ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

Κβαντική Επεξεργασία Πληροφορίας

Ενότητα 27: Αλγόριθμος Deutsch

Σγάρμπας Κυριάκος

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σκοποί ενότητας

Αλγόριθμος Deutsch

Περιεχόμενα ενότητας

- Αλγόριθμος Deutsch
- Γενίκευση αλγορίθμου

Αλγόριθμος Deutsch

Αλγόριθμος Deutsch

$$f(x):\{0,1\}\rightarrow\{0,1\}$$

$$f_0(0)=0$$
$$f_0(1)=0$$

$$f_1(0)=0$$
$$f_1(1)=1$$

$$f_2(0)=1$$
$$f_2(1)=0$$

$$f_3(0)=1$$
$$f_3(1)=1$$

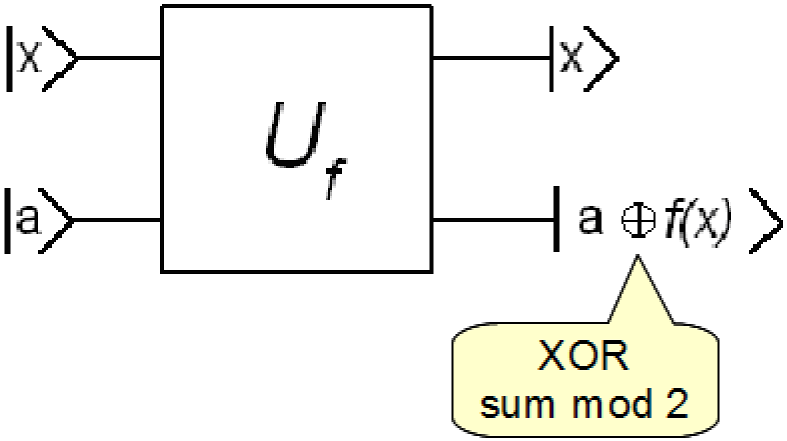
Ισορροπημένη

Σταθερή

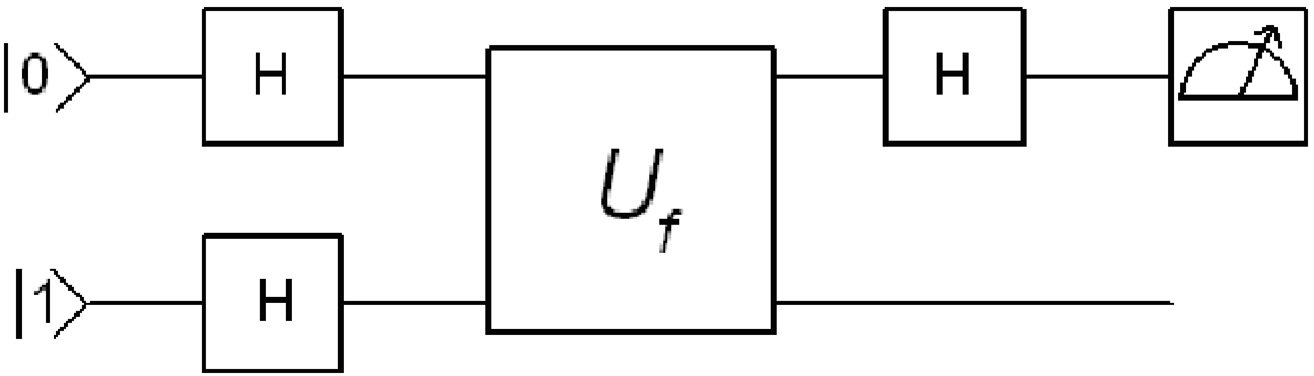
Με μια μόνο δοκιμή (μέτρηση) να βρεθεί αν μια άγνωστη συνάρτηση είναι σταθερή ή ισορροπημένη

δηλαδή αν ανήκει στο σύνολο $\{f_1,f_2\}$ ή στο $\{f_0,f_3\}$

D. Deutsch, "Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer", Proc. of the Royal Society London A, Vol.400, pp.97-117, 1985.



$$U_f|x\rangle|a\rangle = |x\rangle|a \oplus f(x)\rangle$$



$$U_f(H \otimes H|01\rangle) = \frac{U_f}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) = \frac{1}{2}(U_f|00\rangle - U_f|01\rangle + U_f|10\rangle - U_f|11\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}(|0\rangle|0 \oplus f(0)\rangle - |0\rangle|1 \oplus f(0)\rangle + |1\rangle|0 \oplus f(1)\rangle - |1\rangle|1 \oplus f(1)\rangle)$$

Η κατάσταση στην έξοδο του κυκλώματος είναι:

$$\frac{H\otimes I}{2}\left(|0\rangle|0\oplus f(0)\rangle-|0\rangle|1\oplus f(0)\rangle+|1\rangle|0\oplus f(1)\rangle-|1\rangle|1\oplus f(1)\rangle\right)$$

Εδώ το βιβλίο κάνει διάκριση περιπτώσεων για κάθε πιθανή f:

Η συνάρτηση $f(x)$ είναι:	Περίπτωση	Τελική κατάσταση $\lvert q_{+}\rangle$
Σταθερή	$f(0)=0$ και $f(1)=0$	$\lvert 0\rangle\left(\frac{\lvert 0\rangle-\lvert 1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$
	$f(0)=1$ και $f(1)=1$	$\lvert 0\rangle\left(\frac{\lvert 1\rangle-\lvert 0\rangle}{\sqrt{2}}\right)$
Ισορροπημένη	$f(0)=0$ και $f(1)=1$	$\lvert 1\rangle\left(\frac{\lvert 0\rangle-\lvert 1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$
	$f(0)=1$ και $f(1)=0$	$\lvert 1\rangle\left(\frac{\lvert 1\rangle-\lvert 0\rangle}{\sqrt{2}}\right)$

Αν συνεχίσουμε τις πράξεις μέχρι το τέλος...

$$\frac{H\otimes I}{2}\left(|0\rangle|0\oplus f(0)\rangle-|0\rangle|1\oplus f(0)\rangle+|1\rangle|0\oplus f(1)\rangle-|1\rangle|1\oplus f(1)\rangle\right)=$$

$$=\frac{1}{2}H\otimes I\left(|0\rangle|f(0)\rangle-|0\rangle|1-f(0)\rangle+|1\rangle|f(1)\rangle-|1\rangle|1-f(1)\rangle\right)=$$

$$=\frac{1}{2}H\otimes I\left(|0\rangle\otimes|f(0)\rangle-|0\rangle\otimes|1-f(0)\rangle+|1\rangle\otimes|f(1)\rangle-|1\rangle\otimes|1-f(1)\rangle\right)=$$

$$|f(0)\rangle=(1-f(0))|0\rangle+f(0)|1\rangle \qquad |1-f(0)\rangle=f(0)|0\rangle+(1-f(0))|1\rangle$$

$$|f(1)\rangle=(1-f(1))|0\rangle+f(1)|1\rangle \qquad |1-f(1)\rangle=f(1)|0\rangle+(1-f(1))|1\rangle$$

$$=\frac{1}{2}H\otimes I\left(|0\rangle\otimes((1-f(0))|0\rangle+f(0)|1\rangle)-|0\rangle\otimes(f(0)|0\rangle+(1-f(0))|1\rangle)+\cdots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(H|0\rangle\otimes((1-f(0))|0\rangle+f(0)|1\rangle)-H|0\rangle\otimes(f(0)|0\rangle+(1-f(0))|1\rangle)+\cdots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\otimes((1-f(0))|0\rangle+f(0)|1\rangle)-\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\otimes(f(0)|0\rangle+(1-f(0))|1\rangle)+\cdots\right)=$$

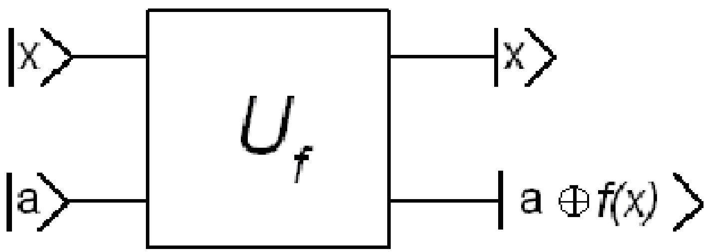
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left((1-f(0)-f(1))|00\rangle+(f(0)+f(1)-1)|01\rangle+(f(1)-f(0))|10\rangle+(f(0)-f(1))|11\rangle\right)$$

$$=\left((1-f(0)-f(1))|0\rangle+(f(1)-f(0))|1\rangle\right)\otimes\left(\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

ΤΕΛΙΚΑ

Εξήγηση με Πίνακες

Πρώτα υπολογίζουμε τον πίνακα της πύλης U_f:



$$U_f|x\rangle|a\rangle = |x\rangle|a \oplus f(x)\rangle$$

$$U_f|00\rangle = |0\rangle|0 \oplus f(0)\rangle = |0\,f(0)\rangle$$
$$U_f|01\rangle = |0\rangle|1 \oplus f(0)\rangle = |0\,\overline{f(0)}\rangle$$
$$U_f|10\rangle = |1\rangle|0 \oplus f(1)\rangle = |1\,f(1)\rangle$$
$$U_f|11\rangle = |1\rangle|1 \oplus f(1)\rangle = |1\,\overline{f(1)}\rangle$$

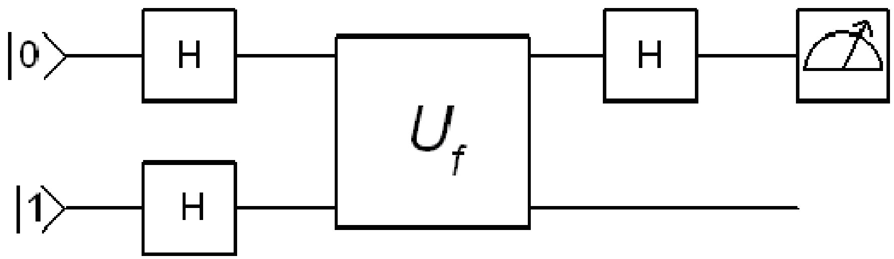
$$U_f = \begin{bmatrix} \langle 00|U_f|00\rangle & \langle 00|U_f|01\rangle & \langle 00|U_f|10\rangle & \langle 00|U_f|11\rangle \\ \langle 01|U_f|00\rangle & \langle 01|U_f|01\rangle & \langle 01|U_f|10\rangle & \langle 01|U_f|11\rangle \\ \langle 10|U_f|00\rangle & \langle 10|U_f|01\rangle & \langle 10|U_f|10\rangle & \langle 10|U_f|11\rangle \\ \langle 11|U_f|00\rangle & \langle 11|U_f|01\rangle & \langle 11|U_f|10\rangle & \langle 11|U_f|11\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 00|0\,f(0)\rangle & \langle 00|0\,\overline{f(0)}\rangle & \langle 00|1\,f(1)\rangle & \langle 00|1\,\overline{f(1)}\rangle \\ \langle 01|0\,f(0)\rangle & \langle 01|0\,\overline{f(0)}\rangle & \langle 01|1\,f(1)\rangle & \langle 01|1\,\overline{f(1)}\rangle \\ \langle 10|0\,f(0)\rangle & \langle 10|0\,\overline{f(0)}\rangle & \langle 10|1\,f(1)\rangle & \langle 10|1\,\overline{f(1)}\rangle \\ \langle 11|0\,f(0)\rangle & \langle 11|0\,\overline{f(0)}\rangle & \langle 11|1\,f(1)\rangle & \langle 11|1\,\overline{f(1)}\rangle \end{bmatrix} =$$

$$|f(0)\rangle = \begin{bmatrix} 1-f(0) \\ f(0) \end{bmatrix} \qquad |\overline{f(0)}\rangle = \sigma_X|f(0)\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-f(0) \\ f(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0) \\ 1-f(0) \end{bmatrix} \qquad |f(1)\rangle = \begin{bmatrix} 1-f(1) \\ f(1) \end{bmatrix} \qquad |\overline{f(1)}\rangle = \sigma_X|f(1)\rangle = \begin{bmatrix} f(1) \\ 1-f(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \langle 00|0\,f(0)\rangle & \langle 00|0\,\overline{f(0)}\rangle & 0 & 0 \\ \langle 01|0\,f(0)\rangle & \langle 01|0\,\overline{f(0)}\rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle 10|1\,f(1)\rangle & \langle 10|1\,\overline{f(1)}\rangle \\ 0 & 0 & \langle 11|1\,f(1)\rangle & \langle 11|1\,\overline{f(1)}\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-f(0) & f(0) & 0 & 0 \\ f(0) & 1-f(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-f(1) & f(1) \\ 0 & 0 & f(1) & 1-f(1) \end{bmatrix}$$

$$\langle 11|\left(|1\rangle \otimes |\overline{f(1)}\rangle\right) = [0\ 0\ 0\ 1]\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} f(1) \\ 1-f(1) \end{bmatrix}\right) = [0\ 0\ 0\ 1]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(1) \\ 1-f(1) \end{bmatrix}$$

Και μετά εκτελούμε τον υπολογισμό του κυκλώματος:



$$(H \otimes I)U_f(H \otimes H)|01\rangle =$$

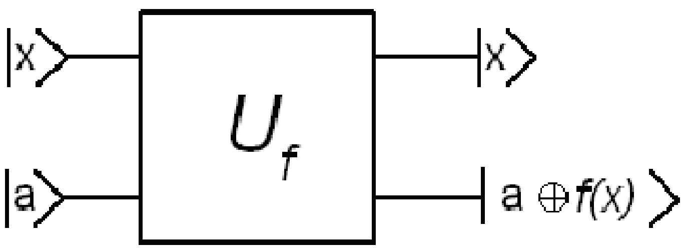
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-f(0) & f(0) & 0 & 0 \\ f(0) & 1-f(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-f(1) & f(1) \\ 0 & 0 & f(1) & 1-f(1) \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1-f(0)-f(1) \\ f(0)+f(1)-1 \\ f(1)-f(0) \\ f(0)-f(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 1-f(0)-f(1) \\ f(1)-f(0) \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Προδιαγεγραμμένο. Δε χρειάζεται να μετρηθεί

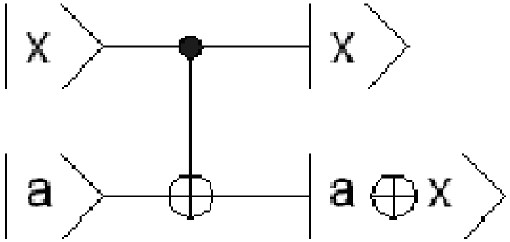
$$\begin{cases} xz = 1-f(0)-f(1) \\ xw = f(0)+f(1)-1 \\ yz = f(1)-f(0) \\ yw = f(0)-f(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = -z \\ x = (1-f(0)-f(1))/z \\ y = (f(1)-f(0))/z \\ z \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \frac{1}{z}(1-f(0)-f(1)) \\ \frac{1}{z}(f(1)-f(0)) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} z \\ -z \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1-f(0)-f(1) \\ f(1)-f(0) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

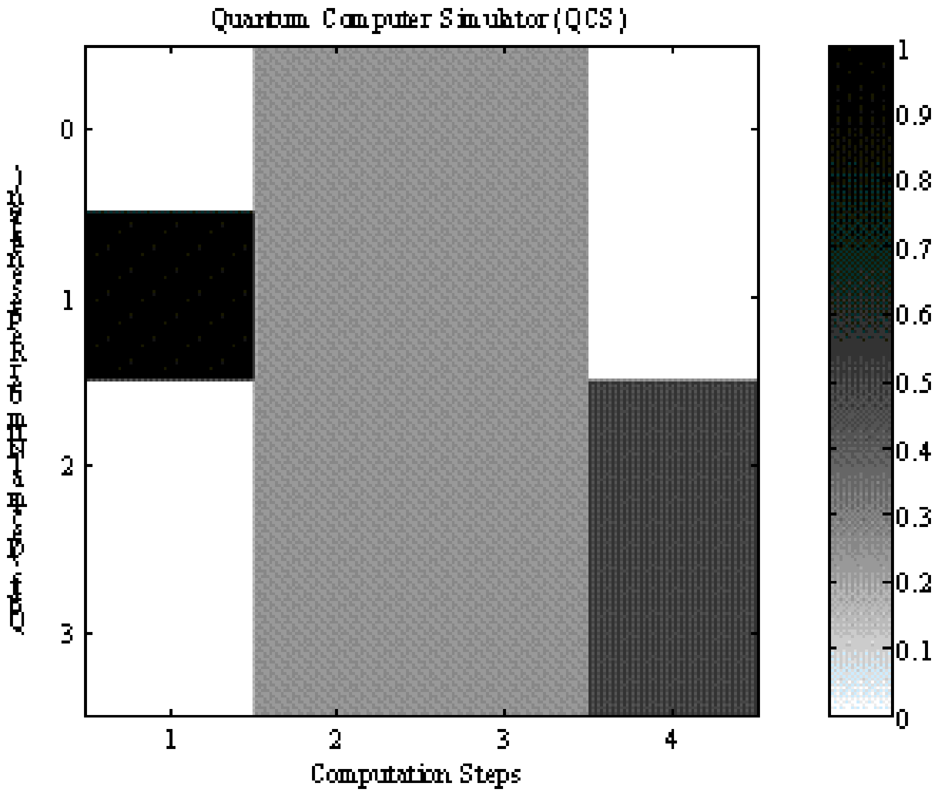
Παράδειγμα: f_1



αν $f = f_1$

U_f = CNOT





Προσοχή

(Προς αποφυγήν παρεξηγήσεων)

Ο αλγόριθμος του Deutsch δεν μας προσφέρει κάποιο κέρδος πληροφορίας.

Με μία μέτρηση μειώνει το αρχικό πιθανό σύνολο συναρτήσεων στη μέση, ακριβώς όπως και μια κλασσική μέτρηση 1 bit.

Δηλαδή, πριν τη μέτρηση γνωρίζουμε ότι: $f \in \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$

Μετά τη μέτρηση περιορίζουμε την πιθανότητα σε ένα από τα:

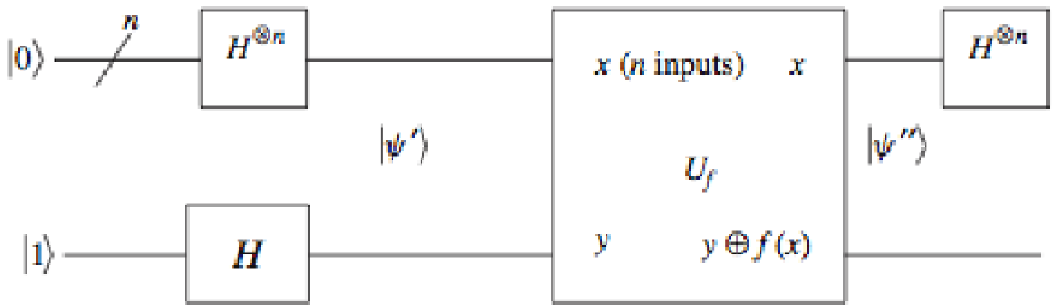
$$f \in \{f_0, f_3\} \qquad\qquad f \in \{f_1, f_2\}$$

Μια αντίστοιχη κλασσική μέτρηση θα έδινε ένα από τα:

$$f \in \{f_0, f_1\} \qquad\qquad f \in \{f_2, f_3\}$$

Δηλαδή η μόνη διαφορά βρίσκεται στην ομαδοποίηση των συναρτήσεων στα υποσύνολα.

Γενίκευση: Αλγόριθμος Deutsch-Jozsa



αν όλα μετρηθούν 0,
η συνάρτηση είναι
σταθερή

$$|\psi'\rangle = (H^{\otimes n})(|0\rangle^{\otimes n}) \otimes (H|1\rangle)$$

$$|\psi''\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_x (-1)^{f(x)} |x\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$|\psi_{out}\rangle = \frac{1}{2^n} \sum_y \sum_x (-1)^{xy+f(x)} |y\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

D. Deutsch, R. Jozsa, "Rapid Solution of Problems by Quantum Computation", Proc. of the Royal Society of London Ser A., A439, 553-558 (1992)

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες