ΕΕ728 (22Α004) - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
3η σειρά ασκήσεων – Ενδεικτικές Λύσεις

1. **Υποβέλτιστοι κώδικες – Cover & Thomas 7.9**

   Θεωρήστε το κανάλι Z με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$Q = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{array} \right] \quad x, y \in \{0, 1\}.$$

   Έστω ότι κατασκευάζουμε τυχαίο κώδικα $\left(2^{nR}, n\right)$ με ρίψεις *αμερόληπτου* κέρματος. Με τον τρόπο αυτό δεν επιτυγχάνουμε μετάδοση με τη χωρητικότητα (γιατί;). Βρείτε το μέγιστο εφικτό ρυθμό μετάδοσης, R, ώστε η *μέση* τιμή της πιθανότητας σφάλματος $P_e^{(n)}$ επί όλων των κωδίκων που κατασκευάζονται τυχαία με αμερόληπτες ρίψεις να τείνει στο 0 καθώς το μήκος, n, του κώδικα τείνει στο άπειρο.

   Απάντηση:

   Στο μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας" βρήκαμε ότι το κανάλι Z με $f \triangleq \Pr\{Y = 0|X = 1\} = 1/2$ έχει χωρητικότητα $C = H(1/5) - 2/5$ η οποία επιτυγχάνεται με $p = \Pr\{X = 1\} = 2/5$. Αν μεταδώσουμε με $p = 1/2$ (αμερόληπτο κέρμα),

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= H\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\approx 0.8113 - \frac{1}{2} = 0.3113 < 0.322 \approx C. \end{aligned}$$

   Συνεπώς, ο ρυθμός μετάδοσης που επιτυγχάνεται αν χρησιμοποιήσουμε αμερόληπτο κέρμα για τη δημιουργία του κώδικα είναι μικρότερος από τη χωρητικότητα του καναλιού Z με $f = 1/2$.

   Ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορούμε να επιτύχουμε είναι $R = 0.3113$.

2. **Κανάλι διακριτών εισόδων, συνεχών εξόδων – Cover & Thomas 9.15**

   Έστω $\Pr\{X = 1\} = p$, $\Pr\{X = 0\} = 1-p$ και $Y = X+Z$, όπου η Z είναι κατανεμημένη *ομοιόμορφα* στο διάστημα $[0, a]$, $a > 1$. Επίσης, η Z είναι ανεξάρτητη της X.

   (α) Υπολογίστε την $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$.

   Απάντηση:

   $H(X) = H(p)$.

   Για τον υπολογισμό της $H(X|Y)$ διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

(α') $Y < 1$: $X = 0$ με πιθανότητα 1.

(β') $Y > a$: $X = 1$ με πιθανότητα 1.

(γ') $1 \leq Y \leq a$: $X = 0$ ή 1 με πιθανότητα $1 - p$ και p, αντιστοίχως.

Συνεπώς, $H(X|Y) = \text{Pr}\{Y \in [1,a]\} H(X|Y \in [1,a]) = \frac{a-1}{a} H(p) = \left(1 - \frac{1}{a}\right) H(p)$.
Άρα, $I(X;Y) = H(p) + H(p)\left(\frac{1}{a} - 1\right) = \frac{1}{a} H(p)$.

Παρατηρήστε ότι, για $a = 1$, $I(X;Y) = H(p)$. Επίσης, η σχέση δεν ισχύει για $a < 1$. Στην περίπτωση αυτή $H(X|Y) = 0$ και $I(X;Y) = H(p)$. Καθώς το a αυξάνει, αυξάνει και η περιοχή "επικάλυψης" των εξόδων που αντιστοιχούν σε $X = 0$ και 1, με αποτέλεσμα να ελαττώνεται και η πληροφορία που μπορούμε να μεταδώσουμε μέσα στο κανάλι.

(β) Υπολογίστε, τώρα, την $I(X;Y)$ με διαφορετικό τρόπο, με χρήση της $I(X;Y) = h(Y) - h(Y|X)$.

Απάντηση:

$h(Y|X) = h(Z) = -\int_0^a \frac{1}{a} \log \frac{1}{a} da = \log a$.
Για να βρούμε την $h(Y)$ υπολογίζουμε τη σ.π.π. της Y:

$$f_Y(y) = \begin{cases} (1-p)/a & \text{για} \quad 0 \leq y < 1 \\ 1/a & \text{για} \quad 1 \leq y < a \\ p/a & \text{για} \quad a \leq y < 1 + a \end{cases}$$

Με πράξεις,

$$h(Y) = -\int_0^{1+a} f_Y(y) \log_2 f_Y(y) dy = \frac{1}{a} H(p) + \log a.$$

Επομένως, και πάλι, όπως περιμέναμε, $I(X;Y) = \frac{1}{a} H(p)$.

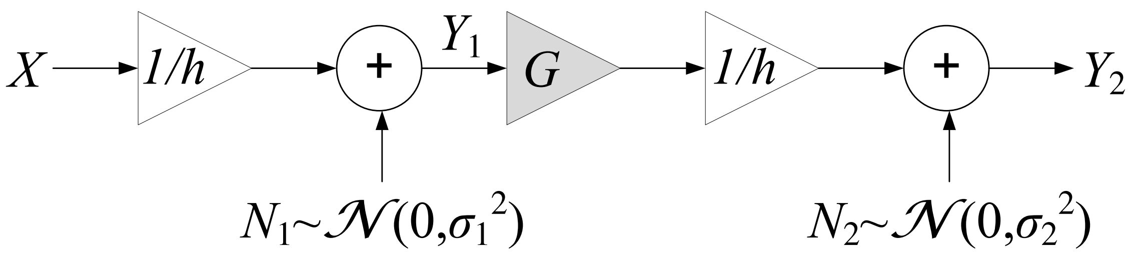
(γ) Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού μεγιστοποιώντας ως προς p.

Απάντηση:

Παρατηρούμε εύκολα ότι, για οποιοδήποτε a, η χωρητικότητα επιτυγχάνεται με $p = 1/2$. $C = \frac{1}{a}$ bits/χρήση του καναλιού.

3. **Κανάλι με αναμεταδότη (Τελική Εξέταση Θ. Π., Φεβρουάριος 2009)**

Προκειμένου να μεταδώσουμε πληροφορία σε μεγάλη απόσταση χρησιμοποιούμε το κανάλι με αναμεταδότη του Σχήματος 1.



Σχήμα 1: Κανάλι με αναμεταδότη που ενισχύει το σήμα.

Τα δύο κανάλια πριν και μετά τον αναμεταδότη εισάγουν απόσβεση $|h| > 1$ και Γκαουσιανό θόρυβο N_i μηδενικής μέσης τιμής. Δηλαδή, για το σήμα Y_1 στην είσοδο του αναμεταδότη ισχύει $Y_1 = \frac{1}{h}X + N_1$. Ο αναμεταδότης (στην ουσία ένας ενισχυτής) πολλαπλασιάζει το Y_1 με $|G| > 1$. Θεωρήστε ότι η μέση ισχύς του σήματος X στην είσοδο του καναλιού ισούται με P. Επίσης, θεωρήστε ότι θόρυβοι N_i είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και ανεξάρτητοι της X.

Θεωρούμε ότι ο δέκτης γνωρίζει τις τιμές των h και G, καθώς και τις τιμές της διασποράς των Γκαουσιανών θορύβων N_1 και N_2, σ_1^2 και σ_2^2, αντιστοίχως.

(α) Βρείτε το μέγιστο αριθμό bits που μπορούμε να μεταδώσουμε κάθε φορά που χρησιμοποιούμε το κανάλι με είσοδο X και έξοδο Y_2 (συναρτήσει των P, h, G, σ_1 και σ_2), καθώς και την κατανομή εισόδου που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε. Πρέπει να αιτιολογήσετε επαρκώς την απάντησή σας.

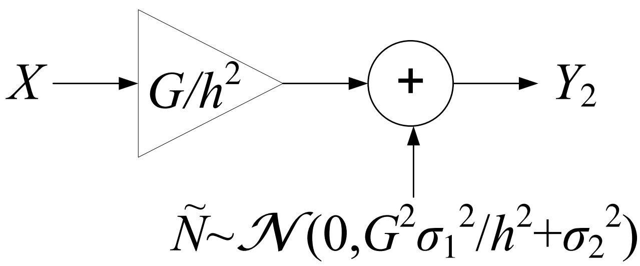
Απάντηση:

Για το σήμα στην έξοδο του καναλιού μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} Y_2 &= \frac{1}{h}G\left(\frac{1}{h}X + N_1\right) + N_2 \\ &= \frac{G}{h^2}X + \frac{G}{h}N_1 + N_2 \\ &= \frac{G}{h^2}X + \tilde{N}. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός Γκαουσιανών τ.μ. είναι Γκαουσιανή τ.μ., η τ.μ. $\tilde{N}$ είναι Γκαουσιανή με μέση τιμή 0 και διασπορά $\frac{G^2}{h^2}\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ (επειδή οι θόρυβοι είναι ανεξάρτητοι).

Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ισοδύναμο μοντέλο καναλιού του Σχήματος 2.



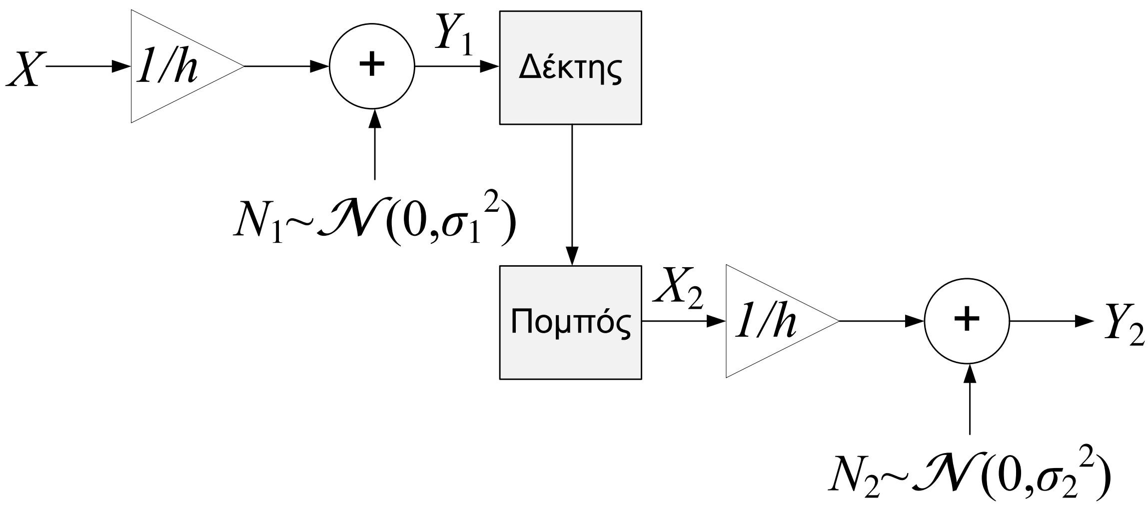
Σχήμα 2: Ισοδύναμο μοντέλο καναλιού με αναμεταδότη που ενισχύει το σήμα.

Ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης ισούται με τη χωρητικότητα του καναλιού. Δεδομένου ότι το αρχικό κανάλι ισοδυναμεί με αυτό του Σχήματος 2, η χωρητικότητά του μπορεί να επιτευχθεί με χρήση Γκαουσιανής κατανομής εισόδου: $X \sim \mathcal{N}(0, P)$. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι η χωρητικότητα Γκαουσιανού καναλιού ισούται με

$\frac{1}{2}\log_2(1+\text{SNR})$. Επομένως,

$$
\begin{aligned}
C_{\text{amplify-and-forward}} &= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[\tilde{N}^2]}\right)\\
&= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\frac{G^2}{h^4}P}{\frac{G^2}{h^2}\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{h^2(\sigma_1^2+h^2\sigma_2^2/G^2)}\right).
\end{aligned}
$$

(β) Έστω, τώρα, ότι, αντί για ενισχυτή, ο αναμεταδότης αποτελείται από ένα δέκτη και ένα πομπό, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Κανάλι με αναμεταδότη που αποκωδικοποιεί, επανακωδικοποιεί και επαναμεταδίδει.

Ο δέκτης του αναμεταδότη αποκωδικοποιεί το μήνυμα και ο πομπός του το επανακωδικοποιεί και το επαναμεταδίδει, πάλι με ισχύ P. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός bits που μπορούμε να μεταδώσουμε σε αυτήν την περίπτωση και ποιες κατανομές πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για τις X και X_2;

Απάντηση:

Ο μέγιστος ρυθμός με τον οποίο μπορούμε να μεταδώσουμε από την είσοδο του καναλιού έως το δέκτη του αναμεταδότη ισούται με τη χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού έως τον αναμεταδότη

$$
C_{\text{left}} = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\frac{P}{h^2}}{\sigma_1^2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{h^2\sigma_1^2}\right)
$$

και επιτυγχάνεται με χρήση Γκαουσιανής κατανομής: $X \sim \mathcal{N}(0, P)$.

Ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορούμε να επιτύχουμε από τον πομπό του αναμεταδότη έως την έξοδο του καναλιού ισούται με τη χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού από την έξοδο του αναμεταδότη έως την έξοδο του καναλιού

$$
C_{\text{right}} = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\frac{P}{h^2}}{\sigma_2^2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{h^2\sigma_2^2}\right).
$$

Η X_2 πρέπει να ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή: $X_2 \sim \mathcal{N}(0, P)$.

Ο μέγιστος επιτεύξιμος ρυθμός στο κανάλι θα καθοριστεί από το κομμάτι του καναλιού που έχει τη μικρότερη χωρητικότητα. Επομένως,

$$\begin{aligned} C_{\text{decode-and-reencode}} &= \min\left\{C_{\text{left}}, C_{\text{right}}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\min\left\{\log\left(1+\frac{P}{h^2\sigma_1^2}\right), \log\left(1+\frac{P}{h^2\sigma_2^2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

(γ) Εάν η πολυπλοκότητα του αναμεταδότη δεν αποτελεί περιοριστικό παράγοντα και $G = h$ (ώστε το σήμα πληροφορίας στην έξοδο του αναμεταδότη-ενισχυτή να έχει ενέργεια P και να είναι δίκαιη η σύγκριση με τον αναμεταδότη-πομποδέκτη), ποια από τις δύο υλοποιήσεις του αναμεταδότη οδηγεί στο μέγιστο επιτεύξιμο ρυθμό μετάδοσης;

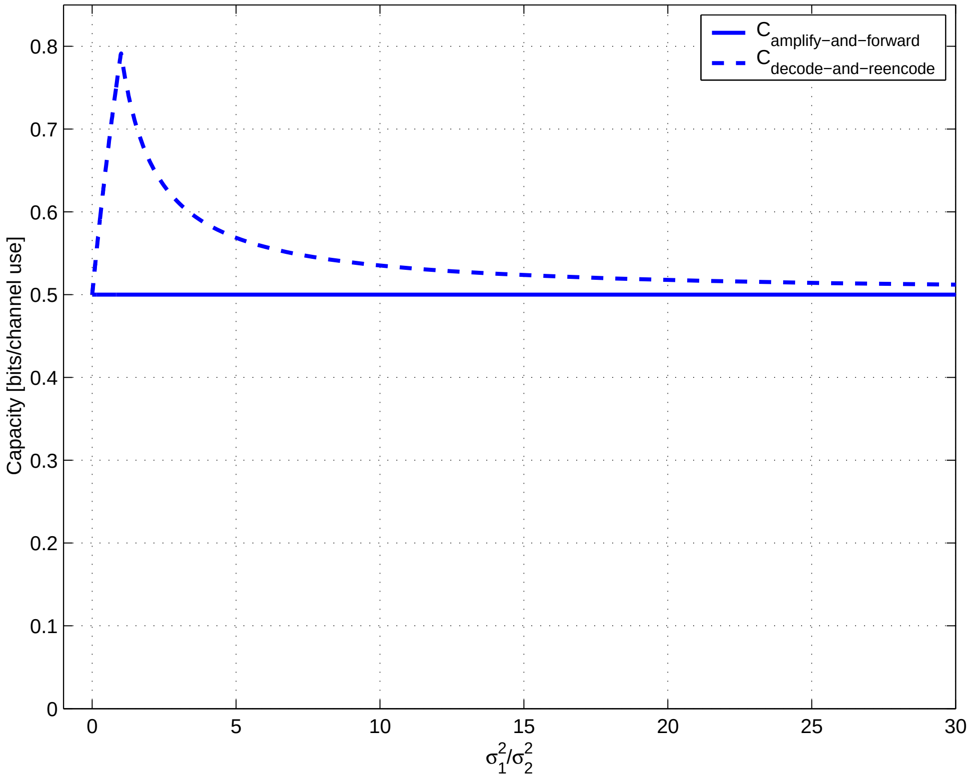
Απάντηση:

Παρατηρούμε ότι, για $G = h$, ισχύει πάντοτε $C_{\text{amplify-and-forward}} < C_{\text{decode-and-reencode}}$ για οποιαδήποτε τιμή του G (εκτός από την ακραία περίπτωση όπου $\sigma_2 = 0$, οπότε οι δύο χωρητικότητες ισούνται). Όταν $\sigma_1 < \sigma_2$, προφανώς $C_{\text{decode-and-reencode}} = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{h^2\sigma_2^2}\right) > \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{h^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right) = C_{\text{amplify-and-forward}}$. Παρομοίως, όταν $\sigma_1 \geq \sigma_2$, $C_{\text{decode-and-reencode}} = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{h^2\sigma_1^2}\right) > \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{h^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right) = C_{\text{amplify-and-forward}}$.

Ο αναμεταδότης-ενισχυτής, εκτός από το ωφέλιμο σήμα ενισχύει και το θόρυβο. Επομένως, παρόλο που βελτιώνει τη "σθεναρότητα" του σήματος X_2 που θα μεταδοθεί στο δεύτερο κανάλι, δε συμβάλλει καθόλου στην ανάκτηση πληροφορίας από το σήμα που λαμβάνει. Αντίθετα, εφόσον ο ρυθμός μετάδοσης στο πρώτο κανάλι δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητα, ο αναμεταδότης-αποκωδικοποιητής ανακτά το αρχικό σήμα με πιθανότητα σφάλματος αυθαίρετα κοντά στο 0. Δηλαδή, αφαιρεί το θόρυβο N_1 από το σήμα πριν το στείλει στο δεύτερο κανάλι. Φυσικά, μπορεί να αφαιρέσει το θόρυβο μόνο εάν είναι σε θέση να αποκωδικοποιήσει την πληροφορία χωρίς σφάλμα το οποίο απαιτεί η μετάδοση να γίνεται με ρυθμό που δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητα. Το κέρδος είναι μεγάλο όταν τα κανάλια έχουν συγκρίσιμο θόρυβο. Όταν ο θόρυβος στο ένα κανάλι είναι δυσανάλογα μεγάλος σε σχέση με το άλλο κανάλι, η χρήση του αναμεταδότη-πομποδέκτη δεν οδηγεί σε σημαντική αύξηση της χωρητικότητας. Μπορεί να αποδειχτεί εύκολα ότι το μεγαλύτερο κέρδος εμφανίζεται όταν $C_{\text{left}} = C_{\text{right}}$.

Στο Σχήμα 4 έχουν σχεδιαστεί οι $C_{\text{amplify-and-forward}}$ και $C_{\text{decode-and-reencode}}$ συναρτήσει του σ_1^2/σ_2^2 για $P = 1$, $G = h = 1$ και $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1$. Η $C_{\text{amplify-and-forward}}$ είναι σταθερή δεδομένου ότι $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1$. Η μεγαλύτερη διαφορά με τη $C_{\text{decode-and-reencode}}$ εμφανίζεται όταν $\sigma_1 = \sigma_2$, οπότε $C_{\text{left}} = C_{\text{right}}$.

Ένα πλεονέκτημα της μεθόδου amplify-and-forward είναι ότι απαιτείται μόνο ένα (τεράστιο) βιβλίο κωδίκων και ένας αποκωδικοποιητής, ενώ η μέθοδος decode-and-reencode απαιτεί 2 (τεράστια) βιβλία κωδίκων και δύο αποκωδικοποιητές, με



Σχήμα 4: Σύγκριση χωρητικοτήτων των καναλιών που αντιστοιχούν στις δύο υλοποιήσεις του αναμεταδότη.

αποτέλεσμα η καθυστέρηση μετάδοσης και οι απαιτήσεις σε μνήμη και υπολογισμούς να είναι μεγαλύτερες.

4. **Waterfilling με περιορισμό μέγιστης ισχύος (Προχωρημένα Θέματα Θ. Π., Τελική Εξέταση, Ιούνιος 2010)**

   Σε ορισμένες περιπτώσεις, ενδέχεται να μη θέλουμε να υπερβούμε μια συγκεκριμένη τιμή ισχύος στον πομπό, ακόμα και εάν η ισχύς είναι διαθέσιμη (για παράδειγμα, για λόγους λειτουργίας του ενισχυτή ή για να μην προκαλέσουμε παρεμβολές σε γειτονικές συνδέσεις). Στο πρόβλημα αυτό θα εξετάσουμε πώς πρέπει να μεταβάλουμε τη λύση waterfilling για να ικανοποιήσουμε και ένα περιορισμό μέγιστης ισχύος εκπομπής, $P_{\mathsf{max},k}$, για κάθε χρήστη, k.

   Θεωρούμε παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια και *συνολική* διαθέσιμη ισχύ P. Η διασπορά του θορύβου σε κάθε κανάλι ισούται με N_k. Η διαθέσιμη ισχύς μπορεί να κατανεμηθεί στα κανάλια όπως επιθυμούμε, αρκεί, σε κάθε κανάλι, η ισχύς να μην υπερβαίνει μια μέγιστη τιμή $P_{\mathsf{max},k}$. Διευκρινίζεται ότι, στη γενική περίπτωση, η $P_{\mathsf{max},k}$ δεν είναι η ίδια για όλα τα κανάλια.

   (α) Θεωρούμε, κατ’ αρχάς, την περίπτωση 2 χρηστών, δηλαδή $K = 2$. Επίσης, *μόνο* σε αυτό το ερώτημα, θεωρούμε ότι *δεν* υπάρχει περιορισμός ισχύος, ή, ισοδύναμα, ότι $P_{\mathsf{max},k} = P$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι $N_2 \geq N_1$.

   Δώστε μια έκφραση σε κλειστή μορφή για τη χωρητικότητα του καναλιού που αποτελείται από τα 2 παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια.

Υπόδειξη: Πρέπει να διακρίνετε περιπτώσεις, ανάλογα με την τιμή της P.

Απάντηση:

Για $P \leq N_2 - N_1$, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μόνο το κανάλι 1. Συνεπώς, $C = C_1(P_1) = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P}{N_1}\right)$.

Για $P > N_2 - N_1$, χρησιμοποιούμε και τα δύο κανάλια: $P_1 = \nu - N_1$ και $P_2 = \nu - N_2$. $P = P_1 + P_2 = 2\nu - N_1 - N_2 \Rightarrow \nu = \frac{P+N_1+N_2}{2}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} C &= C_1(P_1) + C_2(P_2) \\ &= \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P_1}{N_1}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P_2}{N_2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{\nu - N_1}{N_1}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{\nu - N_2}{N_2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\nu}{N_1}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\nu}{N_2}\right). \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας,

$$C = \begin{cases} \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P}{N_1}\right) & \text{όταν} \quad P \leq N_2 - N_1 \\ \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P-N_1+N_2}{2N_1}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P+N_1-N_2}{2N_2}\right) & \text{όταν} \quad P > N_2 - N_1 \end{cases}$$

(β) Θεωρήστε, τώρα, ότι ενδέχεται κάποιες από τις $P_{\text{max},k}$ (ή όλες) να είναι μικρότερες από P. Για το κανάλι 2 χρηστών ($K = 2$) βρείτε ποιες συνθήκες πρέπει να ισχύουν για τις $P_{\text{max},1}$ και $P_{\text{max},2}$ συναρτήσει των P, N_1 και N_2, ώστε οι περιορισμοί να μην επηρεάζουν τη χωρητικότητα, δηλαδή η χωρητικότητα για *δεδομένες* τιμές των P, N_1 και N_2 να ισούται με την τιμή που βρήκατε στο Ερώτημα (α).

Μπορείτε και πάλι να θεωρήσετε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $N_2 \geq N_1$.

Απάντηση:

Για να μην υπεισέρχονται οι περιορισμοί στη χωρητικότητα, πρέπει να βρίσκονται επάνω από το τελικό “επίπεδο” του νερού μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας waterfilling. Επομένως, πρέπει $P_{\text{max},i} \geq (\nu - N_i)^+$.

Επομένως, αν $P \leq N_2 - N_1$, πρέπει $P_{\text{max},1} \geq P$. Η τιμή της $P_{\text{max},2}$ δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα.

Όταν $P > N_2 - N_1$, πρέπει $P_{\text{max},1} \geq \nu - N_1 = \frac{P+N_2-N_1}{2}$ και $P_{\text{max},2} \geq \nu - N_2 = \frac{P+N_1-N_2}{2}$.

(γ) Στη συνέχεια, για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις, θεωρούμε ότι $P_{\text{max},1} = P_{\text{max},2} = P_{\text{max}}$. Επίσης, θεωρούμε ότι $P_{\text{max},1} + P_{\text{max},2} = 2P_{\text{max}} \geq P$, δηλαδή ότι όλη η συνολική ισχύς κατανέμεται, τελικά στα κανάλια.

Βρείτε τη χωρητικότητα των 2 παράλληλων καναλιών για οποιαδήποτε τιμή του P_{max} (δηλαδή, ακόμα και για τιμές που ενδέχεται να αλλάζουν τη βέλτιστη λύση του Ερωτήματος (α)).

Απάντηση:

Ο περιορισμός είναι η $P_{\text{max},1}$, δεδομένου ότι το κανάλι 1 έχει χαμηλότερο θόρυβο.

Εάν $P \leq N_2 - N_1$,

$$C = \begin{cases} \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P}{N_1}\right) & \text{όταν} \quad P_{\mathsf{max},1} \geq P \\ \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P_{\mathsf{max}}}{N_1}\right)+\frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P-P_{\mathsf{max}}}{N_2}\right) & \text{όταν} \quad P_{\mathsf{max}} < P. \end{cases}$$

Εάν $P > N_2 - N_1$,

$$C = \begin{cases} \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P-N_1+N_2}{2N_1}\right)+\frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P+N_1-N_2}{2N_2}\right) & \text{όταν} \quad P_{\mathsf{max}} \geq \frac{P-N_1+N_2}{2} \\ \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P_{\mathsf{max}}}{N_1}\right)+\frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P-P_{\mathsf{max}}}{N_2}\right) & \text{όταν} \quad P_{\mathsf{max}} < \frac{P-N_1+N_2}{2}. \end{cases}$$

(δ) Στη συνέχεια, θεωρούμε τη γενική περίπτωση K χρηστών. Υποθέστε ότι, αρχικά, εκτελούμε τον αλγόριθμο waterfilling χωρίς περιορισμούς. Μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου παρατηρούμε ότι σε κάποια κανάλια έχουμε υπερβεί την $P_{\mathsf{max},k}$. Υποθέστε ότι, μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου waterfilling έχει κατανεμηθεί μη μηδενική ισχύς σε όλα τα K κανάλια (δηλαδή $P_k > 0$ για όλα τα k). Υποθέστε, επίσης, ότι στα κανάλια όπου δεν έχουμε υπερβεί την $P_{\mathsf{max},k}$ δεν υπάρχει περιορισμός ισχύος. Πώς πρέπει να κατανείμουμε την πλεονάζουσα ισχύ $\sum_{k\in\mathcal{O}}(P_k - P_{\mathsf{max},k})$ στα υπόλοιπα κανάλια ώστε να μεγιστοποιήσουμε το άθροισμα ρυθμών μετάδοσης; ($\mathcal{O}$ είναι το σύνολο των καναλιών όπου ο αλγόριθμος waterfilling υπερέβη τις $P_{\mathsf{max},k}$ και P_k οι λύσεις του αλγορίθμου waterfilling χωρίς περιορισμούς).

Απάντηση:

Σχηματικά, αν προσθέσουμε την πλεονάζουσα ισχύ στα κανάλια που απομένουν αν βγάλουμε τα κανάλια όπου υπερβήκαμε την $P_{\mathsf{max},k}$, το επίπεδο του νερού θα ανέβει κατά την ίδια ποσότητα σε όλα τα κανάλια που απομένουν. Επομένως, η ισχύς μοιράζεται ισόποσα σε όλα τα κανάλια του $\mathcal{O}$. Ένας άλλος τρόπος (στην ουσία, ο ίδιος), είναι από τις σχέσεις $P_k = \nu - N_k$. Επειδή χρησιμοποιούνται όλα τα κανάλια, $P_{k,new} = \nu_{new} - N_k = \nu + \nu_{add} - N_k = \nu_{add} + P_k$. Τέλος, ένας τρόπος είναι με βάση την παράγωγο της $\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_k}{N_k}\right)$: $\frac{d}{dP_k}\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_k}{N_k}\right) = \frac{1}{2}\frac{N_k}{N_k+P_k}\frac{1}{N_k} = \frac{1}{2(P_k+N_k)} = \frac{1}{2\nu}$. Επομένως, όλα τα κανάλια έχουν το ίδιο κόστος ανά μονάδα επιπρόσθετης ισχύος και η ισχύς πρέπει να κατανεμηθεί σε αυτά ισόποσα.

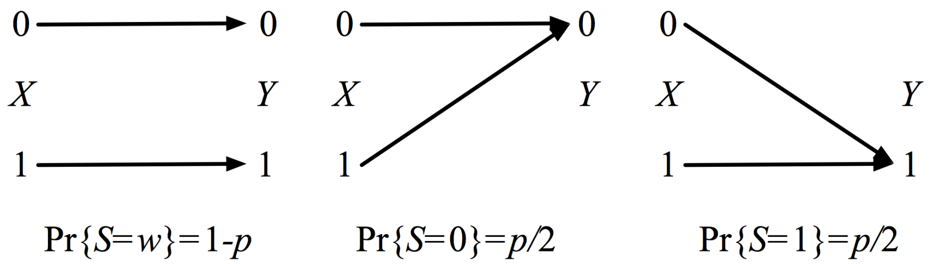
(ε) Προτείνετε έναν τροποποιημένο αλγόριθμο waterfilling για την περίπτωση που έχουμε περιορισμούς ισχύος, $P_{\mathsf{max},k}$, σε κάθε κανάλι. Σε αυτό το ερώτημα θεωρήστε τη γενική περίπτωση, δηλαδή ότι υπάρχουν περιορισμοί σε όλα τα κανάλια. Επίσης, σε αντίθεση με το προηγούμενο ερώτημα, υπάρχει περίπτωση μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου waterfilling χωρίς περιορισμούς ισχύος κάποια κανάλια να μη χρησιμοποιούνται (δηλαδή να έχουμε $P_k = 0$).

Απάντηση:

Η βασική παρατήρηση είναι αυτή που έγινε στο Ερώτημα (δ), ότι, δηλαδή, μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου waterfilling χωρίς περιορισμούς, όσα κανάλια χρησιμοποιούνται έχουν το ίδιο επίπεδο "θορύβου". Εφαρμόζουμε, αρχικά, τον αλγόριθμο waterfilling χωρίς περιορισμούς. Στη συνέχεια, αν υπάρχουν κανάλια στα οποία έχουμε υπερβεί τον περιορισμό ισχύος, περιορίζουμε την ισχύ τους στις τιμές $P_{\mathsf{max},k}$ και υπολογίζουμε την πλεονάζουσα ισχύ $\sum_{k\in\mathcal{O}}(P_k - P_{\mathsf{max},k})$. Αφαιρούμε τα κανάλια του συνόλου $\mathcal{O}$ και εφαρμόζουμε waterfilling (χωρίς περιορισμούς) στα εναπομείναντα κανάλια με την εναπομείνουσα ισχύ. Στα κανάλια που χρησιμοποιήθηκαν από τον αλγόριθμο waterfilling χωρίς περιορισμούς, $N_k = \nu$, ενώ στα κανάλια που δε χρησιμοποιήθηκαν, διατηρούμε τον αρχικό θόρυβο (ο οποίος είναι μεγαλύτερος από ν). Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία έως ότου κατανείμουμε όλη την ισχύ, P, ή έως ότου δεν μπορούμε να κατανείμουμε ισχύ σε κανένα κανάλι λόγω των περιορισμών.

5. **Γνώση κατάστασης καναλιού στον πομπό ή/και στο δέκτη (Π. Θ. Θ. Π., Τελική εξέταση Ιουνίου 2013)**

Θεωρούμε ένα δυαδικό διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη το οποίο μπορεί να βρίσκεται σε μία από 3 πιθανές καταστάσεις, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.



Σχήμα 5: Κανάλι με 3 διαφορετικές καταστάσεις.

Θεωρούμε ότι κάθε φορά που χρησιμοποιούμε το κανάλι, αυτό βρίσκεται σε μία από τις 3 καταστάσεις $S = w, 0$ ή 1 και ότι η κατάσταση μεταβάλλεται με τυχαίο τρόπο μεταξύ διαδοχικών μεταδόσεων. Δηλαδή, η κατάσταση S_n κατά τη $n-$στή χρήση είναι τ.μ. με κατανομή

$$p_S(s) = \begin{cases} 1-p & \text{για} \quad s = w \\ p/2 & \text{για} \quad s = 0 \\ p/2 & \text{για} \quad s = 1 \end{cases}$$

και οι S_n είναι i.i.d.

Με τον τρόπο αυτό θα μπορούσαμε, για παράδειγμα, να μοντελοποιήσουμε μία μνήμη N δυαδικών κυττάρων στα οποία μπορούμε να εγγράψουμε την τιμή ενός bit (0 ή 1). Το $100(1-p)$ % των κυττάρων είναι αξιόπιστα, ενώ το $100p$ % είναι ελαττωματικά. Από τα ελαττωματικά κύτταρα, τα μισά είναι "κολλημένα" στο 0, ενώ τα άλλα μισά στο 1.

Παρατηρήστε ότι σε αυτήν την περίπτωση το n υποδηλώνει χώρο αντί για χρόνο.

Στη συνέχεια, για να διευκολυνθεί η επίλυση θεωρήστε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι σε όλη την άσκηση αναφερόμαστε σε αυτή τη μνήμη N δυαδικών κυττάρων (και, επομένως, bits). Δηλαδή το n είναι ο αριθμός του κυττάρου και όχι κάποια χρονική στιγμή.

(α) Υποθέστε, αρχικά, ότι ούτε ο πομπός, αλλά ούτε και ο δέκτης γνωρίζουν την κατάσταση, S_n, του καναλιού (δηλαδή δε γνωρίζουν αν ένα δεδομένο κύτταρο, n, είναι ελαττωματικό).

Βρείτε τη χωρητικότητα, $C_{\text{no CSI}}$, του καναλιού.

Εδώ η χωρητικότητα είναι ο αριθμός των bits (≤ 1) που μπορούμε να αποθηκεύσουμε κατά μέσο όρο σε κάθε κύτταρο. Δηλαδή, ο αριθμός bits που μπορούμε να αποθηκεύσουμε σε όλη τη μνήμη ισούται με $N \cdot C_{\text{no CSI}}$.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το κανάλι ως BSC. Η απάντησή σας μπορεί να περιέχει όρους της μορφής $H(\mathbf{p})$, όπου **p** διακριτή κατανομή.

Απάντηση:

Εάν η είσοδος $X = 0$, με πιθανότητα $p/2$ $Y = 1$ (εάν $S = 1$). Αλλιώς $Y = 0$. Ομοίως, η πιθανότητα να εφαρμόσουμε είσοδο $X = 1$ και η έξοδος να ισούται με $Y = 0$ είναι $p/2$. Επομένως, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το κανάλι ως BSC με παράμετρο $p/2$.

Συνεπώς,

$$C_{\text{no CSI}} = 1 - H_b(p/2) \text{ bits/χρήση καναλιού},$$

όπου $H_b(p/2)$ η εντροπία τ.μ. Bernoulli με παράμετρο $p/2$.

(β) Έστω, τώρα, ότι τόσο ο πομπός όσο και ο δέκτης γνωρίζουν την τιμή της κατάστασης S_n για όλα τα n.

Βρείτε τη χωρητικότητα, $C_{\text{full CSI}}$, του καναλιού. Συγκρίνετε με την απάντησή σας στο Ερώτημα (α). Κερδίζουμε σε χωρητικότητα όταν πομπός και δέκτης γνωρίζουν την κατάσταση του καναλιού;

Δίνεται ότι $1 - p \geq 1 - H(p/2)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $p = 0$ ή $p = 1$.

Απάντηση:

Όταν $S_n = 0$ ή 1 δεν μπορούμε να μεταφέρουμε πληροφορία στο κανάλι. Επομένως, δεν το χρησιμοποιούμε. Όταν $S = w$ μπορούμε να μεταδώσουμε ακριβώς 1 bit/χρήση καναλιού. Συνεπώς,

$$C_{\text{no CSI}} = 1 - p \text{ bits/χρήση καναλιού}.$$

Δεδομένου ότι $1 - p \geq 1 - H(p/2)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $p = 0$ ή $p = 1$, γνώση της κατάστασης του καναλιού οδηγεί σε αύξηση της χωρητικότητας.

(γ) Έστω, τώρα, ότι ο δέκτης γνωρίζει την τιμή της S_n, αλλά όχι ο πομπός.

Βρείτε τη χωρητικότητα, $C_{\text{receiver CSI}}$, του καναλιού. Συγκρίνετε με την απάντησή σας στο Ερώτημα (β). Έχουμε απώλεια χωρητικότητας όταν μόνο ο δέκτης (αλλά όχι ο πομπός) γνωρίζει την κατάσταση του καναλιού;

Απάντηση:

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το κανάλι ως κανάλι διαγραφής με παράμετρο $\alpha = p$. Επομένως,

$$C_{\text{receiver CSI}} = 1 - p \text{ bits/χρήση καναλιού}.$$

Επομένως, αν ο δέκτης γνωρίζει την τιμή της S_n δεν απαιτείται γνώση στον πομπό. Ωστόσο, στην πράξη, γνώση της S_n και στον πομπό απλοποιεί την κωδικοποίηση.

(δ) Έστω, τώρα, ότι ο πομπός γνωρίζει την S_n, αλλά όχι ο δέκτης. Δηλαδή το κύκλωμα εγγραφής μπορεί να μπορεί να εντοπίσει εάν ένα κύτταρο μνήμης είναι ελαττωματικό. Ωστόσο, το κύκλωμα ανάγνωσης δεν είναι σε θέση να γνωρίζει αν η τιμή του κάθε κυττάρου έχει προέλθει από ελάττωμα ή από εγγραφή δεδομένων.

Θεωρούμε τον εξής τρόπο κωδικοποίησης

i. Κατασκευάζουμε όλες τις 2^N δυαδικές ακολουθίες (όπου N ο αριθμός των κυττάρων της μνήμης).

ii. Τοποθετούμε τις ακολουθίες με *τυχαίο* και *ανεξάρτητο* τρόπο σε 2^{NR} bins, όπου $0 < R \leq 1$. Αποκαλύπτουμε την αντιστοίχιση σε πομπό και δέκτη.

iii. Για να στείλουμε ένα από 2^{NR} μηνύματα, έστω το μήνυμα m, στέλνουμε μια ακολουθία από το bin m της οποίας τα ψηφία στις θέσεις όπου η μνήμη είναι ελαττωματική ταυτίζονται με τα ελαττώματα της μνήμης. Για παράδειγμα, αν $N = 10$ και οι καταστάσεις των κυττάρων της μνήμης είναι $S_1^{10} = www0w01www$, επιλέγουμε μια ακολουθία από το bin m (εάν υπάρχει) η οποία έχει '0' στις θέσεις 4 και 6 και '1' στη θέση 7. Οι άλλες θέσεις μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή, αρκεί η ακολουθία να προέρχεται από το bin m.

iv. Επειδή τα ψηφία στις μη ελαττωματικές θέσεις θα μεταδοθούν αυτούσια, ο δέκτης λαμβάνει (διαβάζει) ακριβώς την ακολουθία που στείλαμε (γράψαμε). Επομένως, είναι σε θέση να βρει σε ποιο bin, m, ανήκει η ακολουθία. Συνεπώς, μπορούμε να μεταδώσουμε το δείκτη του bin, δηλαδή ένα από 2^{NR} μηνύματα. Δηλαδή, η πληροφορία είναι το *bin* στο οποίο ανήκει η κωδική λέξη που γράφουμε στη μνήμη και όχι η ίδια η κωδική λέξη.

Απομένει να βρούμε τις τιμές του R έτσι ώστε, για δεδομένα ελαττώματα μνήμης, να μπορούμε να βρούμε μέσα σε *κάθε* ένα από τα 2^{NR} bins τουλάχιστον μία ακολουθία οι τιμές της οποίας να ταυτίζονται με τα ελαττώματα της μνήμης (στις θέσεις όπου η μνήμη είναι ελαττωματική).

(δ1) Για δεδομένο p και για $N \to \infty$ πόσες είναι (προσεγγιστικά) οι θέσεις της μνήμης με ελάττωμα;

Απάντηση:

Από το Νόμο των Μεγάλων Αριθμών, για $N \to \infty$, οι θέσεις με ελάττωμα προσεγγίζουν τις Np.

(δ2) Για $N \to \infty$ και για *δεδομένα* ελαττώματα στη μνήμη (δηλαδή για *δεδομένη* ακολουθία S_1^N) πόσες από τις 2^N δυαδικές ακολουθίες μήκους N έχουν τις ίδιες τιμές με τα ελαττώματα της μνήμης στις θέσεις όπου η μνήμη είναι ελαττωματική;

Υπόδειξη: Πρόκειται για ερώτημα συνδυαστικής.

Απάντηση:

Δεδομένου ότι Np θέσεις είναι δεδομένες, υπάρχουν $2^{N(1-p)}$ πιθανές ακολουθίες.

(δ3) Οι ακολουθίες του Ερωτήματος (δ2) έχουν διαμοιραστεί τυχαία στα 2^{NR} bins κατά τη δημιουργία του κώδικα. Εμείς έχουμε επιλέξει ένα bin m (το οποίο εξαρτάται από την πληροφορία που θέλουμε να μεταδώσουμε, δηλαδή δεν μπορούμε να επηρεάσουμε την τιμή του m) και θέλουμε να μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον μία από τις ακολουθίες του Ερωτήματος (δ2) μέσα στο bin. Βρείτε την τιμή του R ώστε, για $N \to \infty$ το bin να περιέχει μια από τις ακολουθίες του Ερωτήματος (δ2) με πιθανότητα που τείνει στο 1.

Απάντηση:

$$\frac{2^{N(1-p)}}{2^{NR}} = 2^{N(1-p-R)}.$$

Προκειμένου ο εκθέτης να είναι θετικός, πρέπει ο αριθμός των bins να μην υπερβαίνει τον αριθμό των ακολουθιών, δηλαδή

$$2^{NR} < 2^{N(1-p)} \Rightarrow R < 1 - p.$$

(δ4) Τι συμπεραίνετε για τη χωρητικότητα του καναλιού, $C_{\text{transmitter CSI}}$, όταν μόνο ο πομπός (αλλά όχι ο δέκτης) γνωρίζει την κατάσταση, S_n; Συγκρίνετε με την απάντησή σας στα Ερωτήματα (β) και (γ).

Απάντηση:

$$C_{\text{transmitter CSI}} = C_{\text{receiver CSI}} = C_{\text{full CSI}} = 1 - p \text{ bits/χρήση καναλιού}.$$

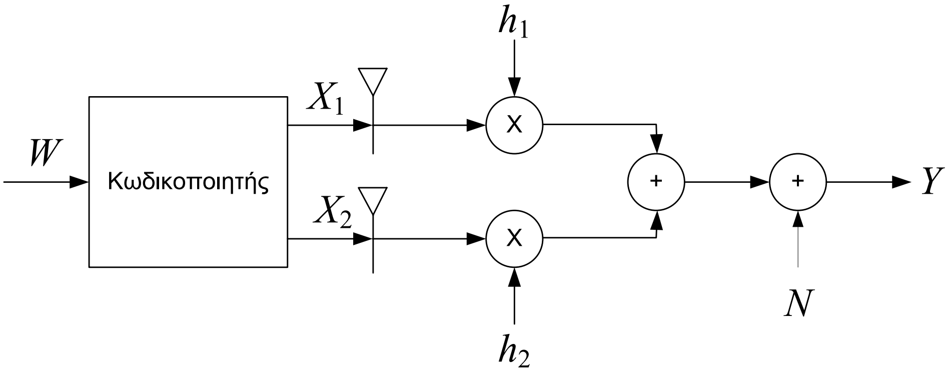
Δηλαδή, ακόμα και εάν ο δέκτης δε γνωρίζει το κανάλι, αν το γνωρίζει ο πομπός μπορούμε να μεταδώσουμε με τον ίδιο ρυθμό!
Το αποτέλεσμα αυτό δεν ισχύει στη γενική περίπτωση. Δηλαδή, η γνώση της κατάστασης του καναλιού σε πομπό και σε δέκτη οδηγεί σε μεγαλύτερη χωρητικότητα σε σχέση με την περίπτωση όπου η κατάσταση του καναλιού είναι γνωστή μόνο στον πομπό ή μόνο στο δέκτη. Ωστόσο, σε κάποιες ειδικές (και πολύ ενδιαφέρουσες) περιπτώσεις, η ισότητα ισχύει. Για παράδειγμα, σε Γκαουσιανά κανάλια με παρεμβολή (όχι απαραιτήτως Γκαουσιανή), εάν $Y = X + S + Z$ και ο πομπός γνωρίζει την τιμή της παρεμβολής, S, στο δέκτη, η χωρητικότητα ισούται με $\frac{1}{2}\log(1 + \text{SNR})$, δηλαδή η ύπαρξη παρεμβολής δεν επηρεάζει το ρυθμό μετάδοσης! Η τεχνική που χρησιμοποιείται για τη μετάδοση ονομάζεται Writing on Dirty Paper και είναι ειδική περίπτωση της τεχνικής κωδικοποίησης Gelfand-Pinsker. Η τεχνική Writing on Dirty Paper χρησιμοποιήθηκε σχετικά πρόσφατα (το 2006) για τον προσδιορισμό της περιοχής χωρητικότητας του Γκαουσιανού καναλιού Ευρυεκπομπής πολλών κεραιών (MIMO Gaussian Broadcast Channel).
Ειδική περίπτωση της κωδικοποίησης Gelfand-Pinsker είναι και η τεχνική που χρησιμοποιήσαμε σε αυτήν την άσκηση.

6. **Μία ή δύο κεραίες; (Τελική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π. – Ιούνιος 2008)**

Στο σύστημα του Σχήματος 6 ο πομπός χρησιμοποιεί 2 κεραίες προκειμένου να στείλει μηνύματα W στο δέκτη.

Για κάθε χρήση καναλιού, k, το σήμα στο δέκτη ισούται με $Y_k = h_1 X_{1,k} + h_2 X_{2,k} + N_k$, όπου h_1 και h_2 (πραγματικές) σταθερές γνωστές τόσο στον πομπό όσο και στο δέκτη και N i.i.d. γκαουσιανός θόρυβος $\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες από το θόρυβο N, αλλά όχι απαραίτητα ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επίσης, υπάρχει περιορισμός ισχύος στον πομπό: Το άθροισμα των ισχύων των σημάτων που εκπέμπονται από τις δύο κεραίες δεν πρέπει να υπερβαίνει μια τιμή P. Πιο συγκεκριμένα, $\mathbb{E}[X_1^2] + \mathbb{E}[X_2^2] \leq P$. Θέλουμε να βρούμε ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού και πώς πρέπει να σχεδιαστεί ο κωδικοποιητής προκειμένου να επιτύχουμε μετάδοση με τη χωρητικότητα.

(α) Θεωρήστε το κανάλι με είσοδο (X_1, X_2) και έξοδο Y. Εξηγήστε γιατί το κανάλι δεν έχει μνήμη και δώστε μια έκφραση για τη συνάρτηση μετάβασης $f(y|x_1, x_2)$. Υπενθυμίζεται ότι οι παράμετροι h_1 και h_2 θεωρούνται γνωστές και σταθερές.



Σχήμα 6: Μετάδοση με χρήση 2 κεραιών και κοινό κωδικοποιητή.

Απάντηση:

Η τιμή της Y_k για δεδομένη είσοδο $(X_{1,k}, X_{2,k})$ εξαρτάται μόνο από την τιμή του θορύβου N_k. Ο θόρυβος είναι λευκός, επομένως οι προηγούμενες τιμές του είναι ασυσχέτιστες με την τρέχουσα τιμή N_k. Συνεπώς, το κανάλι δεν έχει μνήμη. Η συνάρτηση μετάβασης $f(y|x_1, x_2)$ ισούται με

$$f(y|x_1, x_2) = f_N(y - h_1x_1 - h_2x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-h_1x_1-h_2x_2)^2}{2\sigma^2}}.$$

(β) Δώστε μια έκφραση για την αμοιβαία πληροφορία $I(Y; X_1, X_2)$. Ποια πρέπει να είναι η κατανομή της Y ώστε να μεγιστοποιείται η $I(Y; X_1, X_2)$; Αναφέρετε απλώς την κατανομή, δε χρειάζονται περισσότερες λεπτομέρειες (προς το παρόν).

Απάντηση:

$$\begin{aligned} I(Y; X_1, X_2) &= h(Y) - h(Y|X_1, X_2) \\ &= h(Y) - \frac{1}{2} \log 2\pi e\sigma^2. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι η Y έχει περιορισμό ισχύος (ως άθροισμα $h_1X_1 + h_2X_2 + N$), η $h(Y)$ και, επομένως η $I(Y; X_1, X_2)$, μεγιστοποιείται όταν η Y ακολουθεί γκαουσιανή κατανομή.

(γ) Θεωρούμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 0$. Δείξτε ότι η $\mathbb{E}[Y^2]$ μεγιστοποιείται όταν $X_1 = cX_2$, όπου c σταθερά.

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα Cauchy-Schwarz: $(\mathbb{E}[X_1X_2])^2 \leq \mathbb{E}[X_1^2]\mathbb{E}[X_2^2]$ με = όταν $X_1 = cX_2$ (γενικά $X_1 = cX_2 + d$. Εδώ $d = 0$ λόγω της υπόθεσης $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 0$).

Απάντηση:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y^2] &= \mathbb{E}[(h_1X_1 + h_2X_2 + N)^2] \\ &\overset{(i)}{=} h_1^2\mathbb{E}[X_1^2] + h_2^2\mathbb{E}[X_2^2] + 2h_1h_2\mathbb{E}[X_1X_2] + \mathbb{E}[N^2] \\ &\overset{(ii)}{\leq} h_1^2\mathbb{E}[X_1^2] + h_2^2\mathbb{E}[X_2^2] + 2h_1h_2\sqrt{\mathbb{E}[X_1^2]}\sqrt{\mathbb{E}[X_2^2]} + \mathbb{E}[N^2]. \end{aligned}$$

(i) $\mathbb{E}[X_1N] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[N] = 0$, και $\mathbb{E}[X_2N] = \mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[N] = 0$, δεδομένου ότι ο θόρυβος είναι ανεξάρτητος της εισόδου. (ii) Ανισότητα Cauchy-Schwarz.

(δ) Δώστε μια έκφραση για την $\mathbb{E}[Y^2]$ όταν $X_1 = cX_2$ (συναρτήσει των c, P, h_1 και h_2). (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον περιορισμό ισχύος στον πομπό). Τι κατανομή πρέπει να ακολουθούν οι X_1 και X_2 για να μεγιστοποιείται η $I(Y; X_1, X_2)$;

Απάντηση:

Όταν $X_1 = cX_2$, $Y = (ch_1 + h_2)X_2 + N \Rightarrow \mathbb{E}[Y^2] = (ch_1 + h_2)^2\mathbb{E}[X_2^2] + \mathbb{E}[N^2] = (ch_1 + h_2)^2\mathbb{E}[X_2^2] + \sigma^2$.

Από τον περιορισμό ισχύος στον πομπό, $\mathbb{E}[X_1^2] + \mathbb{E}[X_2^2] = P \Rightarrow (c^2 + 1)\mathbb{E}[X_2^2] = P \Rightarrow \mathbb{E}[X_2^2] = P/(c^2 + 1)$.

Αντικαθιστώντας, $\mathbb{E}[Y^2] = \frac{(ch_1+h_2)^2 P}{c^2+1} + \sigma^2$.

Δεδομένου ότι $Y = (ch_1+h_2)X_2+N$ και οι Y και N είναι γκαουσιανές (προκειμένου να μεγιστοποιείται η $I(Y; X_1, X_2)$, και η X_2 (και, επομένως, και η X_1) πρέπει να είναι γκαουσιανές. Παρατηρήστε ότι οι X_1 και X_2 είναι πλήρως συσχετισμένες γκαουσιανές, δεδομένου ότι $X_2 = cX_1$.

Επομένως, προκειμένου να μεγιστοποιείται η $I(Y; X_1, X_2)$ (για δεδομένο c), $X_1 \sim \mathcal{N}(0, c^2P/(c^2 + 1))$, και $X_2 \sim \mathcal{N}(0, P/(c^2 + 1))$ και, επίσης, $X_1 = cX_2$.

(ε) Βρείτε την τιμή της c η οποία μεγιστοποιεί την $\mathbb{E}[Y^2]$. Βεβαιωθείτε ότι λαμβάνετε υπόψη σας τον περιορισμό ισχύος $\mathbb{E}[X_1^2] + \mathbb{E}[X_2^2] \leq P$. Ένας τρόπος είναι να βρείτε το c που μεγιστοποιεί την έκφραση για την $\mathbb{E}[Y^2]$ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Εναλλακτικά, μπορείτε να θεωρήσετε ότι $X_1 = \alpha X$ και $X_2 = \beta X$, όπου $\mathbb{E}[X^2] = 1$ και $\alpha^2 + \beta^2 = P$ και να βρείτε τη σχέση μεταξύ α και β.

Απάντηση:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dc}\mathbb{E}[Y^2] &= P\frac{2h_1(ch_1 + h_2)(c^2 + 1) - 2c(ch_1 + h_2)^2}{(c^2 + 1)^2} = 0 \\
&\Rightarrow h_1(c^2 + 1) = c(ch_1 + h_2) \\
&\Rightarrow c = \frac{h_1}{h_2}.
\end{aligned}
$$

Για να αποδείξουμε ότι το $c = \frac{h_1}{h_2}$ είναι βέλτιστο αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $\mathbb{E}[Y^2]$ είναι κοίλη ($\cap$) με χρήση π.χ. της 2ης παραγώγου. Αυτό είναι αρκετά χρονοβόρο. Μια άλλη μέθοδος, και δεδομένου ότι η $\mathbb{E}[Y^2]$ είναι συνεχής και δεν υπάρχει άλλη τιμή του c στην οποία μηδενίζεται η 1η παράγωγος, είναι να δείξουμε ότι για $c = 0$ και $c \to \infty$ η τιμή της $\mathbb{E}[Y^2]$ είναι μικρότερη. Για $c = 0$, $\mathbb{E}[Y^2] = h_2^2P + \sigma^2$, ενώ για $c \to \infty$, $\mathbb{E}[Y^2] \to h_1^2P + \sigma^2$.

Ένας άλλος, απλούστερος τρόπος απόδειξης, είναι ο εξής: Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την ποσότητα $ch_1 + h_2 = [c\,1][h_1\,h_2]^T$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz (και πάλι!), το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων **a** και **b** μεγιστοποιείται όταν **a** $= c$**b**. Επομένως, $[c\,1]^T = [bh_1\,bh_2]^T = b[h_1/h_2\ 1]^T \Rightarrow b = 1,\ c = h_1/h_2$.

(στ) Με βάση τα παραπάνω, καθώς και τη βέλτιστη τιμή της c που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού. Συγκρίνετε με την περίπτωση που χρησιμοποιείται μόνο μια κεραία για τη μετάδοση (χωρίς απώλεια της γενικότητας, μπορείτε να θεωρήσετε ότι $h_1 \geq h_2$).

Απάντηση:

Από το Ερώτημα (δ), $X_1 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{Ph_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right)$, $X_2 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{Ph_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right)$ και $\frac{X_1}{X_2} = c = \frac{h_1}{h_2}$.

Η Y ακολουθεί γκαουσιανή κατανομή με $\mathbb{E}[Y^2] = \frac{(c^* h_1+h_2)^2 P}{c^{*2}+1} + \sigma^2 = \frac{(h_1^2+h_2^2)^2 P}{h_1^2+h_2^2} + \sigma^2 = (h_1^2+h_2^2)P + \sigma^2$.

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
C &= \max_{f(x):(1+h_1^2/h_2^2)E[X^2]\leq P} I(Y; X_1, X_2) \\
&= \frac{1}{2}\log 2\pi e\left((h_1^2+h_2^2)P + \sigma^2\right) - \frac{1}{2}\log 2\pi e \sigma^2 \\
&= \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{(h_1^2+h_2^2)P}{\sigma^2}\right).
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, η χωρητικότητα του καναλιού ισούται με τη χωρητικότητα Γκαουσιανού καναλιού με SNR = $\frac{(h_1^2+h_2^2)P}{\sigma^2}$.

Εάν χρησιμοποιήσουμε μόνο μία κεραία, αυτή που αντιστοιχεί στο καλύτερο κανάλι, $Y = h_1 X_1 + N$ με $\mathbb{E}[X^2] = P$. Η $I(Y; X_1)$ μεγιστοποιείται με χρήση γκαουσιανής X_1 και max $I(Y; X_1) = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{h_1^2 P}{\sigma^2}\right) \leq C$, με = όταν $h_2 = 0$. Επομένως αποδείξαμε το όχι και τόσο διαισθητικά προφανές αποτέλεσμα: Όταν έχουμε δύο διαθέσιμες κεραίες για να μεταδώσουμε σε ένα δέκτη, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και τις δύο κεραίες. Κάθε κεραία μεταδίδει το <u>ίδιο</u> σήμα, αλλά με διαφορετική ισχύ. Η κεραία που βλέπει το καλύτερο κανάλι μεταδίδει με μεγαλύτερη ισχύ. Επίσης, η αναλογία ισχύων των μεταδιδόμενων σημάτων ισούται με την αναλογία κερδών (ή αποσβέσεων) των καναλιών.

Αποδεικνύεται ότι το δυϊκό πρόβλημα όπου ο πομπός έχει μια κεραία και ο δέκτης δύο κεραίες έχει την ίδια λύση (Maximal Ratio Combining - MRC): Ο βέλτιστος δέκτης πολλαπλασιάζει το σήμα από την κάθε κεραία με συντελεστή h_i όπου $h_i = h_i/\sigma_i$ και προσθέτει τα δύο σήματα. Εμείς αποδείξαμε ότι όταν χρησιμοποιούνται δύο κεραίες στον πομπό και μία στο δέκτη, ο βέλτιστος πομπός δημιουργεί τα εκπεμπόμενα σήματα με χρήση MRC.

(ζ) Περιγράψτε πολύ συνοπτικά πώς θα κατασκευάζατε το βιβλίο κωδίκων σε αυτό το κανάλι και τι μεταδίδεται από κάθε κεραία εάν ακολουθήσουμε τη μέθοδο (του Shannon) που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη του θεωρήματος κωδικοποίησης για το γκαουσιανό κανάλι.

Απάντηση:

Ο πομπός δημιουργεί βιβλίο κωδίκων για μετάδοση σε γκαουσιανό κανάλι με SNR = $\frac{(h_1^2+h_2^2)P}{\sigma^2}$ με περιορισμό ισχύος $\mathbb{E}[X^2] \leq P$. Σε κάθε μετάδοση, με βάση το μήνυμα W_k, επιλέγει κωδική λέξη $X^n(W_k)$. Η κεραία 1 στέλνει σήμα $\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} X^n(W_k)$, η δε κεραία 2 σήμα $\frac{h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} X^n(W_k)$. Ο δέκτης αποκωδικοποιεί τη ληφθείσα ακολουθία Y_k^n σε ένα από τα πιθανά μηνύματα W_k με χρήση από κοινού τυπικότητας.