



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Κβαντική Επεξεργασία Πληροφορίας

Ενότητα 12: Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Σγάρμπας Κυριάκος

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας
Υπολογιστών

Σκοποί ενότητας

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα



Περιεχόμενα ενότητας

- Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα
- Ιδιότητες
- Πιθανότητα μέτρησης



Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα

$$A|x\rangle = \lambda|x\rangle \Leftrightarrow A|x\rangle - \lambda|x\rangle = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)|x\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(4 - \lambda) - 2(-1) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$



Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα

$$\lambda_1 = 2 \Rightarrow A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I)|x_1\rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = -c_2 \Rightarrow |x_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Συντελεστής
Κανονικοποίησης

$$\lambda_2 = 3 \Rightarrow A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I)|x_2\rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d_2 = -2d_1 \\ 2d_1 + d_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$



Ιδιότητες

- Το πλήθος των ιδιοτιμών ισούται με το μέγεθος του πίνακα ($N \times N \Rightarrow N$ ιδιοτιμές)
- Το πλήθος των ιδιοδιανυσμάτων ισούται με το πλήθος των ιδιοτιμών (συνήθως τα κανονικοποιούμε επειδή το ιδιοδιάνυσμα πολλαπλασιασμένο επί έναν πραγματικό αριθμό παραμένει το ίδιο ιδιοδιάνυσμα)
- Το ίχνος (trace) του πίνακα (το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου) ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών του
- Η ορίζουσα του πίνακα ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του
- Αν ο πίνακας είναι ερμιτιανός οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές και τα ιδιοδιανύσματα ορθογώνια (εσωτερικό γινόμενο μηδέν)



Πιθανότητα Μέτρησης

- Έστω ένα κβαντικό σύστημα Q
- M ένας ερμιτιανός πίνακας που αντιστοιχεί σε ένα παρατηρήσιμο μέγεθος του Q
- λ μια ιδιοτιμή του M
- $|x\rangle$ το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην λ
- $|k\rangle$ το διάνυσμα κατάστασης που περιγράφει σε ποιά κατάσταση βρίσκεται το Q
- τότε η πιθανότητα η μέτρηση του M για το διάνυσμα $|k\rangle$ να δώσει τιμή λ είναι: $\langle k|x\rangle\langle x|k\rangle$ (δύο τρόποι να το δούμε)



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση **1.0** διαθέσιμη [εδώ](#).



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, **Σγάρμπας Κυριάκος**. «**Κβαντική Επεξεργασία Πληροφορίας, Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα**». Έκδοση: **1.0**. Πάτρα **2014**. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

https://eclass.upatras.gr/modules/course_metadata/opencourses.php?fc=15



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

