκθετικής κατανομής χρησιμοποιούμε ξανά παραγοντική ολοκλήρωση, οπότε η δεύτερη ροπή είναι:

$$E[T^2] = \int_0^\infty t^2 a(t)dt = \int_0^\infty t^2\lambda e^{-\lambda t}dt = -t^2 e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2te^{-\lambda t}dt = 0 + \frac{2}{\lambda}E[T] = \frac{2}{\lambda^2}$$

Τελικά έχουμε: $Var[T] = E[T^2] - E^2[T] = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

Άσκηση 10

Ο χρόνος που απαιτείται από έναν μηχανικό προκειμένου να επισκευάσει έναν Η/Υ είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή 4 ώρες. Με την βοήθεια κατάλληλων εργαλείων ο χρόνος αυτός θα μπορούσε να μειωθεί σε 2 ώρες. Υποθέτουμε ότι ο μηχανικός αμείβεται με 100 ευρώ αν επισκευάσει έναν Η/Υ σε λιγότερο από 2 ώρες. Διαφορετικά, η αμοιβή του είναι 80 ευρώ. Να υπολογιστεί η μέση τιμή της αύξησης της αμοιβής του μηχανικού (ανά Η/Υ) αν χρησιμοποιήσει τα κατάλληλα εργαλεία.

Λύση

Η μέση αμοιβή του μηχανικού ανά Η/Υ δίνεται από την σχέση:

$$\text{Αμοιβή} = 100P\{T < 2 \text{ ώρες}\} + 80P\{T > 2 \text{ ώρες}\} = 100\left(1 - P\{T > 2 \text{ ώρες}\}\right) + 80P\{T > 2 \text{ ώρες}\} \Rightarrow$$
$$\text{Αμοιβή}=100 \text{ - } 20P\{T > 2 \text{ ώρες}\}$$

όπου *T* ο χρόνος επισκευής ενός Η/Υ.

Αν ορίσουμε ως T_1, T_2 τους χρόνους επισκευής του Η/Υ με ή χωρίς τα κατάλληλα εργαλεία, αντίστοιχα, τότε:

$$P\{T_1 > 2 \text{ ώρες}\}=e^{-\mu t} = e^{-\frac{1}{2}2} = e^{-1} = 0.368$$
$$P\{T_2 > 2 \text{ ώρες}\}=e^{-\mu t} = e^{-\frac{1}{4}2} = e^{-0.5} = 0.607$$

Επομένως:

$$\text{Αύξηση}=100 \text{ - } 20P\{T_1 > 2 \text{ ώρες}\} - 100 + 20P\{T_2 > 2 \text{ ώρες}\} \Rightarrow$$
$$\text{Αύξηση} = 20\left(\{T_2 > 2 \text{ ώρες}\} - P\{T_1 > 2 \text{ ώρες}\}\right) = 4.78 \text{ ευρώ ανά Η/Υ}$$

Άσκηση 11

Θεωρούμε ένα σύστημα αναμονής με άπειρη ουρά και 2 εξυπηρετητές που εξυπηρετούν τηλεφωνικές κλήσεις. Οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων των κλήσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 2 ώρες, ενώ ο χρόνος εξυπηρέτησης των κλήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή 2 ώρες ανά εξυπηρετητή. Αν υποθέσουμε ότι μια κλήση αφίχθη στο σύστημα στις 12:00 το πρωί τότε:

α) Ποια είναι η πιθανότητα η επόμενη άφιξη να συμβεί: 1) πριν τη 1:00 μμ, 2) μεταξύ 1:00 και 2:00 μμ και 3) μετά τις 2:00 μμ;

β) Ποια είναι η πιθανότητα η επόμενη άφιξη να συμβεί μεταξύ 1:00 και 2:00 μμ αν γνωρίζουμε ότι πριν τη 1:00 μμ δεν αφίχθη καμία νέα κλήση;

γ) Ποια είναι η πιθανότητα ότι ο αριθμός των αφίξεων μεταξύ 1:00 και 2:00 μμ θα είναι: 1) 0, 2) 1 και 3) 2 ή μεγαλύτερος;

δ) Ας υποθέσουμε ότι στη 1:00 μμ είναι και οι δύο εξυπηρετητές κατειλημμένοι. Ποια είναι η πιθανότητα οι δύο εξυπηρετητές να μην έχουν ολοκληρώσει την εξυπηρέτηση τους: 1) πριν τις 2:00 μμ, 2) πριν τις 1:10 μμ και 3) πριν τις 1.01 μμ;

Λύση

Σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης ο ρυθμός άφιξης των κλήσεων είναι λ=0.5 κλήσεις ανά ώρα ενώ ο ρυθμός εξυπηρέτησης ανά εξυπηρετητή είναι $\mu = \frac{1}{h} = 0.5$ κλήσεις ανά ώρα.

α)

$$1)\ P\{\text{επόμενη άφιξη πριν τη 1:00 μμ}\} = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-1/2} = 0.393$$

$$2)\ P\{\text{επόμενη άφιξη μεταξύ 1:00 - 2.00 μμ}\} = \left(1 - e^{-2(1/2)}\right) - \left(1 - e^{-(1/2)}\right) = 0.239$$

$$3)\ P\{\text{επόμενη άφιξη μετά τις 2.00 μμ}\} = e^{-2(1/2)} = 0.368$$

β)

$$P\{(\text{επόμενη άφιξη μεταξύ 1:00 - 2.00 μμ}) \big| (\text{καμία άφιξη μεταξύ 12:00 - 1:00 μμ})\} = 1 - e^{-(1/2)} = 0.393$$

γ)

$$1)\ P\{\text{καμία άφιξη μεταξύ 1:00 - 2:00 μμ}\} = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-1/2} = 0.607$$

$$2)\ P\{\text{μία άφιξη μεταξύ 1:00 - 2:00 μμ}\} = \frac{(\lambda t)^1}{1!} e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} e^{-1/2} = 0.303$$

$$3)\ P\{\text{δύο ή περισσότερες αφίξεις μεταξύ 1:00 - 2:00 μμ}\} = 1 - e^{-1/2} - \frac{1}{2} e^{-1/2} = 0.09$$

δ)

$$1)\ P\{\text{κανένας εξυπηρετητής ελεύθερος πριν τις 2:00 μμ}\} = e^{-2\mu t} = e^{-1} = 0.368$$

$$2)\ P\{\text{κανένας εξυπηρετητής ελεύθερος πριν τις 1:10 μμ}\} = e^{-2\mu t} = e^{-1(1/6)} = 0.846$$

$$3)\ P\{\text{κανένας εξυπηρετητής ελεύθερος πριν τις 1:01 μμ}\} = e^{-2\mu t} = e^{-1(1/60)} = 0.983$$

Άσκηση 12

Θεωρούμε ότι ο χρόνος αναμονής στην στάση λεωφορείου είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή 3 λεπτά. Να υπολογιστεί: α) η πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένουμε στην στάση περισσότερο από 5 λεπτά και β) η πιθανότητα ο χρόνος αναμονής να βρίσκεται εντός του ± 2 τυπικές αποκλίσεις από την μέση τιμή του.

Λύση

Έχουμε $E[X]=1/\lambda = 3$ οπότε $\lambda = 1/3$. Άρα η πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένουνε περισσότερα από 5 λεπτά δίνεται από την σχέση:

$$P\{X > 5\} = 1 - P\{X \le 5\} = 1 - (1 - e^{-5(1/3)}) = e^{-5/3} = 0.1889$$

Η τυπική απόκλιση μιας εκθετικά κατανεμημένης τυχαίας μεταβλητής X ισούται με την μέση τιμή αυτής. Επομένως, για το παράδειγμα μας $\sigma_X = 3$, και η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με:

$$P\{3 - 2\sigma_X \le X \le 3 + 2\sigma_X\} = P\{0 \le X \le 9\} = 1 - e^{-(1/3)9} = 0.9502\,.$$

Άσκηση 13

Ένας δέκτης εξυπηρετεί τα μηνύματα δύο πομπών Α, Β. Η άφιξη των μηνυμάτων κάθε πομπού ακολουθεί μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ_x όπου $x =$ Α, Β. Υποθέτουμε ότι όλα τα μηνύματα είναι πολύ σύντομα ώστε να καταλαμβάνουν μοναδικά χρονικά σημεία. Ο αριθμός λέξεων κάθε μηνύματος (είτε του πομπού Α είτε του Β) είναι μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$$p_X(x) = \begin{cases} 2/6, & \text{αν } x = 1 \\ 3/6, & \text{αν } x = 2 \\ 1/6, & \text{αν } x = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

α) Ποια είναι η πιθανότητα να ληφθούν ακριβώς 9 μηνύματα κατά την διάρκεια ενός διαστήματος t ;

β) Αν N είναι ο συνολικός αριθμός των λέξεων που λαμβάνονται κατά την διάρκεια ενός διαστήματος t, να υπολογιστεί η μέση τιμή του N.

γ) Ποια είναι η πιθανότητα ακριβώς οκτώ από τα επόμενα δώδεκα μηνύματα που θα λάβει ο δέκτης να προέρχονται από τον πομπό Α;

Λύση

α) Έστω k ο συνολικός αριθμός των μηνυμάτων που λαμβάνει ο πομπός κατά την διάρκεια ενός διαστήματος t. Τότε το k είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $(\lambda_A + \lambda_B)t$. Επομένως, η πιθανότητα να ληφθούν ακριβώς 9 μηνύματα κατά την διάρκεια ενός διαστήματος t δίνεται από την σχέση:

$$P_9(t)=\frac{\left((\lambda_A+\lambda_B)t\right)^9}{9!}e^{-(\lambda_A+\lambda_B)t}.$$

β) Έστω X_i ο αριθμός των λέξεων στο μήνυμα *i*. Αν *k* και *N* ο συνολικός αριθμός των μηνυμάτων και των λέξεων, αντίστοιχα, που λαμβάνει ο πομπός κατά την διάρκεια ενός διαστήματος *t*, τότε:

$$N=X_1+X_2+\ldots+X_k.$$

Η μέση τιμή του *N* δίνεται από την σχέση:

$$E[N]=E[X]E[k]=\left(1\frac{2}{6}+2\frac{3}{6}+3\frac{1}{6}\right)(\lambda_A+\lambda_B)t=\frac{11}{6}(\lambda_A+\lambda_B)t$$

γ) Κάθε μήνυμα έχει πιθανότητα $\frac{\lambda_A}{\lambda_A+\lambda_B}$ να προέρχεται από τον πομπό Α. Επομένως, ο αριθμός των μηνυμάτων του πομπού Α είναι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή και η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με:

$$P(8\text{ μηνύματα από τον πομπό Α, }12\text{ μηνύματα})=\binom{12}{8}\left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A+\lambda_B}\right)^8\left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A+\lambda_B}\right)^4.$$

Άσκηση 14

Υποθέτουμε ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης μιας κλήσης σ' ένα σύστημα είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή 10 λεπτά, δηλαδή μ=1/10. Για την κλήση αυτή να υπολογιστούν: α) Η πιθανότητα να χρειαστεί περισσότερο από 15 λεπτά για να εξυπηρετηθεί και β) η πιθανότητα να χρειαστεί περισσότερο από 15 λεπτά για να εξυπηρετηθεί δεδομένου ότι έχει ήδη εξυπηρετηθεί για 10 λεπτά.

Λύση

α) Έστω *T* ο χρόνος εξυπηρέτησης της κλήσης στο σύστημα, τότε:

$$\Pr\{T>15\}=e^{-15\mu}=e^{-1.5}\approx 0.223.$$

β) Επειδή η εκθετική κατανομή «δεν θυμάται» ότι η κλήση έχει ήδη εξυπηρετηθεί για 10 λεπτά, η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει ισούται με την πιθανότητα η κλήση να εξυπηρετηθεί τουλάχιστον για 5 ακόμα λεπτά:

$$\Pr\{T>5\}=e^{-5\mu}=e^{-0.5}\approx 0.606.$$

Άσκηση 15

Να αποδειχθεί η ιδιότητα Poisson Arrivals See Time Averages (PASTA).

Λύση

Μια βασική ιδιότητα της διαδικασίας Poisson είναι ότι σε κατάσταση ισορροπίας (steady state) η πιθανότητα μια νέα κλήση να βρει, κατά την άφιξη της, *n* κλήσεις στο σύστημα ισούται με την πιθανότητα να υπάρχουν *n* κλήσεις στο σύστημα. Αν ορίσουμε ως *P*(*n*) την πιθανότητα να υπάρχουν *n* κλήσεις στο σύστημα και ως *Q*(*n*) την πιθανότητα μια νέα κλήση να βρει *n* κλήσεις στο σύστημα κατά την άφιξη της την χρονική στιγμή *t*, τότε σύμφωνα με την ιδιότητα Poisson Arrivals See Time Averages (PASTA) [1] ισχύει:

$P(n) = Q(n)$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο, αφού σύμφωνα με την προϋπόθεση (γ) της διαδικασίας Poisson, η άφιξη μιας κλήσης την χρονική στιγμή *t* δεν επηρεάζει τον αριθμό των αφίξεων που συνέβησαν πριν την χρονική στιγμή *t*.

Προκειμένου να αποδείξουμε την ιδιότητα PASTA, ενώ το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, έστω:

$N(t)$ ο αριθμός των κλήσεων στο σύστημα την χρονική στιγμή *t*,

$P_n(t)$ η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση $n=N(t)$ την χρονική στιγμή *t*,

$Q_n(t)$ η πιθανότητα μια νέα άφιξη να βρει το σύστημα στην κατάσταση $n=N(t)$ την χρονική στιγμή *t*,

$A(t, t+\Delta t]$ το γεγονός «άφιξη κλήσης στο διάστημα $(t, t+\Delta t]$».

Τότε έχουμε:

$$Q_n(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \Pr\left\{N(t)=n \middle| A(t,t+\Delta t]\right\} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pr\left\{N(t)=n \ \kappa\alpha\iota \ A(t,t+\Delta t]\right\}}{\Pr\left\{A(t,t+\Delta t]\right\}}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pr\left\{A(t,t+\Delta t] \middle\| N(t)=n\right\} \Pr\left\{N(t)=n\right\}}{\Pr\left\{A(t,t+\Delta t]\right\}} = \Pr\left\{N(t)=n\right\} = P_n(t).$$

Το κρίσιμο σημείο στην προηγούμενη απόδειξη είναι η ισότητα:
$\Pr\left\{A(t,t+\Delta t] \middle\| N(t)=n\right\} = \Pr\left\{A(t,t+\Delta t]\right\}$.

Η ισότητα αυτή βασίζεται στο γεγονός ότι οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων των κλήσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή για την οποία ισχύει η ιδιότητα της αμνησίας. Επομένως η πιθανότητα $\Pr\left\{A(t,t+\Delta t]\right\}$ είναι ανεξάρτητη από το γεγονός ότι η τρέχουσα κατάσταση του συστήματος είναι

---

[1] Η ονομασία PASTA προκύπτει από το γεγονός ότι η πιθανότητα *P*(*n*) εκφράζει ουσιαστικά το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση *n* (time average probability), οπότε γίνεται αντιληπτή η ονομασία PASTA.

n=$N(t)$ την χρονική στιγμή *t*. Αντίθετα, αν ο ρυθμός άφιξης των κλήσεων είναι *λ* τότε η πιθανότητα αυτή ισούται με $\Pr\{A(t,t+\Delta t]\} = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$ αποτέλεσμα που όντως δεν εξαρτάται από το $N(t)$.

Άσκηση 16

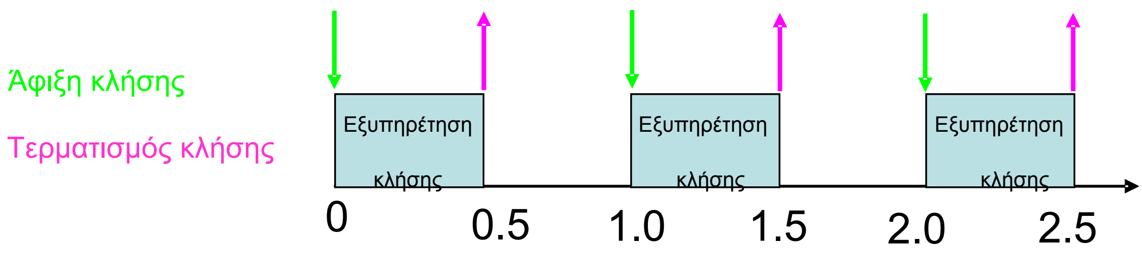
Να αναφέρετε ένα παράδειγμα όπου η ιδιότητα PASTA δεν ισχύει αν η άφιξη των κλήσεων δεν ακολουθεί μια διαδικασία Poisson.

Λύση

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα στο οποίο οι αφίξεις των κλήσεων συμβαίνουν ακριβώς κάθε ένα λεπτό, ενώ ο χρόνος εξυπηρέτησης των κλήσεων είναι πάντα μισό λεπτό.

Ορίζουμε ως $P(n)$ την πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση *n* και ως $Q(n)$ την πιθανότητα μια νέα άφιξη να βρει το σύστημα στην κατάσταση *n.*

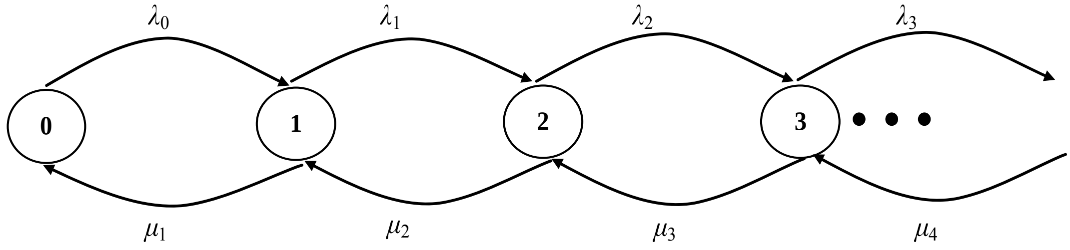
Τότε, ακριβώς στον μισό χρόνο παρατήρησης το σύστημα είναι άδειο και στον υπόλοιπο μισό υπάρχει στο σύστημα μια κλήση. Άρα $P(0)$=$P(1)$=0.5 και $P(n)$=0 για $n \geq 2$. Ωστόσο κάθε νέα κλήση βρίσκει το σύστημα πάντα άδειο, δηλαδή $Q(0)$=1 και $Q(n)$=0 για $n \geq 1$ (βλ. σχήμα 1). Δηλαδή, $P(0) \neq Q(0),\ P(1) \neq Q(1)$.



Σχήμα 1: Σύστημα στο οποίο δεν ισχύει η ιδιότητα PASTA.

Άσκηση 17

Μια διαδικασία «γέννησης-θανάτου» (birth-death process) αποτελεί ειδική περίπτωση μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας συνεχούς χρόνου. Αποτελείται από ένα σύνολο καταστάσεων $\{0, 1, 2, ...\}$, οι οποίες εκφράζουν τον πληθυσμό (π.χ. κλήσεων, χρηστών κτλ) ενός συστήματος. Η μετάβαση από την τρέχουσα κατάσταση $n > 0$ του συστήματος μπορεί να οδηγήσει μόνο στις γειτονικές καταστάσεις n-1 ή n+1. Πιο συγκεκριμένα, αν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $n \geq 0$, τότε ο χρόνος μέχρι την επόμενη άφιξη (ή «γέννηση») μιας κλήσης είναι μια εκθετική τυχαία μεταβλητή με ρυθμό λ_n. Κατά την άφιξη μιας κλήσης, το σύστημα μεταβαίνει από την κατάσταση *n* στην κατάσταση n+1. Αν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $n \geq 1$, τότε ο χρόνος μέχρι την επόμενη εξυπηρέτηση (ή «θάνατο») μιας κλήσης είναι μια εκθετική τυχαία μεταβλητή με ρυθμό μ_n. Κατά την αναχώρηση μιας κλήσης, το σύστημα μεταβαίνει από την κατάσταση *n* στην κατάσταση *n*-1. Προκύπτει λοιπόν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου της οποίας το διάγραμμα μετάπτωσης καταστάσεων παρουσιάζεται στο σχήμα 2.



Σχήμα 2: Διάγραμμα μετάπτωσης καταστάσεων μιας διαδικασίας «γέννησης-θανάτου».

Να υπολογίσετε την πιθανότητα P_n το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση *n*.

Λύση

Προκειμένου να αναλύσουμε την διαδικασία «γέννησης-θανάτου» κλήσεων και να υπολογίσουμε την πιθανότητα P_n το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση *n*, χρησιμοποιούμε την έννοια της σφαιρικής ισορροπίας (global balance), σύμφωνα με την οποία ο ρυθμός των μεταβάσεων εξόδου από μια κατάσταση *n* ισούται με τον ρυθμό των μεταβάσεων εισόδου στην κατάσταση αυτή όταν το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Οι εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας της διαδικασίας «γέννησης-θανάτου» κλήσεων είναι της μορφής:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_n + \mu_n)P_n = \mu(n+1)P_{n+1} + \lambda(n-1)P_{n-1}, \quad n \geq 1 \\
&\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1
\end{aligned}
$$

όπου το αριστερό μέλος της πρώτης σχέσης εκφράζει τους ρυθμούς μετάβασης εξόδου από την κατάσταση *n* προς τις γειτονικές καταστάσεις *n*+1, *n*-1 ενώ το δεξιό μέλος εκφράζει τους ρυθμούς μετάβασης εισόδου στην κατάσταση *n* από τις γειτονικές καταστάσεις *n*+1, *n*-1.

Παρατηρούμε ότι η δεύτερη εξίσωση διαφέρει από την πρώτη, λόγω της ύπαρξης της κατάστασης 0. Η κατάσταση 0 ονομάζεται οριακή κατάσταση (boundary state) του συστήματος εφόσον δεν μπορεί να προκύψει ούτε τερματισμός κλήσης όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση 0 (διαφορετικά θα είχαμε μετάβαση του συστήματος από την κατάσταση 0 στην -1, πράγμα άτοπο) ούτε άφιξη κλήσης που θα οδηγούσε το σύστημα στην κατάσταση 0 (διαφορετικά θα είχαμε μετάβαση του συστήματος από την κατάσταση -1 στην 0).

Προκειμένου να λύσουμε τις εξισώσεις, τις γράφουμε ως εξής:

$$
\begin{aligned}
&P_{n+1} = \frac{(\lambda_n + \mu_n)}{\mu_{n+1}} P_n - \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n+1}} P_{n-1}, \quad n \geq 1 \\
&P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0
\end{aligned}
$$

Οπότε προκύπτει ότι:

$$P_2 = \frac{(\lambda_1 + \mu_1)}{\mu_2} P_1 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0$$

$$P_3 = \frac{(\lambda_2 + \mu_2)}{\mu_3} P_2 - \frac{\lambda_1}{\mu_3} P_1 = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} P_0.$$

Φαίνεται επομένως ότι η λύση για την P_n είναι η εξής:

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \lambda_{n-3} \ldots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \mu_{n-2} \ldots \mu_1} P_0 = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) P_0$$

Η προηγούμενη σχέση ισχύει για n = 0, 1, 2, 3 όπως είδαμε παραπάνω. Αν τώρα ισχύει για $n=k \geq 0$, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει και για $n=k+1$. Πράγματι έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
P_{k+1} &= \frac{(\lambda_k + \mu_k)}{\mu_{k+1}} P_k - \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_{k+1}} P_{k-1} \\
&= \frac{(\lambda_k + \mu_k)}{\mu_{k+1}} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) P_0 - \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_{k+1}} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) P_0 \\
&= \frac{\lambda_k P_0}{\mu_{k+1}} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) + \frac{\mu_k P_0}{\mu_{k+1}} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) - \frac{\mu_k P_0}{\mu_{k+1}} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right) \\
&= P_0 \left(\prod_{i=1}^{k+1} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right)
\end{aligned}$$

οπότε πράγματι ισχύει η σχέση για την P_n.

Προκειμένου να υπολογίσουμε την P_0 χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων P_n ισούται με 1. Επομένως:

$$P_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right)^{-1}$$

Από την παραπάνω σχέση, παρατηρούμε ότι η ικανή και αναγκαία συνθήκη προκειμένου να υπάρχει λύση για την πιθανότητα P_n είναι η σύγκλιση της σειράς απείρων όρων $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda(i-1)}{\mu(i)}$.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Ιωάννης Μοσχολιός. «Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης, Ασκήσεις για τις ενότητες 1 – 2: Εισαγωγή – Θεμελιώδεις σχέσεις». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/EE772/ .

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό δεν κάνει χρήση εικόνων/σχημάτων/διαγραμμάτων/φωτογραφιών ή πινάκων από έργα τρίτων:

Πηγές:

[1] Μ. Λογοθέτης, *Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως και Εφαρμογές*, 2η έκδοση, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2012.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα Πανεπιστημίου Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης