



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΑΤΡΩΝ  
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά  
μαθήματα ΠΠ

# Κβαντική Επεξεργασία Πληροφορίας

Ενότητα 5: Μιγαδικοί Αριθμοί

Σγάρμπας Κυριάκος

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας  
Υπολογιστών

# Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας αυτής είναι μια εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς.



# Περιεχόμενα ενότητας

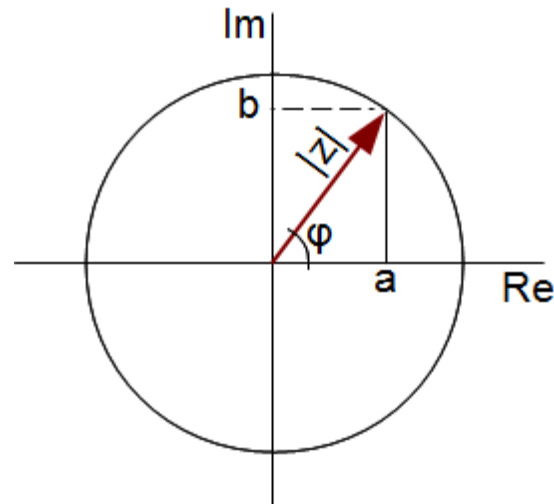
- Μιγαδικοί Αριθμοί
- Βασικοί Ορισμοί
- Υπολογισμός Φάσης
- Παράδειγμα



# Μιγαδικοί Αριθμοί

# Μιγαδικοί Αριθμοί

Σύντομη Υπενθύμιση Γνωστών Εννοιών



# Βασικοί Ορισμοί

Ορισμός Μιγαδικού Αριθμού  $z = a + ib$   $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $i = \sqrt{-1}$

Πραγματικό &  
Φανταστικό Μέρος  $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$

Συζυγής Μιγαδικός  $z^* = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)$

Μέτρο  $|z| = \sqrt{z z^*}$

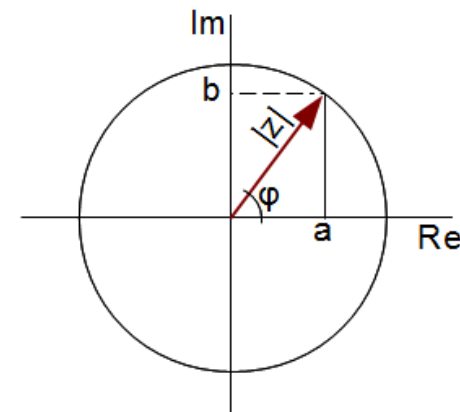
Φάση  $\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \right)$

Προσοχή  
στα πρόσημα

Καρτεσιανές Συντεταγμένες  $z = a + ib$

Πολικές Συντεταγμένες  
(εκθετική μορφή)

$z = |z| e^{i\varphi}$  Γιατί e;



# Γιατί e ;

Επειδή:  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \xrightarrow{x=i\varphi}$

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \dots \Leftrightarrow$$

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} + \dots \Leftrightarrow$$

$$e^{i\varphi} = \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots \right) + i \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \dots \right) \Leftrightarrow$$

$\cos(\varphi)$

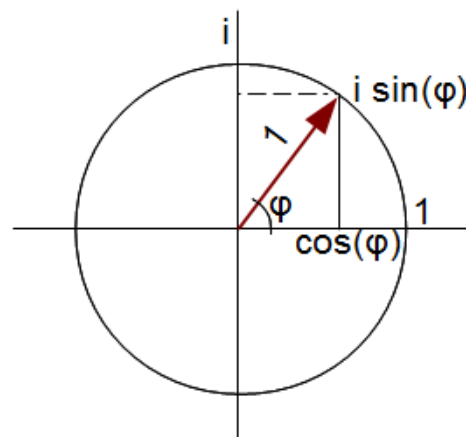
$\sin(\varphi)$

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Ο τελεστής + είναι overloaded. Όταν οι όροι είναι όμοιοι τους προσθέτει, όταν είναι ανόμοιοι, δημιουργεί διάνυσμα.

Επομένως το  $e^{i\varphi}$  είναι ένα διάνυσμα μήκους 1 το οποίο ως άθροισμα των δυο διανυσμάτων  $\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$  διατηρεί την πληροφορία της γωνίας.

Γι'αυτό πολλαπλασιαζόμενο με το μέτρο  $|z|$  δίνει το πλήρες διάνυσμα του μιγαδικού.



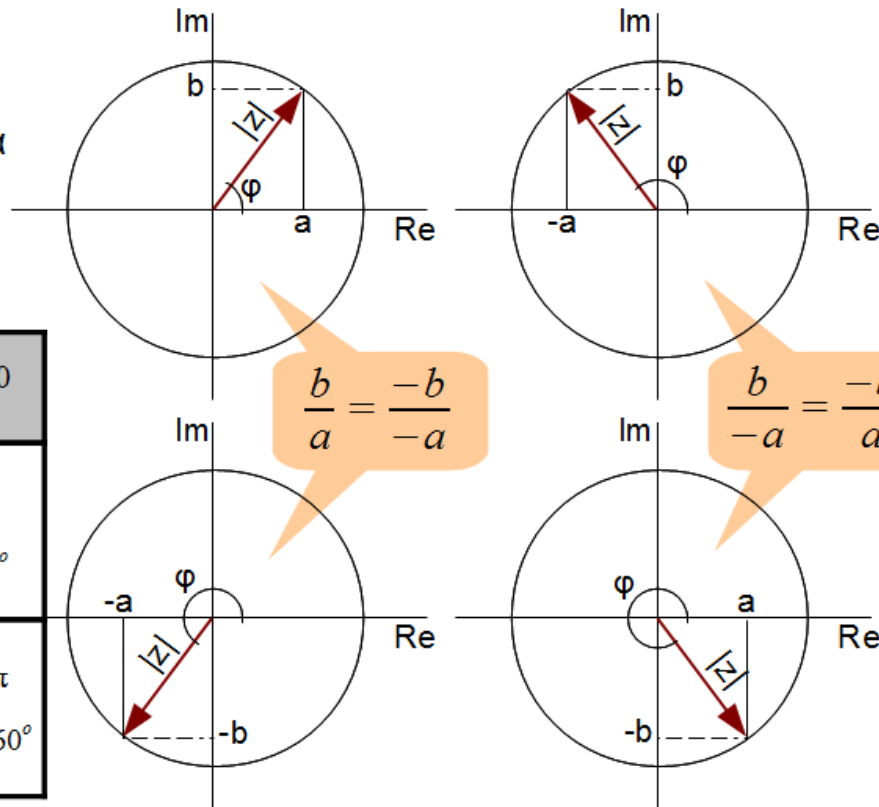
# Υπολογισμός Φάσης

Προσοχή  
στα πρόσημα

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)} \right)$$

Στη γωνία ίσως χρειαστεί να προσθέσουμε  $\pi$  ( $180^\circ$ ) για να βρεθεί στις περιοχές του πίνακα:

	$\text{Re}(z) \leq 0$ -	$\text{Re}(z) \geq 0$ +
$\text{Im}(z) \geq 0$ +	$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ $90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$	$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$
$\text{Im}(z) \leq 0$ -	$\pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ $180^\circ \leq \varphi \leq 270^\circ$	$\frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi$ $270^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$





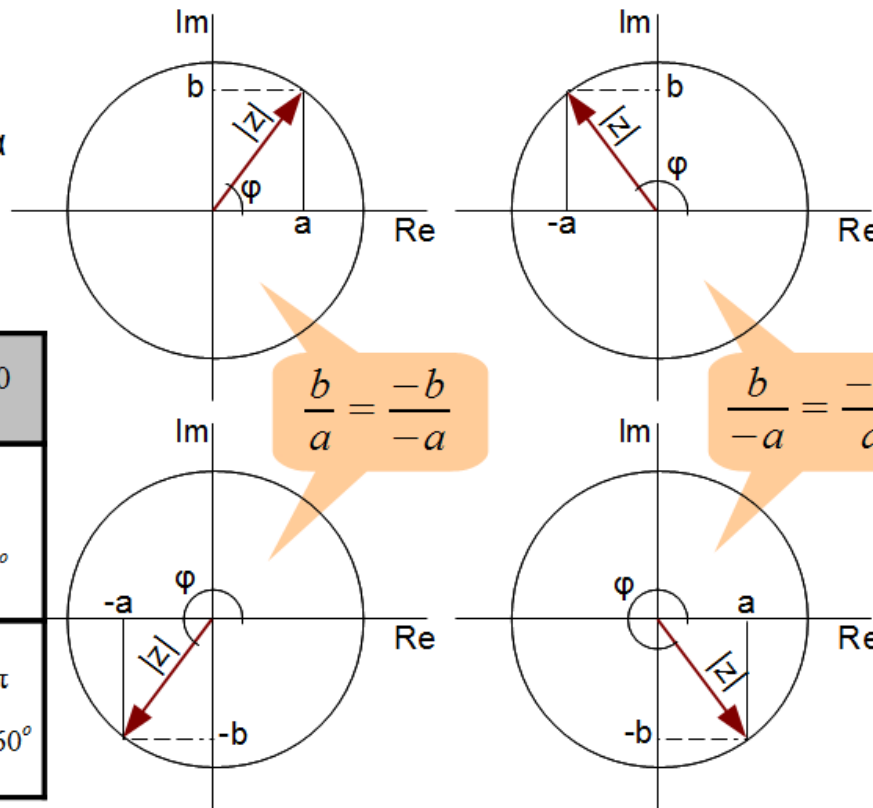
# Υπολογισμός Φάσης

Προσοχή  
στα πρόσημα

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)} \right)$$

Στη γωνία ίσως χρειαστεί να προσθέσουμε  $\pi$  ( $180^\circ$ ) για να βρεθεί στις περιοχές του πίνακα:

	$\text{Re}(z) \leq 0$ -	$\text{Re}(z) \geq 0$ +
$\text{Im}(z) \geq 0$ +	$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ $90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$	$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$
$\text{Im}(z) \leq 0$ -	$\pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ $180^\circ \leq \varphi \leq 270^\circ$	$\frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi$ $270^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$



# Παράδειγμα

Έστω οι μιγαδικοί  $z=3-6i$  και  $y=-3+6i$ . Να εκφραστούν σε εκθετική μορφή.

$$|z| = \sqrt{(3-6i)(3+6i)} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} \approx 6.71$$

$$|y| = \sqrt{(-3+6i)(-3-6i)} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} \approx 6.71$$

$$\varphi_z = \tan^{-1}\left(\frac{-6}{3}\right) = \tan^{-1}(-2) \approx -1.11 \text{ rad } (-63,43^\circ = 296.57^\circ)$$

$$\varphi_y = \tan^{-1}\left(\frac{6}{-3}\right) = \tan^{-1}(-2) \approx -1.11 \text{ rad } (-63,43^\circ = 296.57^\circ)$$

Αυτή η γωνία προϋποθέτει (από τον πίνακα) θετικό πραγματικό και αρνητικό φανταστικό μέρος. Άρα το  $\varphi_y$  χρειάζεται διόρθωση:

$$\varphi_y = -1.11 + \pi \approx 2.03 \text{ rad } (116.57^\circ)$$

Τελικά:

$$z = 6.71 e^{-1.11i} = 6.71 e^{5.17i}$$

$$y = 6.71 e^{2.03i}$$

Σημειωτέον ότι η αντίστροφη διαδικασία (από πολικές σε καρτεσιανές) δεν χρειάζεται κανέναν παρόμοιο έλεγχο:

$$\begin{aligned} 6.71(\cos(-1.11) + i \sin(-1.11)) &= \\ 6.71(\cos(5.17) + i \sin(5.17)) &\approx 3 - 6i = z \\ 6.71(\cos(2.03) + i \sin(2.03)) &\approx -3 + 6i = y \end{aligned}$$



Τέλος Ενότητας

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση **1.0** διαθέσιμη [εδώ](#).



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, **Σγάρμπας Κυριάκος**. «**Κβαντική Επεξεργασία Πληροφορίας, Μιγαδικοί Αριθμοί**». Έκδοση: **1.0**. Πάτρα **2014**.  
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

[https://eclass.upatras.gr/modules/course\\_metadata/opencourses.php?fc=15](https://eclass.upatras.gr/modules/course_metadata/opencourses.php?fc=15)



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

**Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες**

