



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# Δυναμική Ηλεκτρικών Μηχανών

Ενότητα 1: Εισαγωγή – Βασικές Αρχές

Επ. Καθηγήτρια Τζόγια Χ. Καππάτου

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας  
Υπολογιστών



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



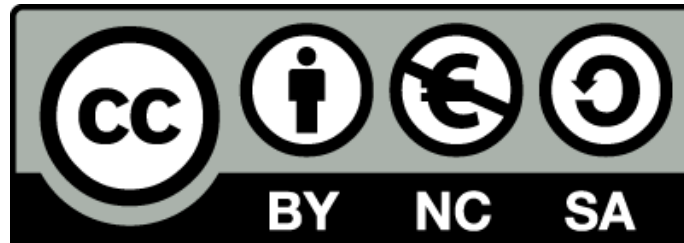
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Περιεχόμενα

Μηχανικά Στοιχεία

Ηλεκτρομαγνητική Δύναμη και Ροπή

Ηλεκτρομαγνήτης

# Μηχανικά Στοιχεία

Όπου οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις προκαλούν κίνηση, εκεί υπεισέρχονται έννοιες από τη μηχανική.

1. Χρειάζονται τα διάφορα μηχανικά στοιχεία με τις ιδιότητές τους (ανάλογα προς τα ηλεκτρομαγνητικά στοιχεία)
2. Οι εξισώσεις που περιγράφουν τα διάφορα είδη κινήσεως

Βασικά στοιχεία της μηχανικής:

- Ελατήριο
- Αποσβενυτήρας
- Μάζα

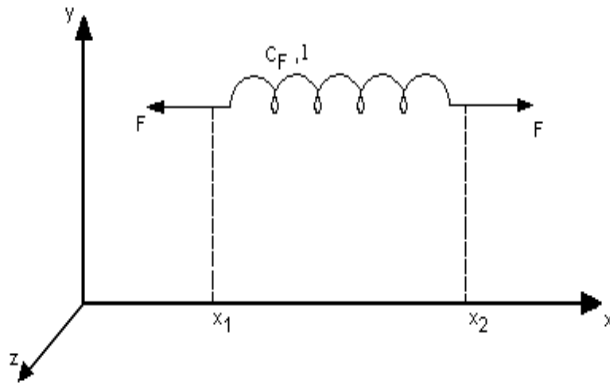
# Ελατήριο

**Ελατήριο:** Διάταξη χωρίς μάζα και χωρίς μηχανικές απώλειες (ιδανική διάταξη) που μπορεί να υποστεί παραμόρφωση

Η παραμόρφωση είναι ανάλογη της δύναμης ή της ροπής που την προκαλεί.

Δύο είδη παραμορφώσεων:

## I. Ευθύγραμμη παραμόρφωση



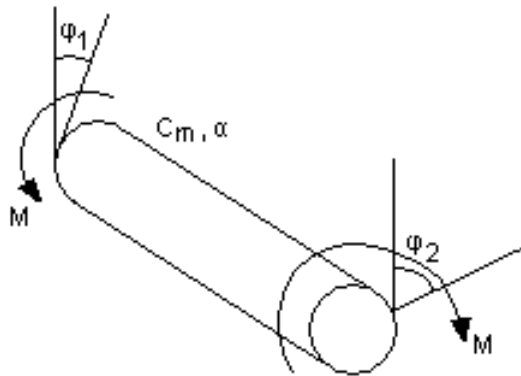
**Σχ.1.5.1**

Ο φυσικός νόμος που διέπει το στοιχείο:

$$F = C_F (x_2 - x_1 - l) \quad \text{A.7.1}$$

# Ελατήριο (1)

## II. Στρέψη



Σχ.1.5.2

Ο φυσικός νόμος που διέπει το στοιχείο:

$$M = C_M (\phi_2 - \phi_1 - \alpha) \quad \boxed{\text{A.7.2}}$$

Τα μεγέθη  $C_F$  και  $C_M$  είναι σταθερές των ελατηρίων, δηλαδή συντελεστές αναλογίας μεταξύ δύναμης ή ροπής και επιμηκύνσεως ή στρέψεως.

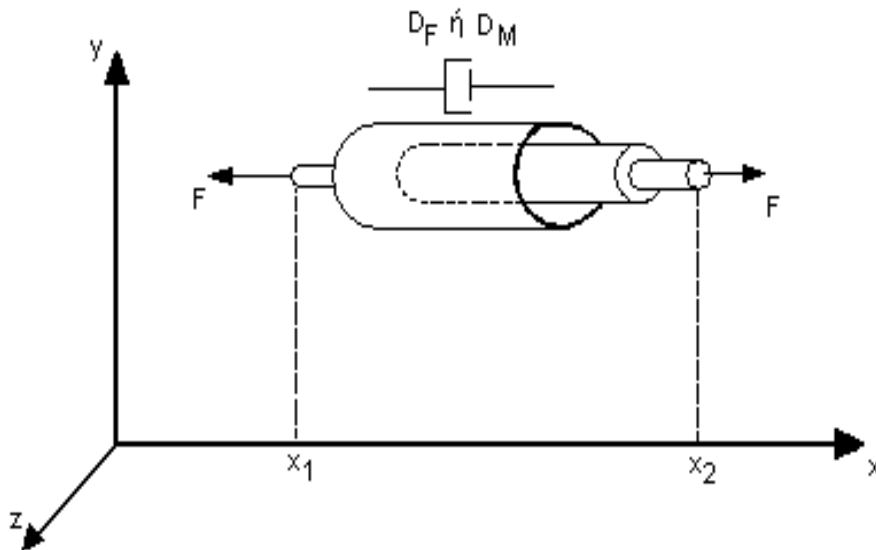
# Αποσβενυτήρας

**Αποσβενυτήρας:** Διάταξη χωρίς μάζα που ασκεί δύναμη ανάλογη της σχετικής ταχύτητας των σωμάτων που περιέχει.

Η δύναμη αυτή προσπαθεί να αποσβέσει την κίνηση.

Διακρίνουμε την απόσβεση τόσο κατά την γραμμική κίνηση, όσο και κατά την περιστροφή.

Ο εσωτερικός κύλινδρος μπορεί να κινείται κατά μήκος του άξονα  $x$ , ή να περιστρέφεται.



Απόσβεση κατά γραμμική κίνηση:

$$F = D_F \frac{d}{dt} (x_2 - x_1) \quad \text{A.7.3}$$



# Αποσβενυτήρας (1)

Απόσβεση κατά περιστροφή:

$$M = D_M \frac{d}{dt} (\phi_2 - \phi_1) \quad \text{A.7.4}$$

Οι σταθερές αποσβέσεως  $D_F$  και  $D_M$  έχουν διαφορετικές διαστάσεις και εξαρτώνται από τη φύση και διάταξη των σωμάτων που αποτελούν τη διάταξη.

Οι παραπάνω εξισώσεις αναφέρονται σε γραμμική απόσβεση, ενώ υπάρχει και άλλη πιο πολύπλοκη εξάρτηση της δύναμης από τη σχετική ταχύτητα (μη γραμμική), όπως συμβαίνει με τη τριβή σε τυρβώδη ρευστά.

# Μάζα

- Αποθηκεύει κινητική ενέργεια
- Παρουσιάζει αδράνεια
- Χωρίς ιδιότητες ελατηρίου ή αποσβέσεως
- Εκφράζει την ύλη που περιέχεται σε ορισμένο όγκο:

$$m = \int_V \rho dV \quad \boxed{\text{A.7.5}}$$

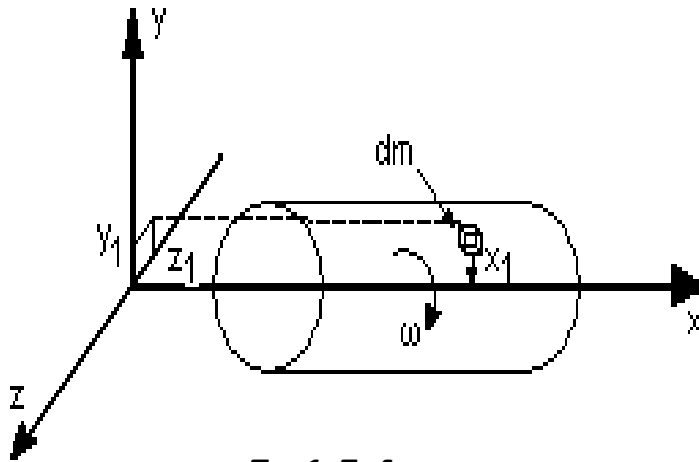
- Σε περίπτωση περιστροφικής κίνησης καλείται ροπή αδρανείας  $J$ :

$$J_x = \int_V (y^2 + z^2) \rho dV \quad \boxed{\text{A.7.6}}$$

Όπου:  $\rho$  η ειδική μάζα

# Μάζα (1)

Η δύναμη ή η ροπή που αναπτύσσεται κατά την κίνηση μίας μάζας:



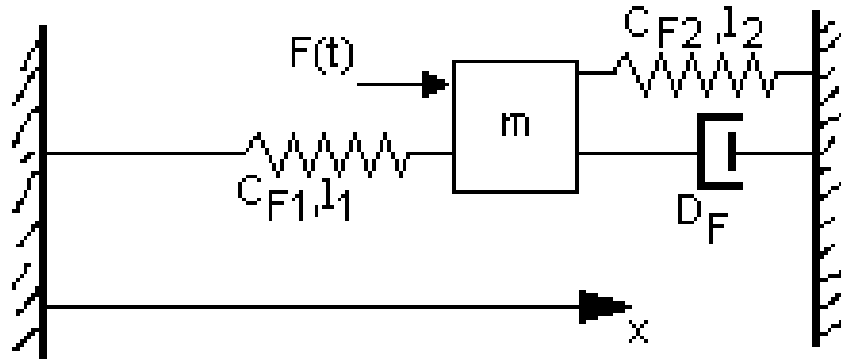
Σχ.1.5.4

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \text{A.7.7}$$

$$M_x = J_x \frac{d^2 \phi}{dt^2} \quad \text{A.7.8}$$

Η δεύτερη παράγωγος του μήκους ή της γωνίας (τροχιάς κινήσεως) είναι η επιτάχυνση. Στα ηλεκτρομηχανικά συστήματα και στις μηχανές σε μεταβατικά φαινόμενα όπου υπεισέρχονται στρεφόμενες μάζες εμφανίζεται η δεύτερη παράγωγος της γωνίας.

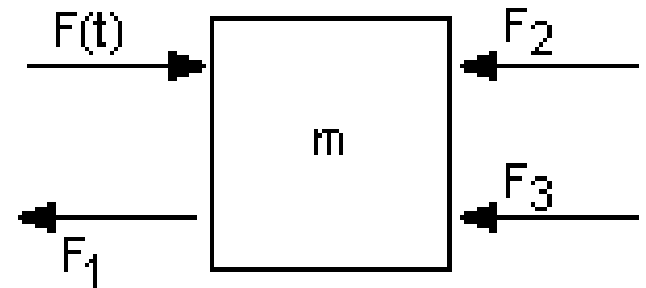
# Εξισώσεις Κίνησης



Σχ.1.5.5

Συνθήκη ισοροπίας δυνάμεων:

Περίπτωση ισοροπίας:



Σχ.1.5.6

$$\Sigma F = 0 \rightarrow F(t) - F_1 - F_2 - F_3 - m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

A.7.9

# Εξισώσεις Κίνησης (1)

Διαφορική εξίσωση:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t) - C_{F1}(x - l_1) - C_{F2}(x - l_2) - D_F \frac{dx}{dt}$$

A.7.10

- Με τη σχέση αυτή μπορούμε να μελετήσουμε την κινητική κατάσταση της μάζας.

# Ηλεκτρομαγνητική Δύναμη, Ροπή, Ηλεκτρομαγνήτης

Βασικό χαρακτηριστικό των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων είναι η δημιουργία δυνάμεων.

- Δυνάμεις σε ηλεκτρικό φορτίο από ηλεκτρικό πεδίο
- Δυνάμεις σε υλικό που μπορεί να πολωθεί από ηλεκτρικό πεδίο
- Δυνάμεις σε κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο ή σε ηλεκτρικό ρεύμα από μαγνητικό πεδίο
- Δυνάμεις σε υλικό που μπορεί να μαγνητισθεί από μαγνητικό πεδίο (π.χ. σίδηρος)

# Ηλεκτρομαγνητική Δύναμη, Ροπή, Ηλεκτρομαγνήτης

## ➤ Δύο τρόποι υπολογισμού δυνάμεων

- Από την πυκνότητα δύναμης σχηματίζοντας το ολοκλήρωμα της ποσότητας αυτής για έναν ορισμένο όγκο
- Μέσω του υπολογισμού της συνολικής ενέργειας, υπολογίζοντας τη μηχανική ενέργεια από την οποία είναι εύκολο να υπολογιστεί η δύναμη.
- ✓ Ποίος από τους δύο τρόπους, για τον υπολογισμό των δυνάμεων που οφείλονται στα πεδία, είναι ο ευκολότερος, δεν μπορούμε να προκαθορίσουμε.

# Πρώτος τρόπος υπολογισμού δυνάμεων

(από την πυκνότητα δύναμης)

✚ Δύναμη σε ηλεκτρικό φορτίο εντός ηλεκτρικού πεδίου.

$$F = \int_V \vec{f} dV = \int_V \rho \vec{E} dV \quad \text{A.7.11}$$

✚ Δύναμη επί ρευματοφόρου αγωγού εντός μαγνητικού πεδίου.

$$F = \int_V \vec{f} dV = \int_V (\vec{S} \times \vec{B}) dV \quad \text{A.7.12}$$

✚ Υπολογισμός ροπής

$$M = \int_V (\vec{r} \times \vec{f}) dV \quad \text{A.7.13}$$



# Δεύτερος τρόπος υπολογισμού δυνάμεων (Από τον ισολογισμό ενέργειας)

Ενέργεια που αποθηκεύεται σε στοιχειώδη χώρο

$$dW = dQ + \vec{H}d\vec{B} + \vec{E}d\vec{D} + pdv \quad \text{A.7.14}$$

Ολική ενέργεια = θερμική + μαγνητική + ηλεκτρική +  
μηχανική

Όταν πρόκειται για τυλίγματα πηνίων τότε η ποσότητα  $dQ$  εκφράζει την ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα διά των ωμικών απωλειών.

# Δεύτερος τρόπος υπολογισμού δυνάμεων (1)

(Από τον ισολογισμό ενέργειας)

Αποθηκευμένη ολική ενέργεια σε γενική περίπτωση:

$$W = \int_V dQ dV + \int_V \vec{H} d\vec{B} dV + \int_V \vec{E} d\vec{D} dV + \int_V p dv dV \quad \text{A.7.15}$$

Για μια ηλεκτρομαγνητική διάταξη:

Από μία ηλεκτρική πηγή παίρνουμε υπό τάση  $u$  τι ρεύμα  $i$  και καλύπτουμε τια απώλειες χαλκού  $Ri^2$ , όπου  $R$  είναι η αντίσταση του αγωγού, τη μαγνητική ενέργεια που αποθηκεύεται εντός της διατάξεως και τη μηχανική που προέρχεται από μία δύναμη  $F$ .

# Υπολογισμός δύναμης σε ηλεκτρομαγνητική διάταξη

Μεταβολή της ενεργειακής κατάστασης σε  $dt$ :

$$u i dt = R i^2 dt + dW_m + dA \quad (1)$$

Εξίσωση τάσεων:  $u = R i + \frac{d\Psi}{dt}$  (2)

(1) και (2) δίδουν:  $i d\Psi = dW_m + dA$  (3)

---

Μαγνητική ενέργεια  $W_m = \frac{1}{2} i \Psi$  (4)

# Υπολογισμός δύναμης για γραμμική κίνηση

Μεταβολή μηχανικής  
ενέργειας

$$dA = Fdx \quad (5)$$

$$(4) \rightarrow \frac{dW_m}{dt} = \frac{1}{2} i \frac{d\Psi}{dt} + \frac{1}{2} \Psi \frac{di}{dt} \quad (6)$$

$$(3),(5),(6) \rightarrow id\Psi = \frac{1}{2} id\Psi + \frac{1}{2} \Psi di + Fdx \quad (7)$$

(7)  $\rightarrow$  **Ασκούμενη δύναμη:**

$$F = \frac{1}{2} \left( i \frac{d\Psi}{dx} - \Psi \frac{di}{dx} \right)$$

Όταν το ρεύμα είναι συνεχές και σταθερό

$$F = \frac{1}{2} i \frac{d\Psi}{dx} = \frac{dW_m}{dx}$$

# Υπολογισμός ροπής για κυκλική κίνηση

Μεταβολή μηχανικής ενέργειας:  $dA = Md\theta$  A.7.16

Ροπή της διάταξης:  $M = \frac{1}{2} \left( i \frac{d\Psi}{d\vartheta} - \Psi \frac{di}{d\vartheta} \right)$  A.7.17

α) Αν το ρεύμα ανεξάρτητο της γωνίας  $\theta$ :

$$M = \frac{dW_m}{d\vartheta} \quad \text{A.7.18}$$

β) Αν η ροή είναι ανεξάρτητη της γωνίας  $\theta$ :

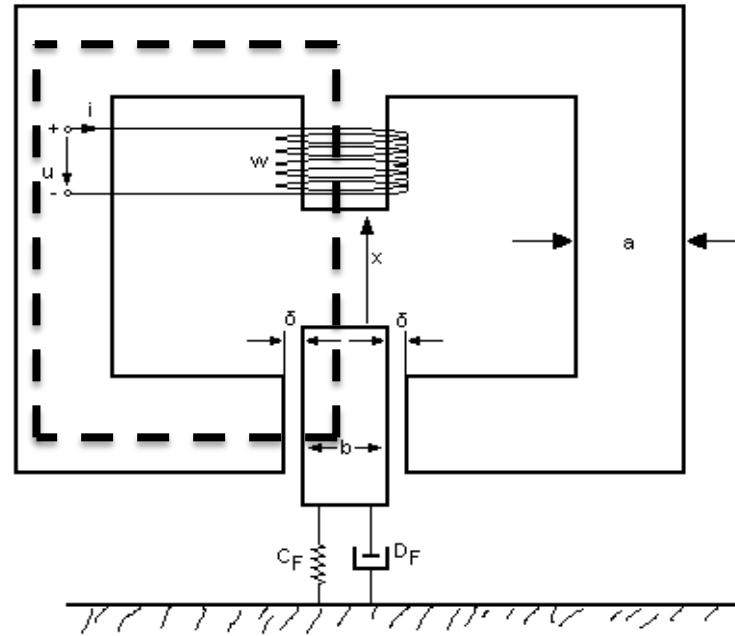
$$M = -\frac{dW_m}{d\vartheta} \quad \text{A.7.19}$$

# Ηλεκτρομαγνήτης

- Ακίνητος πυρήνας που διεγείρεται από ένα πηνίο τροφοδοτούμενο από συνεχές ή εναλλασσόμενο ρεύμα.
- Ασκεί δύναμη σε κινούμενο τεμάχιο από υλικό που μπορεί να μαγνητισθεί.
- Προκαλεί κίνηση σε άλλα μηχανικά στοιχεία.

Η κίνηση αυτή μπορεί να μας χρησιμεύσει ποικιλοτρόπως π.χ. ρελαί.

# Παράδειγμα Ηλεκτρομαγνήτη



Σχ.1.5.7

- Η τάση  $u$  είναι σήμα που προέρχεται από άλλο κύκλωμα.
- Όταν το ρεύμα  $i$  είναι μηδέν το ελατήριο σταθεράς  $C_F$  κρατά τον οπλισμό σε ορισμένη θέση.
- Ο αποσβενυτήρας  $D_F$  παριστάνει την τριβή που αναπτύσσεται κατά την κίνηση του οπλισμού.

# Παράδειγμα Ηλεκτρομαγνήτη (1)

- Όταν το ρεύμα είναι μηδέν, ο οπλισμός κρατιέται σε μία ορισμένη θέση από το ελατήριο σταθεράς  $C_F$ .
- Υπολογίζουμε την ένταση του ρεύματος και την απομάκρυνση που αυτή προκαλεί στον οπλισμό, χρησιμοποιώντας την αποθηκευμένη μαγνητική ενέργεια στη διάταξη.
- Μαγνητική τάση κατά μήκος της διακεκομμένης τροχιάς:

$$l_{Fe} H_{Fe} + H(\delta + x) = wi \quad \text{A.7.20}$$

- Επειδή ένταση μαγν. πεδίου εντός πυρήνα και οπλισμού αμελητέα:

$$H = \frac{wi}{(\delta + x)} \quad \text{A.7.21}$$



# Ανάλυση Ηλεκτρομαγνήτη

Η μαγνητική επαγωγή  $B$ : συνεπώς είναι:

$$B = \mu_0 \frac{wi}{(\delta + x)} \quad \boxed{\text{A.7.22}}$$

Η μαγνητική ροή  $\Phi$ :

$$\Phi = bl\mu_0 \frac{wi}{(\delta + x)} \quad \boxed{\text{A.7.23}}$$

όπου  $l$  είναι το μήκος του πυρήνα.

Η μαγνητική ενέργεια που προσφέρει η πηγή:

$$W_m = \frac{1}{2} wi\Phi = \frac{1}{2} w^2 bl\mu_0 \frac{i^2}{\delta + x} \quad \boxed{\text{A.7.24}}$$

# Κίνηση οπλισμού Ηλεκτρομαγνήτη

Αν το ρεύμα ανεξάρτητο του  $x$ , τότε:

- Δύναμη  $F$  που επενεργεί επί του οπλισμού:

$$F = \frac{dW_m}{dx} = -\frac{1}{2} w^2 b l \mu_0 \frac{i^2}{(\delta + x)^2} \quad \text{A.7.25}$$

Η εξίσωση κίνησης δίνεται από τη σχέση:  
(Μια εξίσωση με 2 αγνώστους)

$$-\frac{1}{2} w^2 b l \mu_0 \frac{i^2}{(\delta + x)^2} = M \frac{d^2 x}{dt^2} + D_F \frac{dx}{dt} + C_F x \quad \text{A.7.26}$$

(Μια εξίσωση με 2 αγνώστους)

Για την εύρεση των δύο αγνώστων  $i(t)$  και  $x(t)$  απαιτείται άλλη μια εξίσωση. Αυτή θα είναι ο βρόχος των τάσεων του κυκλώματος!

# Κίνηση οπλισμού Ηλεκτρομαγνήτη (1)

Για το βρόχο:  $u(t) = Ri(t) + \frac{d\Psi(t)}{dt}$  A.7.27

Γίνεται υπολογισμός της Ροής:  $\Psi(t) = L(x)i(t)$ . A.7.28

Έτσι:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = L(x) \frac{di(t)}{dt} + \frac{dL}{dx} \frac{dx}{dt} i$$
A.7.29

Από την σχέση A.7.23  
υπολογίζεται:

$$L(x) = \frac{\Psi}{i} = \frac{w^2 bl \mu_0}{\delta + x}$$
A.7.30

Η εξίσωση τάσεων, A. 7.27, γίνεται:

$$u(t) = Ri(t) + \frac{w^2 bl \mu_0}{\delta + x} \frac{di}{dt} - \frac{w^2 bl \mu_0}{(\delta + x)^2} \frac{dx}{dt} i(t)$$

A.7.31

Από τις 2 εξισώσεις A.7.26 και A.7.31 υπολογίζεται το ρεύμα  $i(t)$  και η μετατόπιση  $x(t)$ !

# Πηγές

Οι πηγές των **Εικόνων, των Σχημάτων και των Διαγραμμάτων είναι:**

[1] Α.Ν. Σαφάκας, «Ηλεκτρικές Μηχανές Α», Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα 2009

[2] Α.Ν. Σαφάκας, «Ηλεκτρικές Μηχανές Β», Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα 2009

[3] Α.Ν. Σαφάκας, «Δυναμική Ηλεκτρομηχανικών συστημάτων» Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα 2008

[4] Τζόγια Χ. Καππάτου, Πανεπιστημιακές σημειώσεις και Εξομοιώσεις Μοντέλων Ηλεκτρικών Μηχανών σε περιβάλλον Πεπερασμένων Στοιχείων, Εργαστήριο Ηλεκτρομηχανικής Μετατροπής Ενέργειας, Η.Μ.Τ.Υ, Πανεπιστήμιο Πατρών.

# Τέλος Ενότητας



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης