



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# Εισαγωγή στους Υπολογιστές

Ενότητα 10: Ψηφιακή Αριθμητική

Βασίλης Παλιουράς

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας  
Υπολογιστών

# Σκοποί ενότητας

- Εισαγωγικές έννοιες ψηφιακής λογικής
- Λογικές πύλες και πράξεις



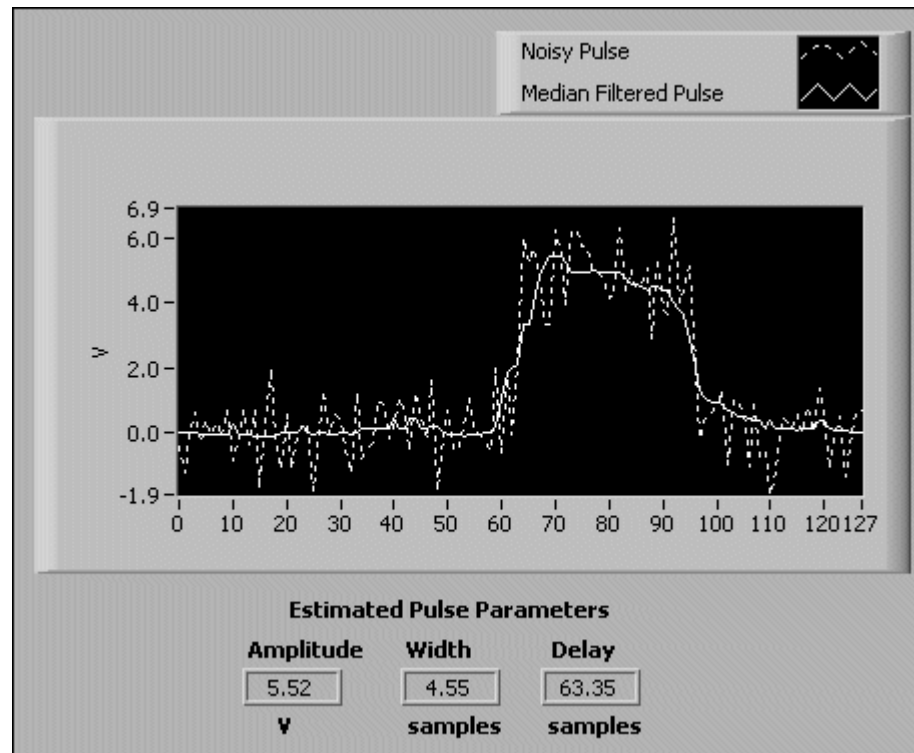
# Περιεχόμενα ενότητας

- Εισαγωγικές έννοιες ψηφιακής λογικής
- Λογικές πύλες και πράξεις

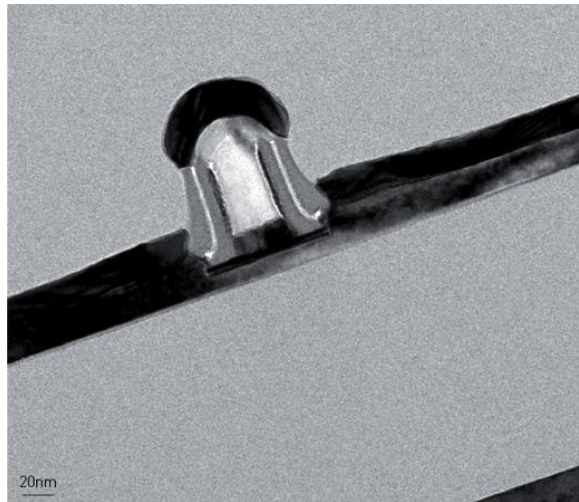
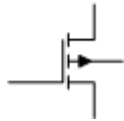
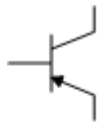


# Εισαγωγικές έννοιες ψηφιακής λογικής

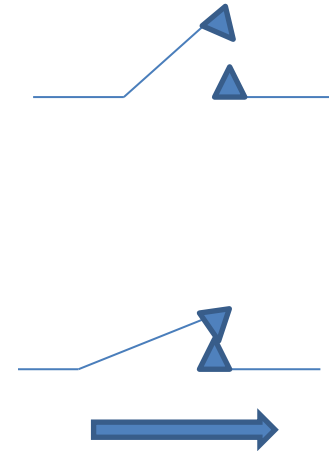
# Γιατί δυαδικό;



# Απλές και αξιόπιστες συσκευές



*TEM cross section of a 25nm FDSOI transistor.*

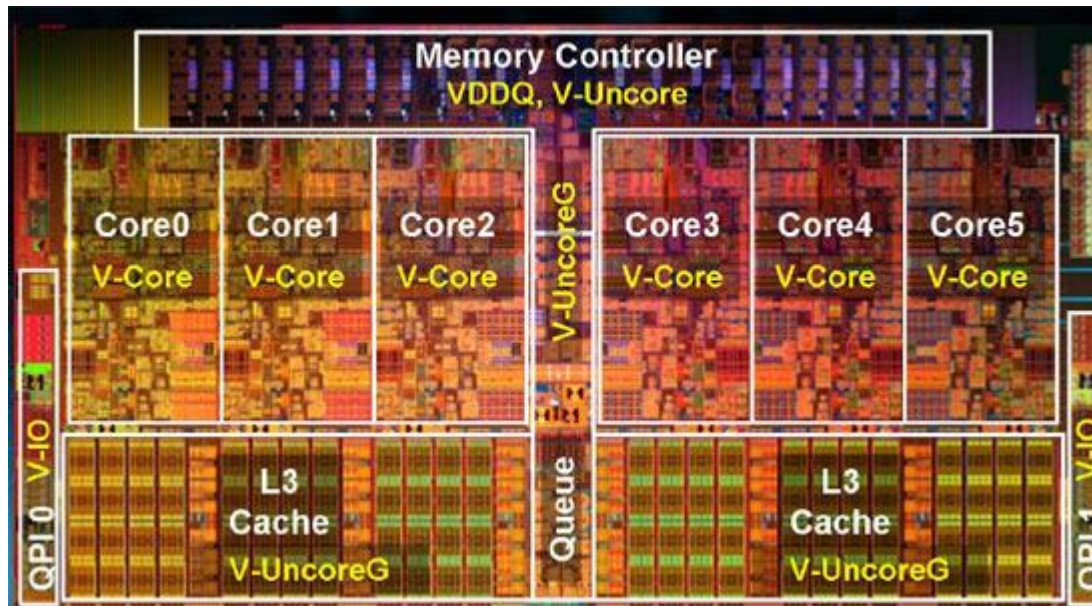


- Μπορούν να βρεθούν σε δύο καταστάσεις:
  - Αγωγή ή μη
  - 0 ή 1
  - On ή off
  - True ή false



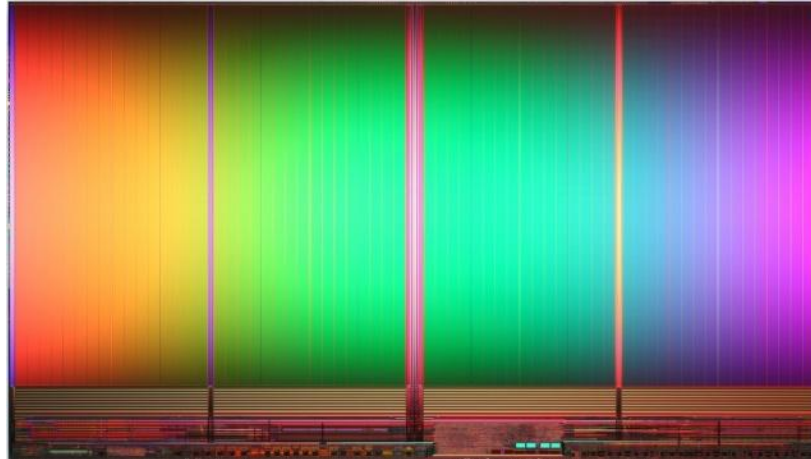
# 1.17 billion transistors, ~240mm sq.

- Ένα chip 6 επεξεργαστικοί πυρήνες, μνήμες cache:



# Πολυπλοκότητα

- Αλγόριθμοι για κατασκευή κυκλωμάτων VLSI
- Μέχρι 17,000,000,000 στοιχεία !
  - μνήμες NAND flash, 25nm

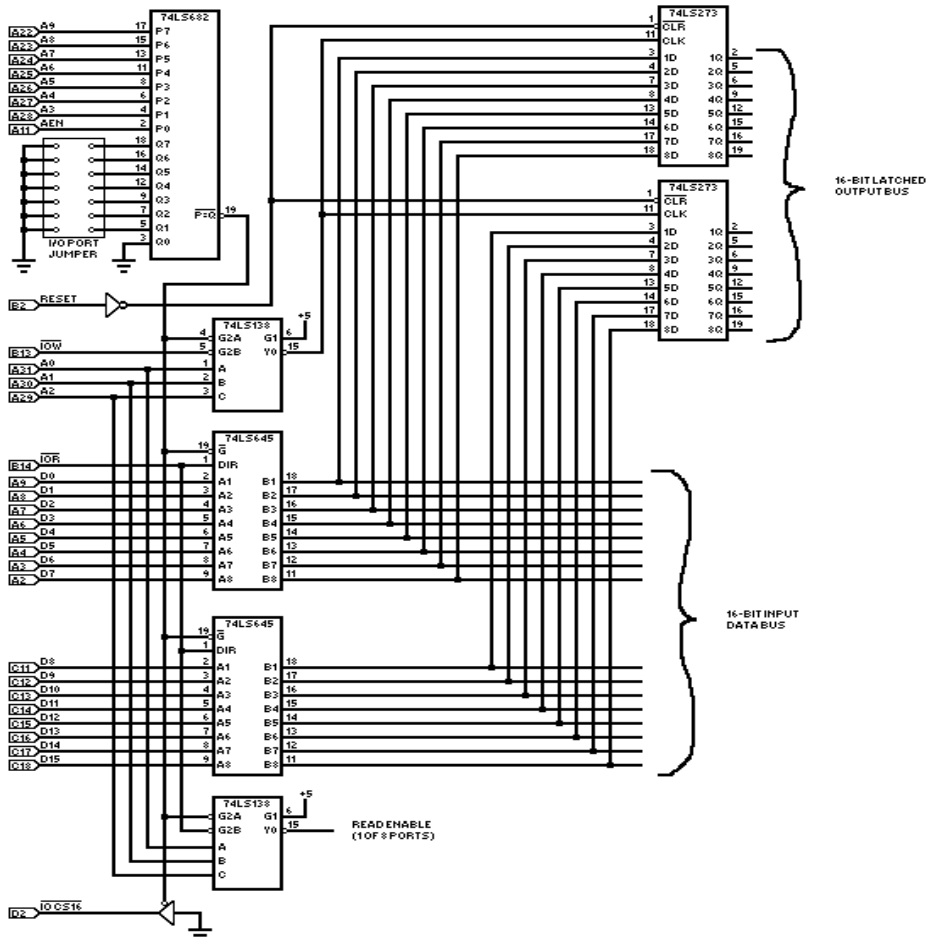


- Διαχείριση πολυπλοκότητας
  - Μεγάλες ομάδες μηχανικών, μοιρασμένες σε όλο τον κόσμο.





# Οργάνωση δυαδικών ψηφίων σε λέξεις



0 2

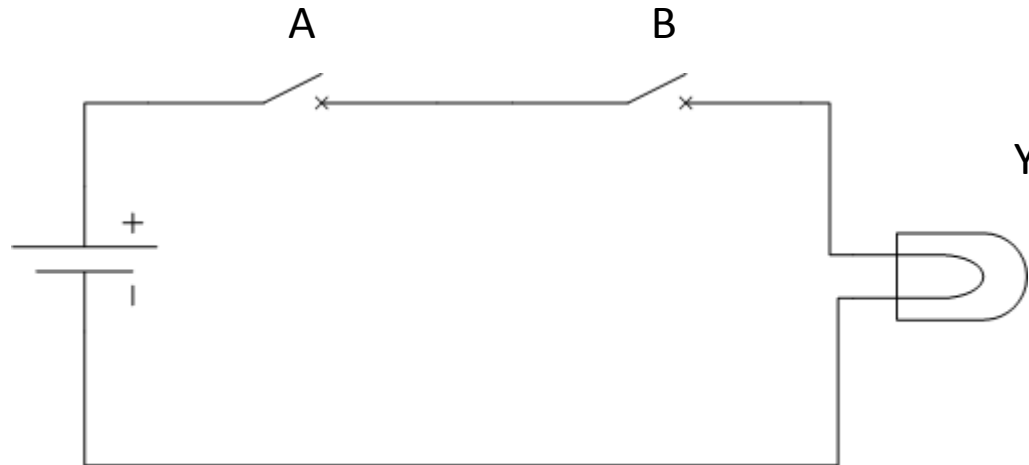


$$2^n$$



# Βασικές πράξεις λογικής

## Η Λογική Μεταβλητή



$A, B = 1$ , κλειστός διακόπτης  $\Rightarrow$  διέρχεται ρεύμα

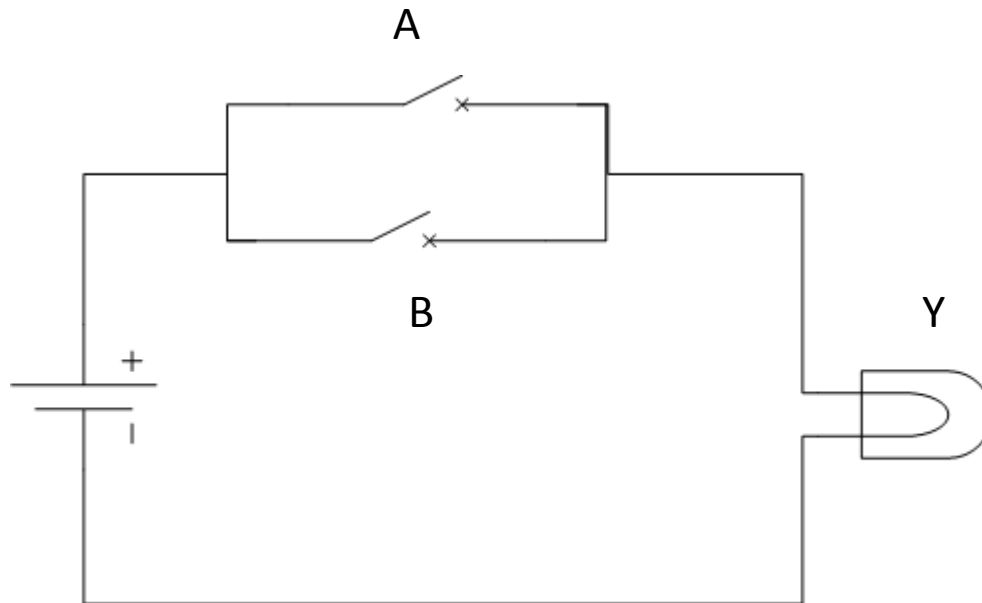
$A, B = 0$ , ανοικτός διακόπτης  $\Rightarrow$  δεν διέρχεται ρεύμα

$Y = 1$ , ανάβει το φως,  $Y = 0$ , σβήνει το φως

$$Y = A \cdot B$$



# Λογική πράξη OR

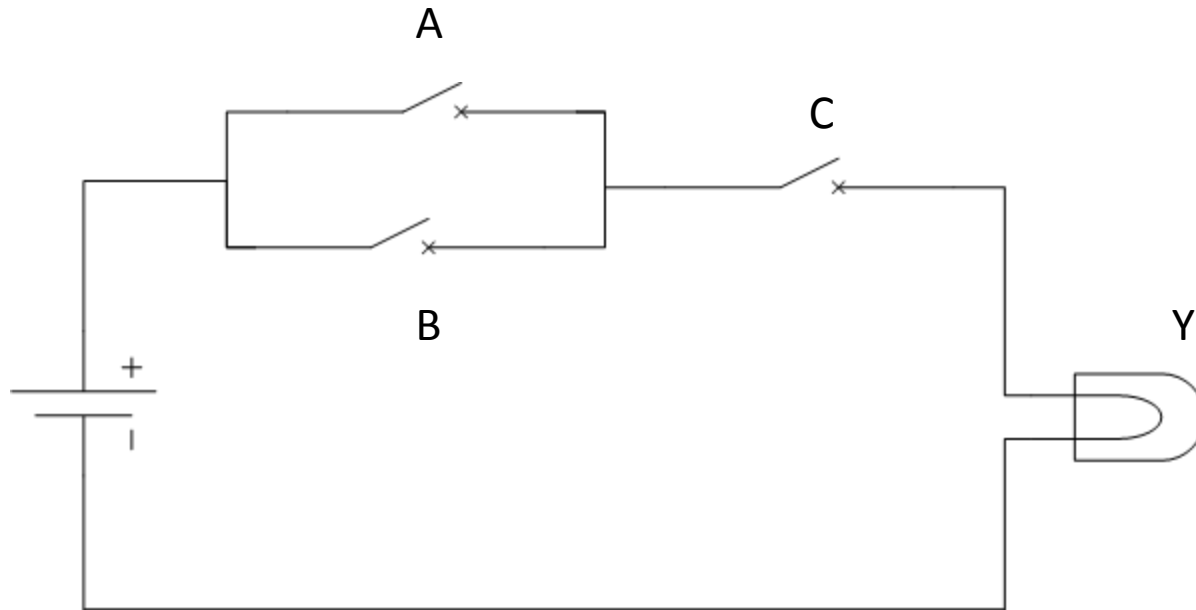


$$Y = A + B$$

Λογική πράξη Η (OR)



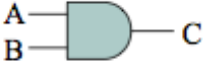

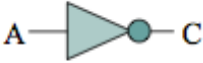
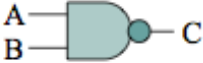
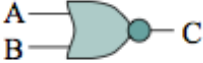

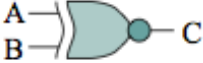
# Λογικές εκφράσεις



$$Y = (A+B) \cdot C$$



# Λογικές Πύλες

Λογική Πύλη	Σύμβολο	Αλγεβρική Πράξη	Πίνακας Αλήθειας															
AND		$C = A \cdot B$	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>B</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>C</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	A	0	1	0	1	B	0	0	1	1	C	0	0	0	1
A	0	1	0	1														
B	0	0	1	1														
C	0	0	0	1														
OR		$C = A + B$	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>B</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>C</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	A	0	1	0	1	B	0	0	1	1	C	0	1	1	1
A	0	1	0	1														
B	0	0	1	1														
C	0	1	1	1														
NOT		$C = A'$	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>C</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	A	0	1	C	1	0									
A	0	1																
C	1	0																
NAND		$C = (AB)'$	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>B</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>C</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	A	0	1	0	1	B	0	0	1	1	C	1	1	1	0
A	0	1	0	1														
B	0	0	1	1														
C	1	1	1	0														
NOR		$C = (A + B)'$	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>B</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>C</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	A	0	1	0	1	B	0	0	1	1	C	1	0	0	0
A	0	1	0	1														
B	0	0	1	1														
C	1	0	0	0														
XOR		$C = A'B + AB'$	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>B</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>C</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	A	0	1	0	1	B	0	0	1	1	C	0	1	1	0
A	0	1	0	1														
B	0	0	1	1														
C	0	1	1	0														
XNOR		$C = A'B' + AB$	<table border="1"> <tr><td>A</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>B</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>C</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	A	0	1	0	1	B	0	0	1	1	C	1	0	0	1
A	0	1	0	1														
B	0	0	1	1														
C	1	0	0	1														

# Ημιαθροιστής

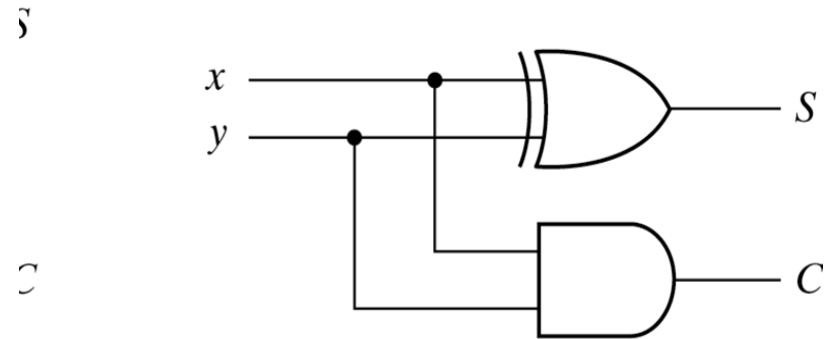
Πίνακας αληθείας ημιαθροιστή και απλοποιημένες λογικές συναρτήσεις

- $S$  (άθροισμα)
- $C$  (κρατούμενο)

$x$	$y$	$C$	$S$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$$S = x' y + x y'$$

$$C = x y$$



# Πρόσθεση Αριθμών χωρίς Πρόσημο

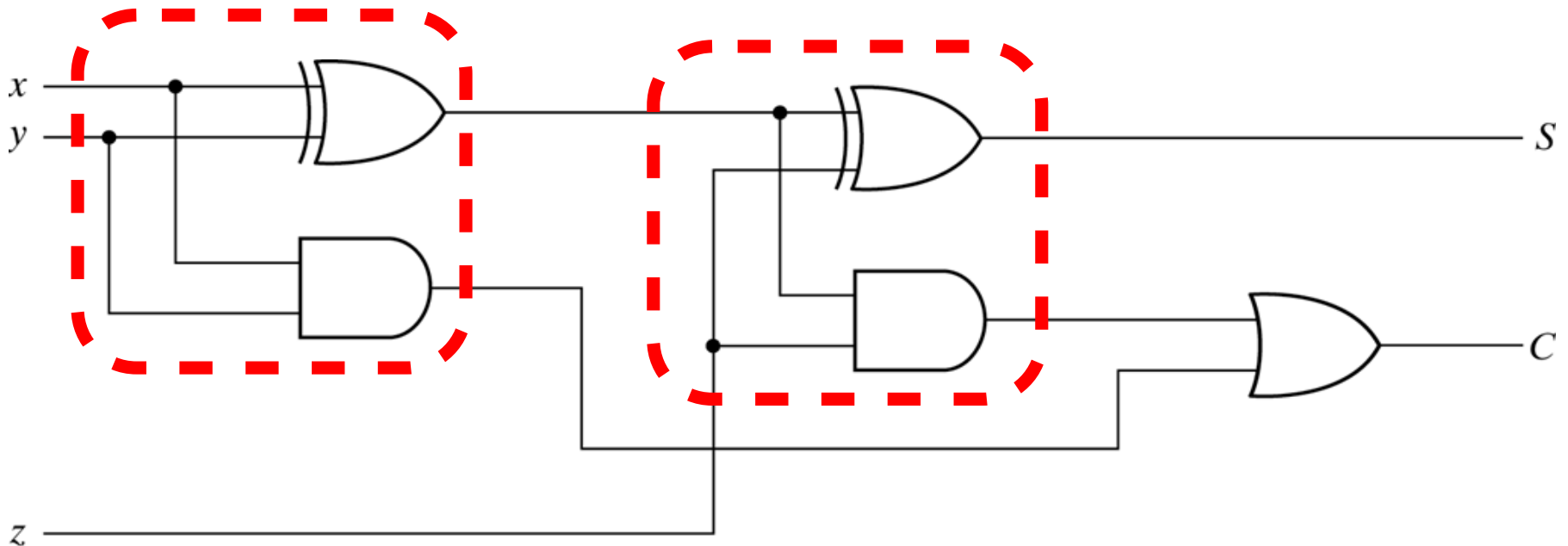
$$\begin{array}{r} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{1} \\ \phantom{0} 0 1 1 1 \\ + \phantom{0} 1 0 1 0 \\ \hline 1 0 0 0 1 \end{array}$$

$a$	$b$	$c_{in}$	$c_{out}$	$s$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1



# Πλήρης Αθροιστής

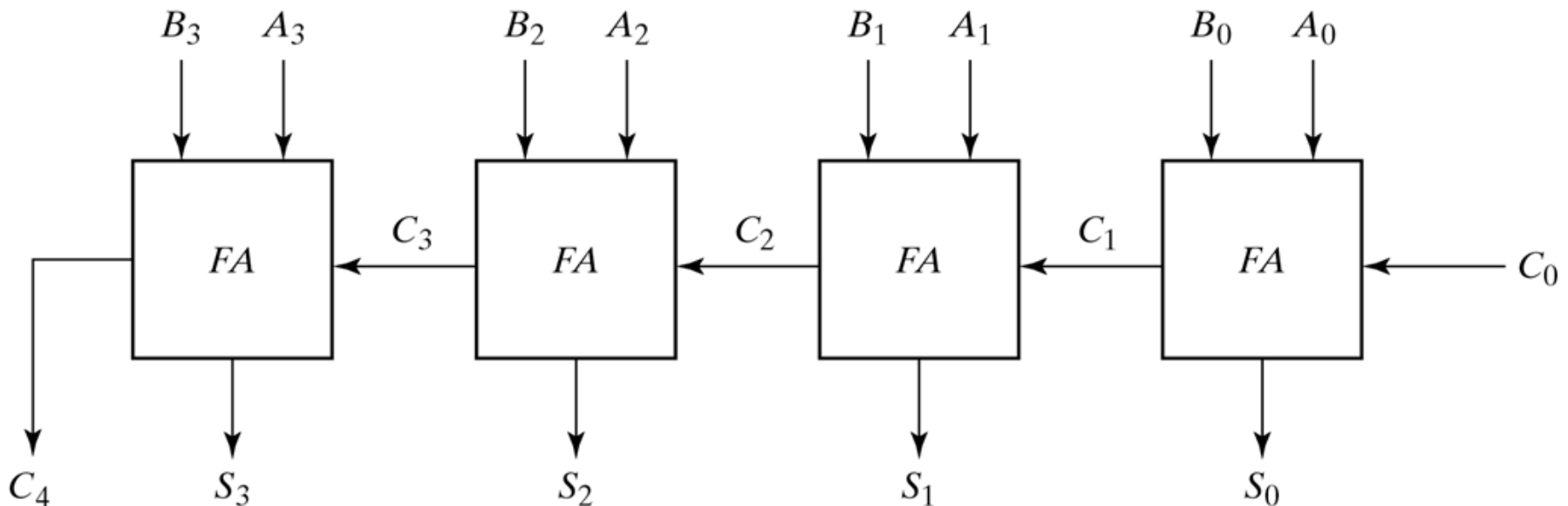
Λογικό διάγραμμα του πλήρους αθροιστή, υλοποιημένου με δύο ημιαθροιστές και μια πύλη Ή :



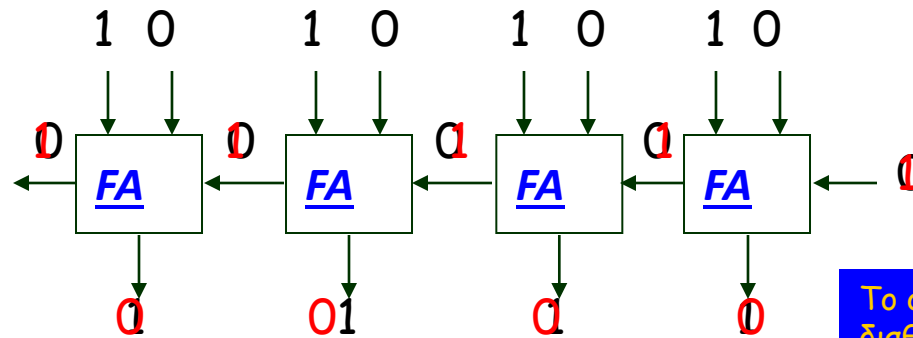


# Αθροιστής λέξεων 4 bit

Διασυνδέσεις τεσσάρων κυκλωμάτων πλήρους αθροιστή (FA), τα οποία σχηματίζουν έναν δυαδικό αθροιστή ριπής κρατουμένου των 4 bit



# Μεγαλύτερη Καθυστέρηση σε Αθροιστή Κυματισμού 4 Δυαδικών Ψηφίων



Θεωρείστε ότι θέλουμε να προσθέσουμε τους δυαδικούς 1111 και 0000 με κρατούμενο εισόδου 0.

Μετά από ικανό χρονικό διάστημα τα ενδιάμεσα κρατούμενα γίνονται 0 και η έξοδος 1111.

Έστω τώρα ότι το κρατούμενο εισόδου γίνεται 1.

Μετά από χρόνο ίσο με την χρονική καθυστέρηση ενός FA ( $T_{FA}$ ), το κρατούμενο εξόδου του λιγότερο σημαντικού αθροιστή γίνεται 1, και το ψηφίο αθροίσματος 0. Το συνολικό αποτέλεσμα είναι τώρα **1110**

Μετά από  $2T_{FA}$ , το κρατούμενο εξόδου του **δεύτερου** λιγότερο σημαντικού αθροιστή γίνεται 1, και το ψηφίο αθροίσματος 0. Το συνολικό αποτέλεσμα είναι τώρα **1100**

Μετά από  $3T_{FA}$ , το κρατούμενο εξόδου του  **τρίτου**  λιγότερο σημαντικού αθροιστή γίνεται 1, και το ψηφίο αθροίσματος 0. Το συνολικό αποτέλεσμα είναι τώρα **1000**

Μετά από  $4T_{FA}$ , το κρατούμενο εξόδου του **περισσότερο** σημαντικού αθροιστή γίνεται 1, και το ψηφίο αθροίσματος 0. Το συνολικό αποτέλεσμα είναι τώρα **0000**

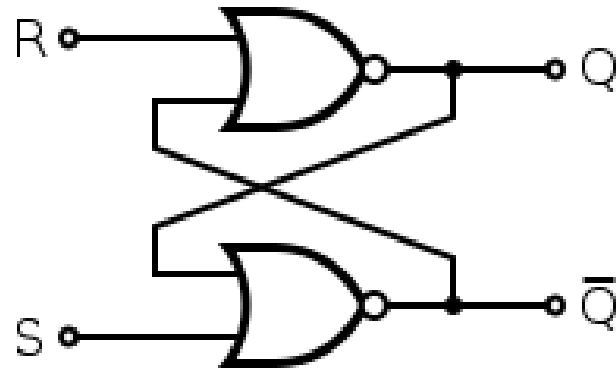


# Λογικά κυκλώματα

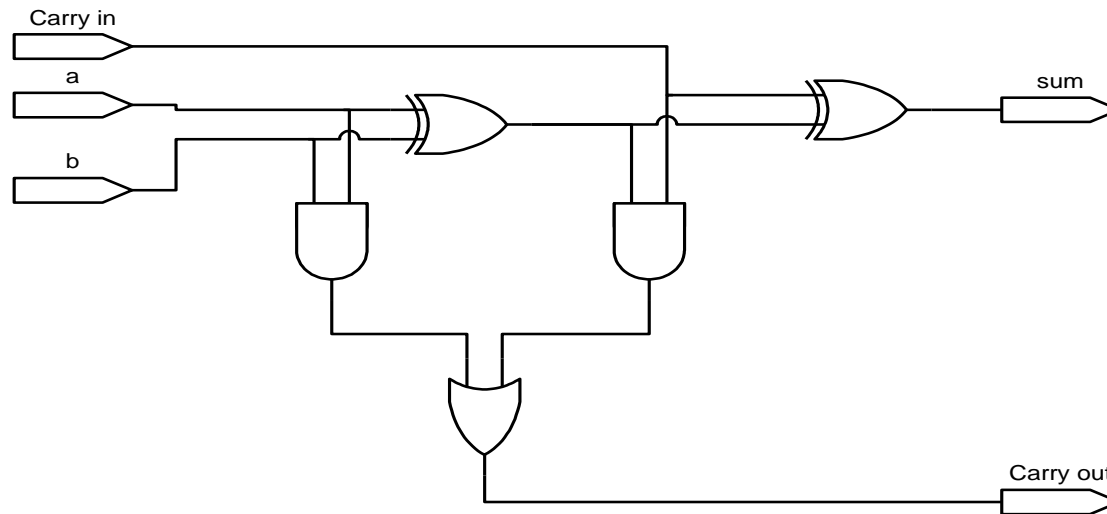
- Παράδειγμα:
  - Να φτιάξουμε κύκλωμα που εντοπίζει την υπερχείλιση στην περίπτωση πρόσθεσης αριθμών σε αναπαράσταση συμπληρώματος του δύο.



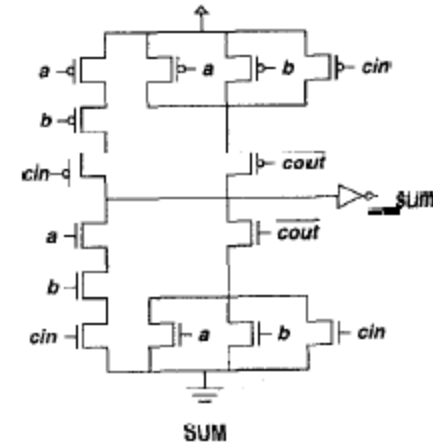
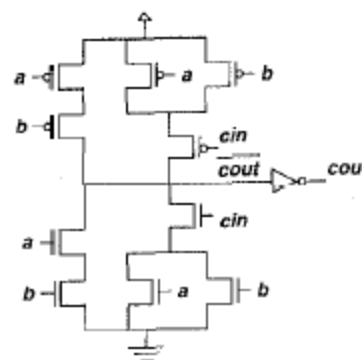
# Μνήμη 1 bit (Flip-Flop)



# Το Σύνηθες Δομικό Στοιχείο



Πλήρης Αθροιστής  
Ενός Δυαδικού  
Ψηφίου



# Αλγόριθμος Πρόσθεσης στο Επίπεδο του Δυαδικού Ψηφίου

$$S = A + B$$

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i, B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i \quad a_i, b_i \in \{0, 1\}$$

Λειτουργία την οποία υλοποιεί ένας πλήρης αθροιστής 1-bit

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i 2^i$$

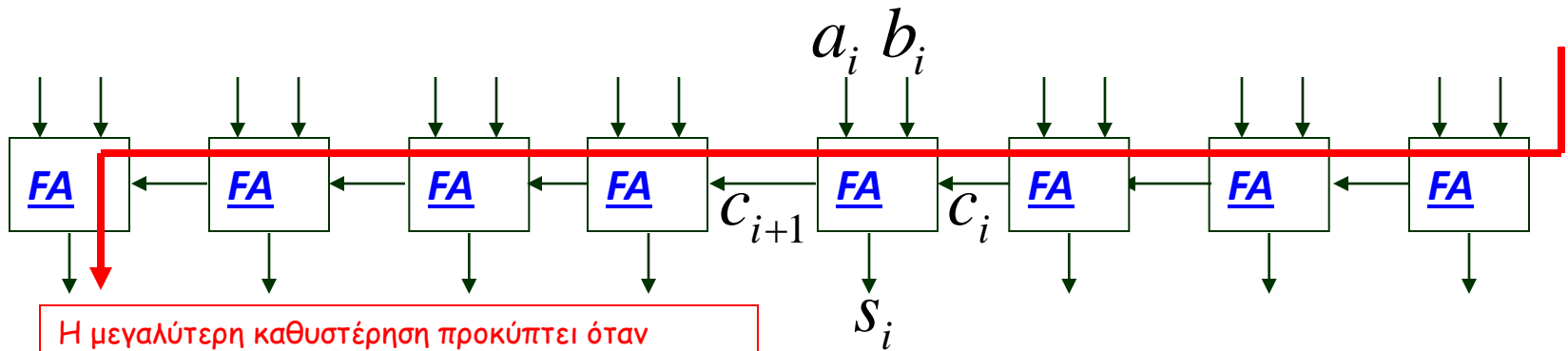
$$s_i = a_i \oplus b_i \oplus c_i$$

$$c_{i+1} = a_i b_i + a_i c_i + b_i c_i$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1$$



# Αθροιστής Κυματισμού Κρατουμένου (Ripple Carry)



Η μεγαλύτερη καθυστέρηση προκύπτει όταν ένα ψηφίο κρατουμένου προκαλεί αλλαγές σε όλα τα ψηφία μέχρις και το περισσότερο σημαντικό του αποτελέσματος.

Καθυστέρηση ενός FA

$$A = nA_{FA}$$

$$T_d \approx nT_{fa}$$

Εμβαδό ενός FA

Η πολυπλοκότητα της υλοποίησης εξαρτάται γραμμικά από το μήκος λέξης  $n$  των όρων.

Πλήθος FAs

Τέλος Ενότητας



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση **1.0** διαθέσιμη [εδώ](#).



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Αβούρης Νικόλαος, Παλιουράς Βασίλειος, Κουκιάς Μιχαήλ, Σγάρμπας Κυριάκος. «Εισαγωγή στους Υπολογιστές Ι, Ψηφιακή Αριθμητική». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

[https://eclass.upatras.gr/modules/course\\_metadata/opencourses.php?fc=15](https://eclass.upatras.gr/modules/course_metadata/opencourses.php?fc=15)



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

## **Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες**

**Διαφάνεια 5:** εικόνα από LabVIEW,

**Διαφάνεια 6:** <http://www.advancedsubstratenews.com/wp-content/uploads/2010/11/7asc11.jpg>,

**Διαφάνεια 7:** <http://techreport.com/r.x/2010q1/westmere-2c-6c.jpg>

**Διαφάνεια 8:** <http://www.anandtech.com/show/2928>

