EE728 (22A004) - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
Λυμένες ασκήσεις σε Κανάλια

1. ***Τα κανάλια με μνήμη έχουν μεγαλύτερη χωρητικότητα – Cover & Thomas 7.3 (τροποποιημένη)**

   Θεωρήστε το κανάλι $Y_i = X_i \oplus Z_i$, όπου $\oplus$ πρόσθεση modulo-2 (XOR). Οι μεταβλητές X_i και Y_i είναι δυαδικές, αλλά όχι, κατ' ανάγκη, ομοίως κατανεμημένες. Έστω, επίσης, ότι η Z_i έχει σταθερή μάζα πυκνότητας πιθανότητας $\text{Pr}\{Z_i = 1\} = p = 1 - \text{Pr}\{Z_i = 0\}$. Ωστόσο, οι $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ *δεν* είναι, κατ' ανάγκη, ανεξάρτητες.

   (α) Δώστε ένα σχεδιάγραμμα του καναλιού. Μοιάζει με κάποιο γνωστό σας κανάλι; Σε τι διαφέρει (αν διαφέρει);

   (β) Εάν οι Z_i είναι ανεξάρτητες, αν, δηλαδή, το κανάλι δεν έχει μνήμη, ποια είναι η χωρητικότητά του και με ποια κατανομή $p(x)$ επιτυγχάνεται; Ονομάστε αυτή τη χωρητικότητα C.

   (γ) Επιστρέφοντας στη γένική περίπτωση όπου οι $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ δεν είναι, κατ' ανάγκη, ανεξάρτητες, δείξτε ότι, εάν η είσοδος είναι ανεξάρτητη και ομοίως κατανεμημένη Bern$(1/2)$,

   $$I(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \geq nC,$$

   όπου C η χωρητικότητα του καναλιού χωρίς μνήμη του Ερωτήματος (β).

   (δ) Με βάση το Ερώτημα (γ), συμπεράνετε ότι, για τη χωρητικότητα του καναλιού με μνήμη $C' \triangleq \frac{1}{n} \max_{p(x)} I(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, ισχύει $C' \geq C$.

   (ε) Δώστε μια διαισθητική αιτιολόγηση για το αποτέλεσμα που αποδείξατε στο Ερώτημα (δ), ότι, δηλαδή, η χωρητικότητα των καναλιών χωρίς μνήμη δεν μπορεί να υπερβεί τη χωρητικότητα των αντίστοιχων καναλιών με μνήμη.

2. **Χωρητικότητα καναλιού modulo – Cover & Thomas 7.4**

   Θεωρούμε το κανάλι $Y = X + Z \pmod{11}$, και $Z \sim \text{Unif}\{1, 2, 3\}$ και $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, 10\}$.

   Υπενθύμιση: mod a: Το υπόλοιπο της διαίρεσης του X με το a.

   (α) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού.

   (β) Ποια είναι η βέλτιστη κατανομή $p^*(x)$ που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα;

3. **Το κανάλι Z – Cover & Thomas 7.8**

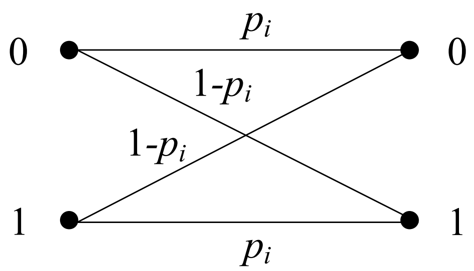
   Έστω κανάλι Z με πίνακα μετάβασης

   $$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad X, Y \in \{0, 1\}.$$

   Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού, καθώς και την κατανομή εισόδου με την οποία επιτυγχάνεται η χωρητικότητα.

4. **Χρονικώς Μεταβαλλόμενα Κανάλια – Cover & Thomas 7.11**

   Θεωρούμε το χρονικώς μεταβαλλόμενο κανάλι του Σχήματος 1. Οι $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες δεδομένων των $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με υπό συνθήκη κατανομή μάζας πιθανότητας $p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} p_i(y_i|x_i)$. Έστω $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$. Βρείτε τη $\max_{p(\mathbf{x})} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$. Σχολιάστε την τιμή της χωρητικότητας και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται.



Σχήμα 1: Χρονικώς Μεταβαλλόμενο BSC.

5. **Κανάλια με εξάρτηση μεταξύ των συμβόλων – Cover & Thomas 7.14**

   Θεωρήστε το εξής κανάλι το οποιο χρησιμοποιεί δυαδικό αλφάβητο, παίρνει ως είσοδο σύμβολα των 2 bits και παράγει ως έξοδο σύμβολα των 2 bits σύμφωνα με την ακόλουθη απεικόνιση: 00 $\rightarrow$ 01, 01 $\rightarrow$ 10, 10 $\rightarrow$ 11 και 11 $\rightarrow$ 00. Επομένως, εάν η είσοδος στο κανάλι είναι η ακολουθία 01, η έξοδος είναι 10 με πιθανότητα 1. Συμβολίζουμε τα δύο σύμβολα εισόδου με X_1, X_2 και τα δύο σύμβολα εξόδου με Y_1, Y_2.

   (α) Υπολογίστε την αμοιβαία πληροφορία $I(X_1, X_2; Y_1, Y_2)$ συναρτήσει της κατανομής εισόδου επάνω στα 4 πιθανά ζεύγη εισόδου.

   (β) Δείξτε ότι η χωρητικότητα ανά μετάδοση ζεύγους ψηφίων ισούται με 2 bits.

   (γ) Δείξτε ότι, για την κατανομή εισόδου που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα στο προηγούμενο ερώτημα, $I(X_1; Y_1) = 0$. Επομένως, η κατανομή στις ακολουθίες εισόδου που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα δε μεγιστοποιεί απαραιτήτως την αμοιβαία πληροφορία μεταξύ μεμονωμένων συμβόλων εισόδου και των αντίστοιχων εξόδων.

6. **Κωδικοποιητής και Αποκωδικοποιητής ως μέρος του καναλιού – Cover & Thomas 7.16**

   Θεωρήστε Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι (BSC) με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου (crossover probability) 0.1. Ένα πιθανό σχήμα κωδικοποίησης για αυτό το κανάλι το οποίο χρησιμοποιεί δύο κωδικές λέξεις μήκους 3 είναι να κωδικοποιήσουμε το μήνυμα a_1 ως 000 και το μήνυμα a_2 ως 111. Εάν χρησιμοποιούμε αυτόν τον κώδικα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο συνδυασμός κωδικοποιητή, καναλιού και αποκωδικοποιητή αποτελεί ένα νέο BSC με δύο εισόδους a_1 και a_2 και δύο εξόδους a_1 και a_2.

   (α) Βρείτε την πιθανότητα αναστροφής για το νέο κανάλι.

   (β) Ποια είναι η χωρητικότητα του νέου καναλιού σε bits ανά χρήση του αρχικού καναλιού;

   (γ) Ποια είναι η χωρητικότητα του αρχικού BSC με πιθανότητα αναστροφής 0.1;

(δ) Αποδείξτε το εξής γενικό αποτέλεσμα: Για οποιοδήποτε κανάλι, εάν θεωρήσουμε από κοινού τον κωδικοποιητή, το κανάλι και τον αποκωδικοποιητή ως ένα νέο κανάλι με είσοδο μηνύματα και έξοδο εκτιμώμενα μηνύματα, η χωρητικότητα σε bits ανά χρήση του αρχικού καναλιού δεν μπορεί να αυξηθεί.

7. ***Χωρητικότητα καναλιού Ταχυδρομικών περιστεριών (Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας) – Cover & Thomas 7.19 (τροποποιημένη) – Σχετικά Δύσκολη**

   Μια ομάδα αποκλεισμένων μαχητών επικοινωνεί με τους συμμάχους τους με χρήση ταχυδρομικών περιστεριών. Θεωρούμε ότι κάθε ταχυδρομικό περιστέρι μπορεί να μεταφέρει ένα σύμβολο ASCII (8 bits), ότι ένα περιστέρι στέλνεται κάθε 5 λεπτά της ώρας και ότι χρειάζεται πάντα 3 ακριβώς λεπτά της ώρας για να φτάσει στον προορισμό του.

   (α) Εάν όλα τα περιστέρια καταφέρνουν να φτάσουν στον προορισμό τους, ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού σε bits/ώρα;

   (β) Έστω ότι ο παραλήπτης γνωρίζει ότι τα περιστέρια στέλνονται με σταθερό ρυθμό, οπότε μπορεί να ανιχνεύσει εάν ένα περιστέρι δε φτάνει στον προορισμό του. Εάν οι αντίπαλοι καταφέρνουν να σκοτώνουν ποσοστό α των περιστεριών, ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού; Πώς θα μοντελοποιούσατε το κανάλι;

   (*γ) Θεωρούμε, τώρα, ότι οι αντίπαλοι γνωρίζουν Θεωρία Πληροφορίας και, αφού πιάσουν ένα περιστέρι με πιθανότητα α, αντί να το σκοτώσουν, αντικαθιστούν το σύμβολο ASCII που στέλνει το περιστέρι με ένα διαφορετικό (από τα 255 πιθανά). Το σύμβολο αντικατάστασης επιλέγεται με βάση ομοιόμορφη κατανομή. Ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού; Πώς θα μοντελοποιούσατε το κανάλι;

   (*δ) Αν οι αντίπαλοι μπορούν να πιάνουν όλα τα περιστέρια, αλλά δε θέλουν να ξέρουμε ότι τα έπιασαν (δηλαδή δεν τα σκοτώνουν, αλλά μπορούν να αλλάξουν το σύμβολο ASCII, αν θέλουν, πριν τα αφήσουν) τι είναι το χειρότερο (για εμάς) που μπορούν να κάνουν;

8. **Υπάρχει περίπτωση η προσθήκη περισσότερων εισόδων στο κανάλι να ελαττώσει τη χωρητικότητά του; – Cover & Thomas 7.22**

   Δείξτε ότι η προσθήκη μιας οποιασδήποτε γραμμής στον πίνακα μετάβασης ενός διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη (δηλαδή η προσθήκη μίας νέας τιμής εισόδου) δεν μπορεί να ελαττώσει τη χωρητικότητά του.

9. **Κανάλια (Τελικό Διαγώνισμα Θ. Π., Φεβρουάριος 2008)**

   Έστω
$$P(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1-\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1-\epsilon \end{bmatrix}$$
   ο πίνακας μετάβασης ενός δυαδικού συμμετρικού καναλιού με πιθανότητα σφάλματος ϵ.

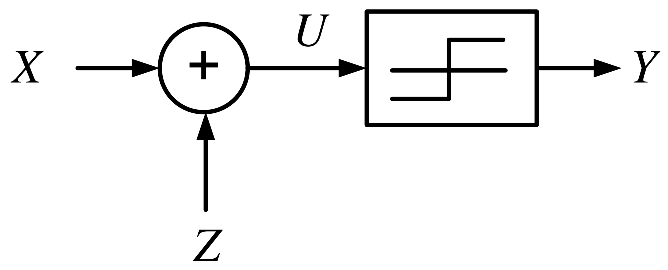
   Επίσης, ορίζεται η πράξη $*$ ως εξής:
$$a * b = (1-a)b + a(1-b).$$

(α) Να αποδείξετε ότι το κανάλι το οποίο έχει για πίνακα μετάβασης το γίνομενο $P(\epsilon_1)P(\epsilon_2)$ είναι ισοδύναμο με ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι του οποίου η πιθανότητα σφάλματος ισούται με $\epsilon_1 * \epsilon_2$.

(β) Δώστε μια φυσική ερμηνεία της παρακάτω ανισότητας, καθώς και την απόδειξή της
$$1 - H(\epsilon_1 * \epsilon_2) \leq \min\left(1 - H(\epsilon_1), 1 - H(\epsilon_2)\right),$$
εάν γνωρίζετε ότι ισχύουν οι ανισότητες: $|0.5 - \epsilon_1 * \epsilon_2| \leq |0.5 - \epsilon_1|$ και $|0.5 - \epsilon_1 * \epsilon_2| \leq |0.5 - \epsilon_2|$.

(γ) Να αποδείξετε ότι το κανάλι το οποίο έχει για πίνακα μετάβασης το γινόμενο $P^{\nu}(\epsilon)$ είναι ισοδύναμο με ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι του οποίου η πιθανότητα σφάλματος δίνεται από τη σχέση $\frac{1}{2}\left[1 - (1 - 2\epsilon)^{\nu}\right]$. Σε αυτήν την περίπτωση, ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού;

10. **Κατανομή πηγής (Επαναληπτική Εξέταση Θ. Π., Σεπτέμβριος 2008)**



Σχήμα 2: Κανάλι προσθετικού θορύβου με κύκλωμα απόφασης (slicer)

Θεωρούμε το κανάλι προσθετικού θορύβου του Σχήματος 2.

Η (διακριτή) πηγή X παίρνει τιμές στο σύνολο $\{-1, +1\}$ και οι X_i που αντιστοιχούν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές i είναι ανεξάρτητες ομοίως κατανεμημένες (i.i.d.) $\sim$ Bern(p). Ο θόρυβος Z_i είναι συνεχής ανεξάρτητη ομοίως κατανεμημένη τ.μ. (δηλαδή μια λευκή τυχαία διαδικασία διακριτού χρόνου με συνεχείς τιμές) και ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-4/3, 4/3]$. Το κύκλωμα απόφασης παράγει μια εκτίμηση Y_i της X_i με βάση την τιμή του αθροίσματος $U_i = X_i + Z_i$. Όταν $U_i > \alpha$, $Y_i = +1$, αλλιώς $Y_i = -1$. $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δίνεται ότι $\log_2 7 \approx 2.8074$.

(α) Σχεδιάστε ή δώστε μια έκφραση για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ${}_i$.

(β) Σχεδιάστε ή δώστε μια έκφραση για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της U_i εάν $p = 1/2$.

(γ) Έστω, ότι $\alpha \in [-0.5, 0.5]$. Υπολογίστε τις δεσμευμένες πιθανότητες σφάλματος $P_{e,-1} = \Pr\{Y = +1 | X = -1\}$ και $P_{e,+1} = \Pr\{Y = -1 | X = +1\}$ ως συνάρτηση του α. $p \in [0,\ 1]$ (και όχι, κατ' ανάγκη, $p = 1/2$ όπως προηγουμένως).

(δ) Έστω, τώρα, ότι $\alpha = 0$. Υπολογίστε τις πιθανότητες σφάλματος $P_{e,-1}$ και $P_{e,+1}$.

(ε) Για $\alpha = 0$, δώστε ένα διακριτό μοντέλο για το κανάλι με είσοδο τη X και έξοδο την Y. Πρόκειται για κανάλι με η χωρίς μνήμη; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(στ) Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού που μοντελοποιήσατε στο προηγούμενο ερώτημα. Για ποια τιμή της p επιτυγχάνεται η χωρητικότητα;

11. **Κανάλι (Επαναληπτική εξέταση Θ. Π., Σεπτέμβριος 2009)**

Έστω $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0,1,2,3\}$ τα σύμβολα εισόδου και εξόδου, αντιστοίχως, διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1-\epsilon & \epsilon & 0 & 0 \\ \epsilon & 1-\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\delta & \delta \\ 0 & 0 & \delta & 1-\delta \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι όταν η είσοδος του καναλιού ανήκει στο $\mathcal{X}_1 = \{0,1\}$ η έξοδος ανήκει στο $\mathcal{Y}_1 = \{0,1\}$. Ομοίως, για $\mathcal{X}_2 = \{2,3\}$, η έξοδος ανήκει στο $\mathcal{Y}_2 = \{2,3\}$.

(α) Σχεδιάστε το διάγραμμα μετάβασης του καναλιού.

(β) Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού για $\epsilon = \delta = 1/2$.

(γ) Στη συνέχεια της άσκησης θεωρούμε ότι τα δ και ϵ μπορούν να πάρουν *οποιεσδήποτε* τιμές (όχι, πλέον, 1/2).

Έστω ότι, για την κατανομή εισόδου, $p(x)$, ισχύει $p(0)+p(1) = \alpha$ και $p(2)+p(3) = 1-\alpha$. Δείξτε ότι για την αμοιβαία πληροφορία, $I(X;Y)$, μεταξύ της εισόδου, X, και της εξόδου, Y, του καναλιού P ισχύει

$$I(X;Y) = H(\alpha) + \alpha I(X;Y|X \in \mathcal{X}_1) + (1-\alpha) I(X;Y|X \in \mathcal{X}_2).$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τ.μ. V η οποία υποδηλώνει εάν $X \in \mathcal{X}_1$ ή $X \in \mathcal{X}_2$ και χρησιμοποιήστε τη για να βρείτε εκφράσεις για την $H(X)$ και $H(X|Y)$.

(δ) Δείξτε ότι η μεγιστοποίηση της αμοιβαίας πληροφορίας προκειμένου να υπολογίσουμε τη χωρητικότητα του καναλιού μπορεί να γίνει σε δύο βήματα: Στο πρώτο βήμα βρίσκουμε τις κατανομές $p_1(x|X \in \mathcal{X}_1)$ και $p_2(x|X \in \mathcal{X}_2)$ που μεγιστοποιούν τις $I(X;Y|X \in \mathcal{X}_1)$ και $I(X;Y|X \in \mathcal{X}_2)$, αντιστοίχως. Στο δεύτερο βήμα υπολογίζουμε την παράμετρο α που μεγιστοποιεί την $I(X;Y)$. Εάν C_1 είναι η χωρητικότητα του καναλιού

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1-\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1-\epsilon \end{bmatrix}$$

και C_2 η χωρητικότητα του καναλιού

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1-\delta & \delta \\ \delta & 1-\delta \end{bmatrix},$$

εξηγήστε γιατί

$$C \triangleq \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{\alpha} \left\{ H(\alpha) + \alpha C_1 + (1-\alpha) C_2 \right\}.$$

(ε) Δείξτε ότι η χωρητικότητα, C, του καναλιού με πίνακα μετάβασης P ισούται με $C = \log\left(2^{C_1} + 2^{C_2}\right)$.

12. ***Κανάλι – Cover & Thomas 7.12 (Επαναληπτική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Σεπτέμβριος 2009)**

Θεωρούμε το διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

(α) Σχεδιάστε το διάγραμμα του καναλιού.

(β) Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Εξηγήστε διαισθητικά γιατί μία από τις εισόδους του καναλιού (ποια;) δε χρησιμοποιείται όταν μεταδίδουμε με ρυθμό αυθαίρετα κοντά στη χωρητικότητα.

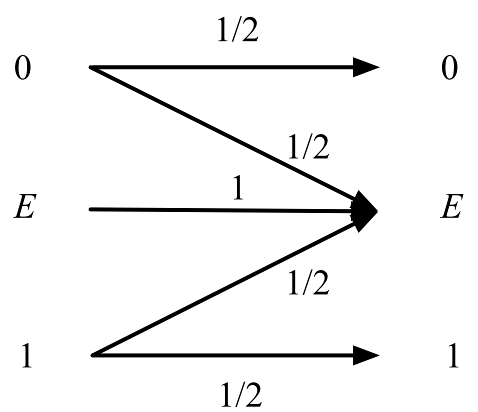
Υπόδειξη: Εκμεταλλευτείτε κάποια συμμετρία στο κανάλι για να απλοποιήσετε τις πράξεις.

(γ) Επαληθεύστε ότι η χωρητικότητα του καναλιού είναι η ίδια με αυτή του καναλιού διαγραφής (Binary Erasure Channel).

13. **Χρήση διαγραφής από τον πομπό (Τελική Εξέταση Θ. Π., Φεβρουάριος 2010)**

Όπως είδαμε στο μάθημα, η χωρητικότητα του *δυαδικού* καναλιού διαγραφής (binary erasure channel - BEC) ισούται με $C = 1 - \alpha$ και επιτυγχάνεται με χρήση ομοιόμορφης κατανομής στον πομπό (Bern(1/2)). Στην άσκηση αυτή θα εξετάσουμε εάν έχει νόημα, εφόσον αυτό είναι εφικτό, ο πομπός να στέλνει όχι μόνο δύο σύμβολα (π.χ. 0 και 1), αλλά και ένα τρίτο σύμβολο διαγραφής. Στην άσκηση αυτή δε θα μας απασχολήσει σε τι αντιστοιχεί ένα σύμβολο διαγραφής στην πράξη και απλώς θα το δούμε ως ένα τρίτο σύμβολο εισόδου που έχουμε στη διάθεσή μας για τη μετάδοση.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε το διακριτό κανάλι *χωρίς μνήμη* του Σχήματος 3. Τα σύμβολα 0 και 1 διαγράφονται με πιθανότητα 1/2, ενώ, αν στείλουμε διαγραφή, θεωρούμε ότι φτάνει πάντοτε στο δέκτη ως διαγραφή.



Σχήμα 3: Τροποποιημένο Κανάλι Διαγραφής με 3 εισόδους.

(α) Είναι το κανάλι συμμετρικό; Είναι το κανάλι ασθενώς συμμετρικό;

(β) Δώστε ένα άνω φράγμα, C_{UB}, και ένα κάτω φράγμα, C_{LB}, για τη χωρητικότητα του καναλιού. Το κάτω φράγμα που ζητείται πρέπει να είναι *αυστηρώς* μεγαλύτερο του 0.5: $C_{\text{LB}} > 0.5$ bits. Με βάση τα όρια που βρήκατε, αν μας δίνεται η δυνατότητα, κερδίζουμε σε χωρητικότητα αν χρησιμοποιήσουμε και το 3ο σύμβολο διαγραφής στον πομπό;

Υπόδειξη: Αν δυσκολεύεστε να βρείτε $C_{\text{LB}} > 0.5$ bits, πιθανώς να σας βοηθήσει η απάντησή σας στο επόμενο Ερώτημα (γ).

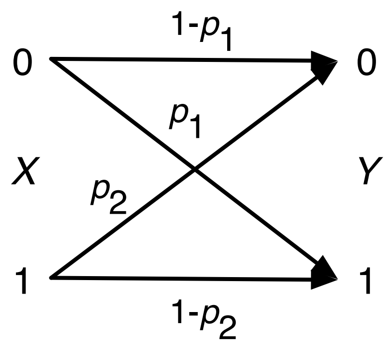
Σε περίπτωση που σας χρειαστεί, δίνεται ότι $\log_2 3 \approx 1.585$ και ότι $H(1/3) \triangleq -\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}\log\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0.9183$ bits.

(γ) Υπολογίστε τη χωρητικότητα, C, του καναλιού του Σχήματος 3, καθώς και την κατανομή πομπού, $p^*(x)$, με την οποία επιτυγχάνεται.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη συμμετρία του διαγράμματος μετάβασης του καναλιού για να απλοποιήσετε τις πράξεις (Προσοχή: Δε σημαίνει, απαραίτητα, ότι το κανάλι είναι συμμετρικό ή ασθενώς συμμετρικό).

14. **Μη συμμετρικό Δυαδικό Κανάλι (Επαναληπτική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Σεπτέμβριος 2010)**

Θεωρούμε το *μη συμμετρικό* δυαδικό κανάλι του Σχήματος 4.



Σχήμα 4: Το μη συμμετρικό δυαδικό κανάλι.

Σε περίπτωση που σας χρειαστεί στην άσκηση, δίνεται ότι η χωρητικότητα του καναλιού Z ισούται με $C \leq \log\left(1 + (1-f)f^{f/(1-f)}\right)$, όπου f η πιθανότητα μετάβασης από το 1 στο 0.

(α) Δείξτε ότι το μη συμμετρικό δυαδικό κανάλι μπορει να γραφτεί ως διαδοχή ενός δυαδικού συμμετρικού καναλιού με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου p και ενός καναλιού Z με πιθανότητα μετάβασης από το 1 στο 0 ίση με f. Δώστε εκφράσεις για τις παραμέτρους p και f συναρτήσει των p_1 και p_2.

(β) Δείξτε ότι για *οποιοδήποτε* κανάλι $\mathcal{C}$ που μπορεί να γραφτεί ως διαδοχή δύο καναλιών $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$, $C \leq \min\{C_1, C_2\}$, όπου C, C_1 και C_2 είναι οι χωρητικότητες των καναλιών $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$, αντιστοίχως.

Επίσης, δώστε μια ικανή συνθήκη για να ισχύει η ισότητα, δηλαδή $C = \min\{C_1, C_2\}$.

(γ) Με βάση τις απαντήσεις σας στα Ερωτήματα (α) και (β) βρείτε ένα *άνω* φράγμα για τη χωρητικότητα του μη συμμετρικού δυαδικού καναλιού. Το άνω φράγμα πρέπει να είναι συνάρτηση των p_1 και p_2.

(δ) Βρείτε ένα *κάτω* φράγμα για τη χωρητικότητα του μη συμμετρικού δυαδικού καναλιού (χωρίς να χρησιμοποιήσετε, κατ' ανάγκη, τα προηγούμενα ερωτήματα). Δε χρειάζεται να δώσετε αναλυτικές εκφράσεις. Αρκεί να εξηγήσετε πώς μπορεί να υπολογιστεί το κάτω φράγμα.

15. **Δυαδικό συμμετρικό κανάλι με μεταβαλλόμενη πιθανότητα αναστροφής ψηφίου (Τελική Εξέταση Θ. Π., Φεβρουάριος 2011)**

Θεωρούμε ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC) με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου $p \leq \frac{1}{2}$. Ωστόσο, η πιθανότητα αναστροφής ψηφίου μεταβάλλεται με το χρόνο, n. Συγκεκριμένα, η p_n μπορεί να πάρει δύο πιθανές τιμές, p_A και p_B. Θεωρούμε, επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $0 \leq p_A \leq p_B \leq \frac{1}{2}$. Η διαδικασία p_n είναι ανεξάρτητη και ομοίως κατανεμημένη (i.i.d.), δηλαδή η τιμή της τη χρονική στιγμή n δεν εξαρτάται από προηγούμενες χρονικές στιγμές και δεν επηρεάζει επόμενες χρονικές στιγμές.

Έστω ότι $\Pr\{p_n = p_A\} = \alpha = 1 - \Pr\{p_n = p_B\}$.

(α) Εάν γνωρίζουμε την τιμή της p_n τη χρονική στιγμή n, με τι ισούται η χωρητικότητα, C, του καναλιού τη χρονική στιγμή n; Θα ονομάσουμε την τιμή αυτή $C(S_n)$ όπου $S_n = A$ ή B, ανάλογα με την τιμή της p_n (p_A ή p_B, αντιστοίχως).

Με ποια κατανομή εισόδου επιτυγχάνεται η χωρητικότητα;

(β) Εάν χρησιμοποιήσουμε το κανάλι πάρα πολλές φορές ($n \to \infty$) και κάθε φορά γνωρίζουμε την τιμή της p_n στον πομπό (η οποία, όμως, εξακολουθεί να μεταβάλλεται με τυχαίο τρόπο) ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορούμε να επιτύχουμε; Δηλαδή, με τι ισούται η ποσότητα

$$C_{perfect} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} C(S_n);$$

(γ) Έστω, τώρα, ότι δε γνωρίζουμε την τιμή της p_n στον πομπό. Δείξτε ότι μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το κανάλι ως ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC) με παράμετρο $\bar{p}$. Δώστε μια έκφραση για την $\bar{p}$ συναρτήσει των α, p_A και p_B, καθώς και για τη χωρητικότητα, $C_{no\ state\ info}$, εάν υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε το κανάλι n φορές με $n \to \infty$.

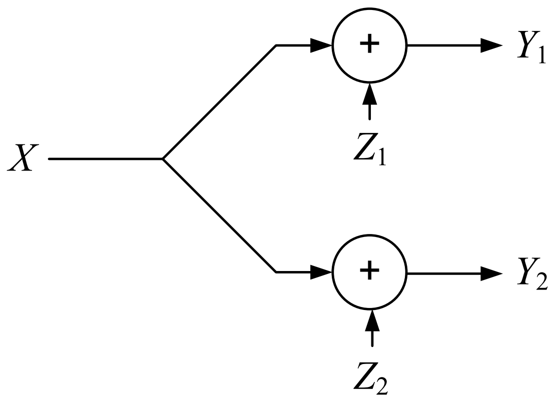
(δ) Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός, $R_{conservative}$, με τον οποίο μπορούμε να μεταδώσουμε αν είμαστε συντηρητικοί και υποθέσουμε ότι η p_n παίρνει πάντοτε τη (χειρότερη) τιμή p_B; Τι κατανομή εισόδου πρέπει να χρησιμοποιήσουμε; Συγκρίνετε με τη $C_{no\ state\ info}$ του προηγούμενου ερωτήματος. Υπάρχει περίπτωση να ισχύει $R_{conservative} = C_{no\ state\ info}$;

(ε) Αποδείξτε ότι $C_{no\ state\ info} \leq C_{perfect}$. Επομένως, γνώση της κατάστασης του καναλιού στον πομπό αυξάνει τη χωρητικότητα. Εάν $\alpha > 0$, για ποιες τιμές των p_A και p_B ισχύει η ισότητα;

16. **Ένας πομπός, πολλοί δέκτες (Π. Θ. Θ. Π. – Τελική Εξέταση Ιουνίου 2011)**

Θεωρούμε έναν πομπό που μεταδίδει σε δύο δέκτες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5. Σε κάθε δέκτη προστίθεται πραγματικός Γκαουσιανός θόρυβος μηδενικής μέσης τιμής. Δηλαδή, $Z_1 \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_1^2\right)$ και , $Z_2 \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_2^2\right)$. Οι θόρυβοι είναι *ανεξάρτητοι* μεταξύ τους.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $\sigma_2^2 \geq \sigma_1^2$.



Σχήμα 5: Μετάδοση σε 2 δέκτες.

(α) Αρχικά θεωρούμε ότι η ανίχνευση μπορεί να γίνει *από κοινού* (jointly) με χρήση των σημάτων και των δύο δεκτών. Δηλάδη οι δέκτες συνδέονται μεταξύ τους ή, ισοδύναμα, τα σήματά τους αποστέλλονται σε κάποιο κέντρο επεξεργασίας.

Αν επιβάλουμε περιορισμό μέσης ισχύος στον πομπό $\mathbb{E}\left[X^2\right] \leq P$ και $X \in \mathbb{R}$, βρείτε τη χωρητικότητα C_{joint} του καναλιού μεταξύ του πομπού και των δύο δεκτών, καθώς και την κατανομή της X με την οποία επιτυγχάνεται.

(β) Έστω ότι θέτουμε τον εξής περιορισμό στους δέκτες: Η αποκωδικοποιήση πρέπει να βασιστεί στο σήμα $\tilde{Y} = aY_1 + (1-a)Y_2$ με δεδομένο $0 \leq a \leq 1$. Δηλαδή, αντί να έχουμε απευθείας πρόσβαση στο σήμα κάθε δέκτη (δηλαδή στο διάνυσμα **Y** $= [Y_1 \, Y_2]^T$), έχουμε πρόσβαση μόνο στο $\tilde{Y}$.

Βρείτε τη χωρητικότητα, $C_{\text{lin-comb}}$, του καναλιού μεταξύ της X και της˜για δεδομένο a.

Αλλάζει η απάντησή σας αν $\tilde{Y} = aY_1 + bY_2$ με $a > 0$, $b > 0$ και $a + b = c > 1$, όπου c σταθερά;

(γ) Επιλέξτε την τιμή του $0 \leq a \leq 1$ που μεγιστοποιεί τη $C_{\text{lin-comb}}$ και συγκρίνετε με την απάντησή σας στο Ερώτημα (α). Σχολιάστε.

(δ) Βρείτε το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης, $C_{\text{separate}} = C_{\text{separate},1} + C_{\text{separate},2}$, που μπορούμε να πετύχουμε αν η αποκωδικοποίηση πρέπει να γίνει ξεχωριστά σε κάθε δέκτη, αν, δηλαδή, δεν επιτρέπεται συνεργασία (από κοινού αποκωδικοποίηση). Συγκρίνετε με το αποτέλεσμα του Ερωτήματος (α).

17. **Ασθενώς Συμμετρικά Διακριτά Κανάλια Χωρίς Μνήμη (Τελική Εξέταση Θ. Π., Φεβρουάριος 2012)**

    Όπως γνωρίζουμε, τα ασθενώς συμμετρικά διακριτά κανάλια χωρίς μνήμη αποτελούν μία υποκατηγορία του συνόλου των διακριτών καναλιών χωρίς μνήμη. Επομένως, περιμένουμε ότι, στη γενική περίπτωση, για κανάλι με δεδομένο αριθμό εισόδων, $|\mathcal{X}|$, και δεδομένο αριθμό εξόδων, $|\mathcal{Y}|$, η μέγιστη χωρητικότητα ενός ασθενώς συμμετρικού καναλιού χωρίς μνήμη είναι μικρότερη από τη χωρητικότητα ενός καναλιού χωρίς μνήμη που δεν υπόκειται στον περιορισμό να είναι ασθενώς συμμετρικό.

    (α) Δείξτε ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του πίνακα μετάβασης *ασθενώς συμμετρικού* καναλιού $|\mathcal{X}|$ εισόδων και $|\mathcal{Y}|$ εξόδων ισούται με $\frac{|\mathcal{X}|}{|\mathcal{Y}|}$.

    (β) Στη συνέχεια της άσκησης θεωρούμε *ασθενώς συμμετρικά* κανάλια με 2 εισόδους και 3 εξόδους. Δείξτε ότι

    i. Υπάρχει *τουλάχιστον* μία στήλη του πίνακα μετάβασης της οποίας και τα δύο στοιχεία ισούνται με $\frac{1}{3}$.

    ii. Μπορούμε να εκφράσουμε τον πίνακα μετάβασης οποιουδήποτε ασθενώς συμμετρικού καναλιού με $|\mathcal{X}| = 2$ και $|\mathcal{Y}| = 3$ συναρτήσει μίας παραμέτρου $0 \leq q \leq 1$ (εάν επιτρέπεται να αλλάξουμε την αρίθμηση των εξόδων και, επομένως, να ανταλλάξουμε στήλες του πίνακα μετάβασης, εφόσον το επιθυμούμε).

    Επίσης, δώστε την έκφραση για τον πίνακα μετάβασης. Μπορείτε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσετε ότι η στήλη της οποίας και τα δύο στοιχεία ισούνται με $\frac{1}{3}$ είναι η πρώτη.

    Υπόδειξη: Η κάθε γραμμή έχει 3 στοιχεία, αλλά χρειαζόμαστε 2 παραμέτρους για να τα περιγράψουμε (γιατί;). Οπότε, συνολικά, χρειαζόμαστε 4 παραμέτρους για να περιγράψουμε τα στοιχεία του πίνακα. Ωστόσο, υπάρχουν 2 επιπλέον περιορισμοί. Η πρώτη γραμμή να είναι αναδιάταξη της δεύτερης (άρα μειώνουμε την περιγραφή κατά 2 παραμέτρους) και, επίσης, το άθροισμα των στοιχείων σε κάθε στήλη να είναι σταθερό. Επίσης, χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του Ερωτήματος (α).

    (γ) Εξηγήστε, κατ' αρχάς, γιατί η αλλαγή αρίθμησης των εξόδων ενός καναλιού (ή, ισοδύναμα, η ανταλλαγή στηλών του πίνακα μετάβασής του) δεν επηρεάζει την τιμή της χωρητικότητάς του. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η στήλη του πίνακα μετάβασης της οποίας και τα δύο στοιχεία ισούνται με $\frac{1}{3}$ είναι η πρώτη.

    Χρησιμοποιώντας τη γενική μορφή του πίνακα μετάβασης που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα βρείτε ποια είναι η μέγιστη χωρητικότητα ενός ασθενώς συμμετρικού καναλιού χωρίς μνήμη με 2 εισόδους και 3 εξόδους. Δώστε τον πίνακα (ή τους πίνακες) μετάβασης των καναλιών με μέγιστη χωρητικότητα, καθώς και μία κατανομή με την οποία επιτυγχάνεται η χωρητικότητα.

    Συγκρίνετε την τιμή που βρήκατε για τη μέγιστη χωρητικότητα με τη μέγιστη χωρητικότητα, C_{max}, ενός καναλιού 2 εισόδων και 3 εξόδων (όχι, απαραιτήτως, συμμετρικού ή ασθενώς συμμετρικού). Δηλαδή

$$C_{\text{max}} = \max\left\{C_s : s \in \mathcal{S}\right\},$$

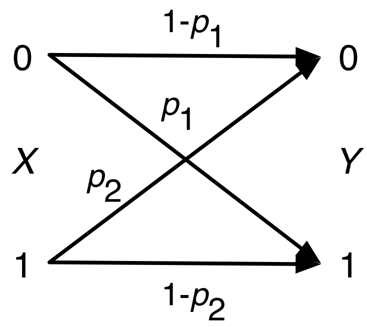
όπου C_s είναι η χωρητικότητα του καναλιού s και $\mathcal{S}$ είναι το σύνολο *όλων* των διακριτών καναλιών χωρίς μνήμη 2 εισόδων και 3 εξόδων.

18. **To be or not to be (symmetric)? (Τελική Εξέταση Θ. Π., Ιανουάριος 2013)**

Σημείωση: Αρχικά η άσκηση είχε περισσότερα ερωτήματα, αλλά αφαιρέθηκαν γιατί υπήρχε κάποιο λάθος και οι πράξεις ήταν χρονοβόρες.

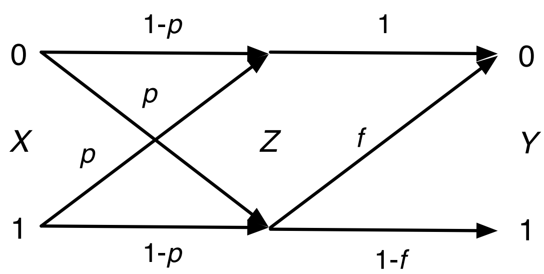
Σε αυτή την άσκηση θα ασχοληθούμε με το εξής ερώτημα. Εάν θεωρήσουμε ένα δυαδικό κανάλι, θέλουμε να είναι συμμετρικό ή, αντιθέτως, θέλουμε να είναι (εντόνως) μη συμμετρικό;

Έστω το *μη συμμετρικό* δυαδικό κανάλι του Σχήματος 6.



Σχήμα 6: Μη συμμετρικό δυαδικό κανάλι.

Μπορεί να αποδειχτεί (το έκαναν συνάδελφοί σας σε διαγώνισμα πριν από κάποια χρόνια), ότι ένα μη συμμετρικό δυαδικό κανάλι μπορεί να γραφτεί ως διαδοχή ενός συμμετρικού δυαδικού καναλιού και ενός καναλιού Z, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.



Σχήμα 7: Μη συμμετρικό δυαδικό κανάλι ως διαδοχή συμμετρικού δυαδικού καναλιού και καναλιού Z.

Εάν υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $p_1 \leq p_2 \leq \frac{1}{2}$, αποδεικνύεται ότι

$$f = p_2 - p_1 \text{ και } p = \frac{p_1}{1 + p_1 - p_2}.$$

Επίσης, αποδεικνύεται αυστηρώς αυτό που περιμένουμε διασθητικά, ότι, δηλαδή, η χωρητικότητα του καναλιού που αποτελείται από διαδοχή των δύο καναλιών δεν μπορεί να υπερβαίνει τη χωρητικότητα οποιουδήποτε από τα επί μέρους κανάλια. Επομένως, η χωρητικότητα του μη συμμετρικού δυαδικού καναλιού δεν μπορεί να υπερβαίνει τη χωρητικότητα του συμμετρικού δυαδικού καναλιού με παράμετρο p.

Έστω ότι ξεκινάμε με $p_1 = p_2$. Στη συνέχεια, αρχίζουμε και αυξάνουμε το p_2 ώστε να καταστήσουμε το κανάλι μη συμμετρικό. Πώς επηρεάζεται η χωρητικότητά του; Με βάση το αποτέλεσμα, για δεδομένο p_1, προτιμάτε συμμετρικό ή μη συμμετρικό δυαδικό κανάλι;

Υπόδειξη: Εκφράστε το p συναρτήσει της παραμέτρου f και παρατηρήστε ότι η f παίρνει τιμές από 0 έως $\frac{1}{2} - p_1$.

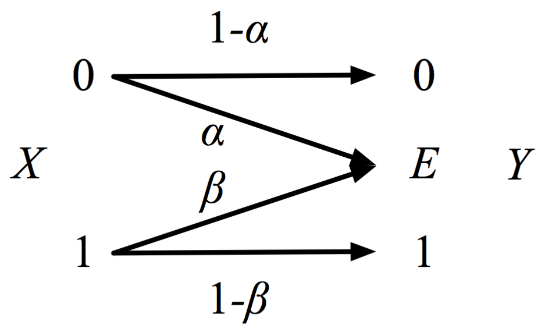
19. **Χωρητικότητα καναλιών (Π. Θ. Θ. Π., Ιούνιος 2013)**

Στην άσκηση αυτή ζητείται να συγκρίνετε χωρητικότητες καναλιών και να υπολογίσετε φράγματα.

Υπόδειξη: Τα δύο ερωτήματα είναι (σχετικά) ανεξάρτητα μεταξύ τους.

(α) Θεωρήστε το κανάλι διαγραφής του Σχήματος 8 με *μη* συμμετρικές πιθανότητες διαγραφής.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι $\beta \geq \alpha$.



Σχήμα 8: Δυαδικό κανάλι με μη συμμετρικές πιθανότητες διαγραφής.

Δείξτε ότι η χωρητικότητα του καναλιού, έστω $C(\alpha, \beta)$, ικανοποιεί τη σχέση

$$C_Z(\alpha) \leq C(\alpha, \beta) \leq 1 - \alpha,$$

όπου $C_Z(\alpha)$ η χωρητικότητα του καναλιού Z με πιθανότητα αναστροφής συμβόλου α.

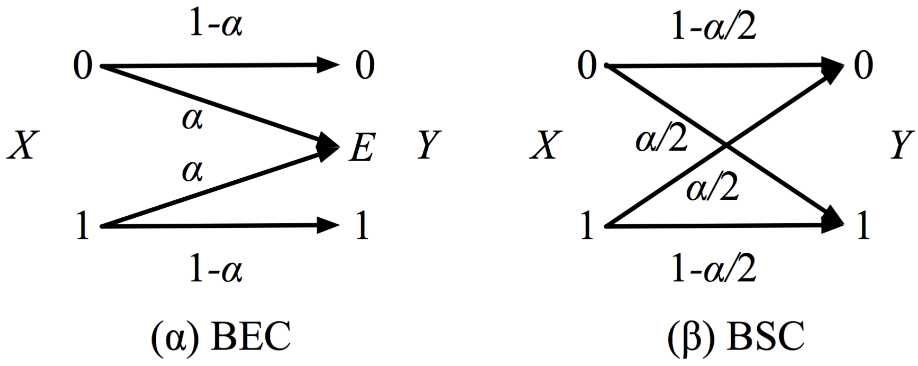
Υπόδειξη: Δημιουργήστε κάποια ‘‘ενδιάμεσα’’ κανάλια και χρησιμοποιήστε την Ανισότητα Επεξεργασίας Δεδομένων.

(β) Θεωρήστε το δυαδικό κανάλι διαγραφής με συμμετρικές πιθανότητες διαγραφής (BEC) του Σχήματος 9(α). Ζητείται να αποδείξετε ότι

$$C_{BEC}(\alpha) \geq C_{BSC}(\alpha/2)$$

για όλες τις τιμές της παραμέτρου $0 \leq \alpha \leq 1$, όπου $C_{BSC}(\alpha/2)$ είναι η χωρητικότητα του δυαδικού συμμετρικού καναλιού του Σχήματος 9(β) (BSC) με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου ίση με $\alpha/2$.

Πότε ισχύει η ισότητα;



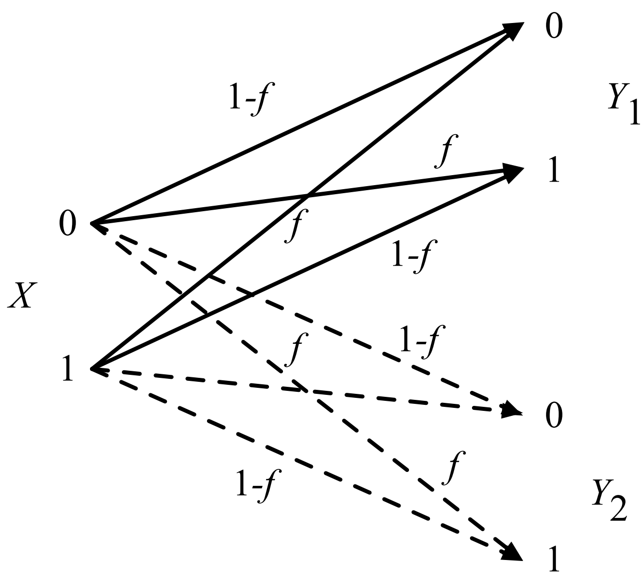
Σχήμα 9: BEC και BSC με $f = \alpha/2$.

Παρατηρήστε ότι, παρόλο που στο BEC γνωρίζουμε πότε έχει συμβεί διαγραφή, στο BSC τα σύμβολα μεταδίδονται αυτούσια με μεγαλύτερη πιθανότητα, οπότε δεν είναι προφανές ότι $C_{BEC}(\alpha) \geq C_{BSC}(\alpha/2)$.

Υπόδειξη: Για να αποφύγετε πράξεις, εκφράστε το BSC ως διαδοχή του BEC του Σχήματος 9(α) και ενός δεύτερου καναλιού χωρίς μνήμη με κατάλληλες παραμέτρους. Στη συνέχεια, χρησιμοποιήστε την Ανισότητα Επεξεργασίας Δεδομένων.

20. **Δύο συμμετρικά κανάλια (Τελική Εξέταση Θ. Π., Φεβρουάριος 2014)**

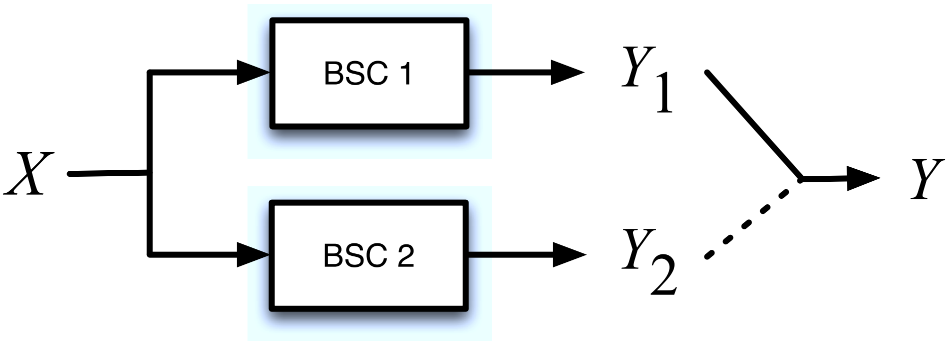
Θεωρούμε ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη με μία είσοδο και δύο εξόδους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.



Σχήμα 10: Δύο ανεξάρτητα BSC με κοινή είσοδο.

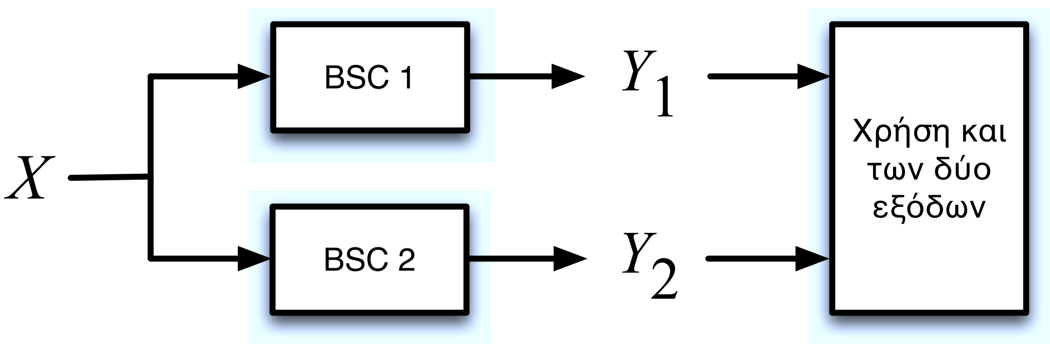
Ο πομπός έχει στη διάθεσή του δύο σύμβολα, έστω $X = 0$ και $X = 1$ και συνδέεται με κάθε δέκτη μέσω δυαδικού συμμετρικού καναλιού (BSC) με παράμετρο $f \leq \frac{1}{2}$. Θεωρούμε, επίσης, ότι Y_1 και $Y_2 \in \mathcal{Y} = \{0, 1\}$. Παρόλο που τα δύο BSC έχουν την ίδια παράμετρο αντιστροφής ψηφίου, f, είναι μεταξύ τους *ανεξάρτητα*, δηλαδή $p(y_1, y_2|x) = p(y_1|x) \cdot p(y_2|x)$.

(α) Έστω ότι στο τέλος κάθε χρονικής στιγμής, n, μπορούμε να κοιτάζουμε την έξοδο *μόνο* ενός καναλιού (όποιου θέλουμε εμείς), όπως φαίνεται στο Σχήμα 11. Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης, έστω C_1, που μπορούμε να επιτύχουμε; Ποια είναι η κατανομή εισόδου που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;



Σχήμα 11: Επιλογή μίας από τις δύο εξόδους.

(β) Έστω, τώρα, ότι μπορούμε να παρατηρούμε και τις δύο εξόδους, Y_1 και Y_2. Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης, έστω C_2, που μπορούμε να επιτύχουμε; Ποια είναι η κατανομή εισόδου που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;



Σχήμα 12: Χρήση και των δύο εξόδων.

Υπόδειξη: Μεγιστοποιήστε την $I(X; Y_1, Y_2)$. Η επίλυση απλοποιείται αν χρησιμοποιήσετε κάποια συμμετρία που υπάρχει στο πρόβλημα. Επίσης, ενδέχεται να σας βοηθήσει η χρήση της Αρχής Διαχωρισιμότητας της Εντροπίας και η χρήση της παραμέτρου $g \triangleq f(1 - f)$.

Προσοχή! Οι Y_1 και Y_2 *δεν* είναι ανεξάρτητες (εκτός αν $f = 1/2$). Είναι ανεξάρτητες *δεδομένης* της εισόδου, X.

(γ) Δείξτε ότι, για $f < \frac{1}{2}$, $C_2 > C_1$. Δηλαδή, ισχύει αυτό που περιμέναμε διαισθητικά: Χρήση και των δύο εξόδων οδηγεί σε αύξηση της χωρητικότητας.

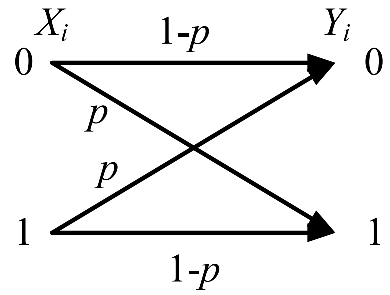
Ενδεικτικές Λύσεις

1. ***Τα κανάλια με μνήμη έχουν μεγαλύτερη χωρητικότητα – Cover & Thomas 7.3 (τροποποιημένη)**

   Θεωρήστε το κανάλι $Y_i = X_i \oplus Z_i$, όπου $\oplus$ πρόσθεση modulo-2 (XOR). Οι μεταβλητές X_i και Y_i είναι δυαδικές, αλλά όχι, κατ' ανάγκη, ομοίως κατανεμημένες. Έστω, επίσης, ότι η Z_i έχει σταθερή μάζα πυκνότητας πιθανότητας Pr$\{Z_i = 1\} = p = 1-$Pr$\{Z_i = 0\}$. Ωστόσο, οι $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ *δεν* είναι, κατ' ανάγκη, ανεξάρτητες.

   (α) Δώστε ένα σχεδιάγραμμα του καναλιού. Μοιάζει με κάποιο γνωστό σας κανάλι; Σε τι διαφέρει (αν διαφέρει);

   Απάντηση:

   Σχήμα 13: Σχήμα για την Άσκηση 7.3 των Cover & Thomas

   Ένα σχεδιάγραμμα του καναλιού δίνεται στο Σχήμα 13. Πρόκειται για το δυαδικό συμμετρικό κανάλι, με τη διαφορά ότι στο δυαδικό συμμετρικό κανάλι οι πιθανότητες αναστροφής είναι ανεξάρτητες μεταξύ διαφορετικών χρήσεων του καναλιού.

   (β) Εάν οι Z_i είναι ανεξάρτητες, αν, δηλαδή, το κανάλι δεν έχει μνήμη, ποια είναι η χωρητικότητά του και με ποια κατανομή $p(x)$ επιτυγχάνεται; Ονομάστε αυτή τη χωρητικότητα C.

   Απάντηση:

   Εάν το κανάλι δεν έχει μνήμη, ταυτίζεται, δηλαδή, με το δυαδικό συμμετρικό κανάλι, η χωρητικότητά του ισούται με $C = 1 - H(p)$.

   (γ) Επιστρέφοντας στη γενική περίπτωση όπου οι $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ δεν είναι, κατ' ανάγκη, ανεξάρτητες, δείξτε ότι, εάν η είσοδος είναι ανεξάρτητη και ομοίως κατανεμημένη Bern$(1/2)$,

   $$I(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \geq nC,$$

   όπου C η χωρητικότητα του καναλιού χωρίς μνήμη του Ερωτήματος (β).

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
I(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) &= H(X_1, X_2, \ldots, X_n) - H(X_1, X_2, \ldots, X_n | Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \\
&\overset{(\alpha)}{=} H(X_1, X_2, \ldots, X_n) - H(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n | Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \\
&\overset{(\beta)}{\geq} H(X_1, X_2, \ldots, X_n) - H(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) \\
&\overset{(\gamma)}{\geq} H(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \sum H(Z_i) \\
&= H(X_1, X_2, \ldots, X_n) - nH(p) \\
&\overset{(\delta)}{=} n - nH(p) = nC.
\end{aligned}$$

(α) $Y_i = X_i \oplus Z_i \Rightarrow X_i = Y_i \oplus Z_i$, (β) η υπό συνθήκη εντροπία δεν υπερβαίνει την εντροπία, (γ) η από κοινού εντροπία δεν υπερβαίνει το άθροισμα των επί μέρους εντροπιών, (δ) Οι X_i είναι i.i.d. και ακολουθούν κατανομή Bernoulli(1/2).

(δ) Με βάση το Ερώτημα (γ), συμπεράνετε ότι, για τη χωρητικότητα του καναλιού με μνήμη $C' \triangleq \frac{1}{n} \max_{p(x)} I(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, ισχύει $C' \geq C$.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Στο προηγούμενο ερώτημα δείξαμε ότι, για X_i i.i.d, Bern(1/2), $I(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \geq nC$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
C' &= \frac{1}{n} \max_{p(\mathbf{x})} I_p(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \\
&\geq \frac{1}{n} I_{p(\mathbf{x})=\text{i.i.d Bern(1/2)}}(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \geq C.
\end{aligned}$$

(ε) Δώστε μια διαισθητική αιτιολόγηση για το αποτέλεσμα που αποδείξατε στο Ερώτημα (δ), ότι, δηλαδή, η χωρητικότητα των καναλιών χωρίς μνήμη δεν μπορεί να υπερβεί τη χωρητικότητα των αντίστοιχων καναλιών με μνήμη.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Σε κανάλια χωρίς μνήμη, γνώση των εξόδων κατά τις χρονικές στιγμές $1, 2, \ldots, n-1$ δε μας παρέχει καμία πληροφορία για τη χρονική στιγμή n. Αντίθετα, η συμπεριφορά καναλιών με μνήμη εξαρτάται σε κάποιο βαθμό από τις προηγούμενες εισόδους (και εξόδους). Επομένως, έχουμε κάποια πληροφορία για το πώς θα συμπεριφερθεί το κανάλι, γεγονός το οποίο οδηγεί σε αύξηση της χωρητικότητας.

2. **Χωρητικότητα καναλιού modulo – Cover & Thomas 7.4**

   Θεωρούμε το κανάλι $Y = X + Z \pmod{11}$, και $Z \sim$ Unif$\{1, 2, 3\}$ και $\mathcal{X} = \{0, 1, \ldots, 10\}$.

   Υπενθύμιση: mod a: Το υπόλοιπο της διαίρεσης του X με το a.

(α) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού.

Απάντηση:

$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)}\{H(Y) - H(Y|X)\}$.

$H(Y|X) = H(X + Z \text{ (mod } 11)|X) = H(Z|X) = H(Z) = \log 3$.

Επομένως, $C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} H(Y) - \log 3 = \log 11 - \log 3 = \log \frac{11}{3}$ bits.

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού της χωρητικότητας είναι παρατηρώντας ότι το κανάλι είναι συμμετρικό.

(β) Ποια είναι η βέλτιστη κατανομή $p^*(x)$ που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα;

Απάντηση:

Η κατανομή που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα είναι η ομοιόμορφη στο $\mathcal{X}$. Δηλαδή, $p^*(x) = \frac{1}{11}$, $x \in \mathcal{X}$.

3. **Το κανάλι Z – Cover & Thomas 7.8**

Έστω κανάλι Z με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad X, Y \in \{0, 1\}.$$

Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού, καθώς και την κατανομή εισόδου με την οποία επιτυγχάνεται η χωρητικότητα.

Απάντηση:

Έστω $p = \Pr\{X = 1\}$. Επομένως, με χρήση του πίνακα μετάβασης μπορούμε να γράψουμε:

$H(Y|X) = \Pr\{X = 0\} \cdot H(Y|X = 0) + \Pr\{X = 1\} \cdot H(Y|X = 1) = (1 - p) \cdot 0 + p \cdot H(1/2) = p$.

$\Pr\{Y = 1\} = \frac{1}{2} \Pr\{X = 1\} = \frac{p}{2} \Rightarrow H(Y) = H(p/2)$.

Συνεπώς,

$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(p/2) - p$.

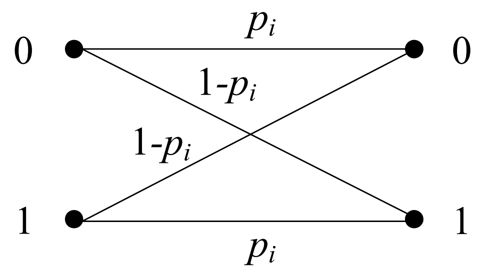
Γνωρίζουμε ότι, για δεδομένη $p(y|x)$, η $I(X;Y)$ είναι κοίλη ($\cap$) συνάρτηση της $p(x)$. Επομένως, εάν υπάρχει p^* τέτοιο ώστε $\frac{d}{dp}I(X;Y) = 0$, η κατανομή $\{1 - p^*, p^*\}$ επιτυγχάνει τη χωρητικότητα. Εάν $\frac{d}{dp}I(X;Y) \neq 0$ για $p \in [0, 1]$, η χωρητικότητα επιτυγχάνεται για $p = 0$ ή $p = 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp}I(X;Y) &= \frac{d}{dp}\{H(p/2) - p\} \\
&= -\frac{1}{2}\log_2\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\frac{p}{2}\frac{2}{p}\log_2 e + \frac{1}{2}\log_2(1 - p/2) + \frac{1}{2}(1 - p/2)\frac{1}{1 - p/2}\log_2 e - 1 \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{1 - p/2}{p/2} - 1 = 0 \Rightarrow \log\frac{1 - p/2}{p/2} = 2 \Rightarrow \frac{1 - p/2}{p/2} = 4 \\
&\Rightarrow 1 - p/2 = 2p \Rightarrow 5p/2 = 1 \Rightarrow p^* = \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Η χωρητικότητα ισούται με $H\left(\frac{2}{10}\right) - 2/5 \approx 0.322$ bits.

4. **Χρονικώς Μεταβαλλόμενα Κανάλια – Cover & Thomas 7.11**

Θεωρούμε το χρονικώς μεταβαλλόμενο κανάλι του Σχήματος 14. Οι $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες δεδομένων των $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με υπό συνθήκη κατανομή μάζας πιθανότητας $p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} p_i(y_i|x_i)$. Έστω $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$. Βρείτε τη $\max_{p(\mathbf{x})} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$. Σχολιάστε την τιμή της χωρητικότητας και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται.



Σχήμα 14: Χρονικώς Μεταβαλλόμενο BSC.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Δεδομένου ότι το κανάλι μεταβάλλεται, δεν έχει νόημα να χρησιμοποιήσουμε την $I(X;Y)$.[1] Θα χρησιμοποιήσουμε την $I(X^n; Y^n)$. Μπορούμε, δηλαδή, να δούμε το κανάλι ως ένα κανάλι χωρίς μνήμη με n εισόδους και n εξόδους στο οποίο η κάθε είσοδος i συνδέεται μόνο με την έξοδο i μέσω ενός BSC με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου p_i.

Για το κανάλι αυτό,

$$\begin{aligned}
I(X_1^n, Y_1^n) &= H(Y_1^n) - H(Y_1^n|X_1^n) \\
&\overset{(i)}{=} H(Y_1^n) - \sum_{i=1}^{n} H(Y_i|X_i) \\
&\overset{(ii)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} H(Y_i) - \sum_{i=1}^{n} H(Y_i|X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(H(Y_i) - H(Y_i|X_i)\right) \\
&\overset{(iii)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} (1 - H(p_i)) = n - \sum_{i=1}^{n} H(p_i(y_i|x_i)).
\end{aligned}$$

(i) Από το γεγονός ότι οι $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες δεδομένων των $X_1, X_2, \ldots, X_n$. (ii) από το άνω φράγμα για την από κοινού εντροπία (iii) Για BSC με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου p_i, $I(X_i; Y_i) \leq 1 - H(p_i) = C_i$.

Η ισότητα στην παραπάνω σχέση ικανοποιείται όταν οι Y_i είναι ανεξάρτητες, όταν, δηλαδή, είναι ανεξάρτητες και οι X_i. Επίσης, πρέπει οι X_i να ακολουθούν ομοιόμορφη

[1] Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την $I(X;Y)$ για κάθε τιμή της p αν τα p_i επαναλαμβάνονται, δηλαδή, για παράδειγμα, αν $p_{i+nk} = p_i$. Ωστόσο αυτό δεν ισχύει, απαραιτήτως, στην άσκηση.

κατανομή ($p_i = 1/2$ για όλα τα i). Συνεπώς,

$$\max I(X_1^n, Y_1^n) = n - \sum_{i=1}^{n} H(p_i(y_i|x_i)).$$

Επομένως, η χωρητικότητα του καναλιού είναι $n - \sum_{i=1}^{n} H(p_i(y_i|x_i))$ bits/(n μεταδόσεις) ή $1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H(p_i(y_i|x_i))$ bits ανά χρήση του καναλιού και επιτυγχάνεται με χρήση βιβλίων κωδίκων που κατασκευάζονται με ρίψη αμερόληπτου και i.i.d. κέρματος.

5. **Κανάλια με εξάρτηση μεταξύ των συμβόλων – Cover & Thomas 7.14**

   Θεωρήστε το εξής κανάλι το οποιο χρησιμοποιεί δυαδικό αλφάβητο, παίρνει ως είσοδο σύμβολα των 2 bits και παράγει ως έξοδο σύμβολα των 2 bits σύμφωνα με την ακόλουθη απεικόνιση: 00 $\to$ 01, 01 $\to$ 10, 10 $\to$ 11 και 11 $\to$ 00. Επομένως, εάν η είσοδος στο κανάλι είναι η ακολουθία 01, η έξοδος είναι 10 με πιθανότητα 1. Συμβολίζουμε τα δύο σύμβολα εισόδου με X_1, X_2 και τα δύο σύμβολα εξόδου με Y_1, Y_2.

   (α) Υπολογίστε την αμοιβαία πληροφορία $I(X_1, X_2; Y_1, Y_2)$ συναρτήσει της κατανομής εισόδου επάνω στα 4 πιθανά ζεύγη εισόδου.

   Απάντηση:

   Αν θεωρήσουμε το κανάλι με 4 εισόδους (των 2 bits η καθεμία) και 4 εξόδους (των 2 bits), σε κάθε είσοδο αντιστοιχεί μόνο μια έξοδος. Επομένως, $H(Y_1, Y_2|X_1, X_2) = 0$. Συνεπώς,

   $$I = H(Y_1, Y_2) - H(Y_1, Y_2|X_1, X_2) = H(Y_1, Y_2) = H(X_1, X_2) = H(\mathbf{p}),$$

   όπου **p** η κατανομή των 4 συμβόλων εισόδου.

   (β) Δείξτε ότι η χωρητικότητα ανά μετάδοση ζεύγους ψηφίων ισούται με 2 bits.

   Απάντηση:

   Από το άνω φράγμα για την εντροπία, $H(\mathbf{p}) \leq 2$ bits. Η ισότητα ισχύει όταν $\mathbf{p} = [1/4, 1/4, 1/4, 1/4]$. Συνεπώς, η χωρητικότητα ανά μετάδοση ζεύγους ψηφίων ισούται με 2 bits.

   (γ) Δείξτε ότι, για την κατανομή εισόδου που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα στο προηγούμενο ερώτημα, $I(X_1; Y_1) = 0$. Επομένως, η κατανομή στις ακολουθίες εισόδου που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα δε μεγιστοποιεί απαραιτήτως την αμοιβαία πληροφορία μεταξύ μεμονωμένων συμβόλων εισόδου και των αντίστοιχων εξόδων.

   Απάντηση:

   Με επισκόπηση (ή με χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας, αν θέλουμε να είμαστε πιο αυστηροί), παρατηρούμε ότι, αν εξετάσουμε τη μετάδοση *ανά bit*, αν χρησιμοποιήσουμε και τα 4 σύμβολα των 2 bits με την ίδια πιθανότητα, σε επίπεδο bit το κανάλι συμπεριφέρεται ως BSC με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου ίση με 1/2. Συνεπώς, $I(X; Y) = 1 - H(1/2) = 0$.

6. **Κωδικοποιητής και Αποκωδικοποιητής ως μέρος του καναλιού – Cover & Thomas 7.16**

   Θεωρήστε Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι (BSC) με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου (crossover probability) 0.1. Ένα πιθανό σχήμα κωδικοποίησης για αυτό το κανάλι το οποίο χρησιμοποιεί δύο κωδικές λέξεις μήκους 3 είναι να κωδικοποιήσουμε το μήνυμα a_1 ως 000 και το μήνυμα a_2 ως 111. Εάν χρησιμοποιούμε αυτόν τον κώδικα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο συνδυασμός κωδικοποιητή, καναλιού και αποκωδικοποιητή αποτελεί ένα νέο BSC με δύο εισόδους a_1 και a_2 και δύο εξόδους a_1 και a_2.

(α) Βρείτε την πιθανότητα αναστροφής για το νέο κανάλι.

Απάντηση:

Ο αποκωδικοποιητής αποφασίζει ποιο από τα δύο σύμβολα μεταδόθηκε (000 ή 111) μετρώντας τα 0 και τα 1 στη ληφθείσα τριάδα. Αποδεικνύεται ότι ο κανόνας ML είναι η απόφαση να γίνει με βάση την πλειοψηφία των συμβόλων. Δηλαδή όταν λαμβάνονται τρία ή δύο 0 ο δέκτης αποφασίζει 000, αλλιώς αποφασίζει 111 (μπορείτε να το αποδείξετε ή να δείτε π.χ. τις διαλέξεις του 3ου μέρους του μαθήματος "Θεωρία Πληροφορίας"). Συνεπώς, η πιθανότητα σφάλματος ισούται με

$$P_e = \text{Pr}\{000\}P_{e|000} + \text{Pr}\{111\}P_{e|111}.$$

Λόγω συμμετρίας, $P_{e|000} = P_{e|111}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} P_e = P_{e|000} &= \text{Pr}\{111|000\} + \text{Pr}\{110|000\} + \text{Pr}\{101|000\} + \text{Pr}\{011|000\} \\ &= p^3 + 3p^2(1-p) = 0.028. \end{aligned}$$

(β) Ποια είναι η χωρητικότητα του νέου καναλιού σε bits ανά χρήση του αρχικού καναλιού;

Απάντηση:

Το νέο κανάλι είναι ένα BSC με πιθανότητα μετάβασης 0.028. Συνεπώς, $C' = 1 - H(0.028)$ bits/3 χρήσεις = 0.2719 bits/χρήση καναλιού. Η χωρητικότητα επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας τα 000 και 111 με την ίδια πιθανότητα.

(γ) Ποια είναι η χωρητικότητα του αρχικού BSC με πιθανότητα αναστροφής 0.1;

Απάντηση:

Η χωρητικότητα του αρχικού BSC ισούται με $C = 1 - H(0.1) = 0.531$ bits/χρήση καναλιού. Συνεπώς, με τη χρήση του σχήματος επανάληψης, η χωρητικότητα μειώνεται.

(δ) Αποδείξτε το εξής γενικό αποτέλεσμα: Για οποιοδήποτε κανάλι, εάν θεωρήσουμε από κοινού τον κωδικοποιητή, το κανάλι και τον αποκωδικοποιητή ως ένα νέο κανάλι με είσοδο μηνύματα και έξοδο εκτιμώμενα μηνύματα, η χωρητικότητα σε bits ανά χρήση του αρχικού καναλιού δεν μπορεί να αυξηθεί.

Απάντηση:

Έστω W το μήνυμα στην είσοδο του κωδικοποιητή και η συνάρτηση κωδικοποίησης $f(W)$ που αντιστοιχίζει το W στην n-άδα X_1^n. Στο δέκτη, έστω συνάρτηση $g(Y_1^n)$ που παράγει την εκτίμηση $\hat{W}$. Επομένως, $W \to X_1^n \to Y_1^n \to \hat{W}$. Από την ανισότητα επεξεργασίας δεδομένων, $I(W;\hat{W}) \leq I(X_1^n;Y_1^n)$. Άρα, για οποιοδήποτε κανάλι, εάν θεωρήσουμε από κοινού τον κωδικοποιητή, το κανάλι και τον αποκωδικοποιητή ως ένα νέο κανάλι με είσοδο μηνύματα και έξοδο εκτιμώμενα μηνύματα, η χωρητικότητα σε bits ανά χρήση του αρχικού καναλιού δεν μπορεί να αυξηθεί.

7. ***Χωρητικότητα καναλιού Ταχυδρομικών περιστεριών (Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας) – Cover & Thomas 7.19 (τροποποιημένη) – Σχετικά Δύσκολη**

   Μια ομάδα αποκλεισμένων μαχητών επικοινωνεί με τους συμμάχους τους με χρήση ταχυδρομικών περιστεριών. Θεωρούμε ότι κάθε ταχυδρομικό περιστέρι μπορεί να μεταφέρει ένα σύμβολο ASCII (8 bits), ότι ένα περιστέρι στέλνεται κάθε 5 λεπτά της ώρας και ότι χρειάζεται πάντα 3 ακριβώς λεπτά της ώρας για να φτάσει στον προορισμό του.

   (α) Εάν όλα τα περιστέρια καταφέρνουν να φτάσουν στον προορισμό τους, ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού σε bits/ώρα;

   Απάντηση:

   Δεδομένου ότι κάθε 5 λεπτά λαμβάνουμε 8 bits, η χωρητικότητα του καναλιού ισούται με $8 \times 60/5 = 96$ bits/ώρα. Ο χρόνος που χρειάζεται το περιστέρι για να φτάσει στον προορισμό του δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα γιατί, μετά από την αρχική μεταβατική περίοδο, ο ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας θα είναι σταθερός.

   (β) Έστω ότι ο παραλήπτης γνωρίζει ότι τα περιστέρια στέλνονται με σταθερό ρυθμό, οπότε μπορεί να ανιχνεύσει εάν ένα περιστέρι δε φτάνει στον προορισμό του. Εάν οι αντίπαλοι καταφέρνουν να σκοτώνουν ποσοστό α των περιστεριών, ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού; Πώς θα μοντελοποιούσατε το κανάλι;

   Απάντηση:

   Πρόκειται για 256-αδικό κανάλι διαγραφής (erasure channel). Καθένα από τα 256 σύμβολα ASCII είτε φτάνει στον προορισμό με πιθανότητα $1-\alpha$ ή διαγράφεται με πιθανότητα α. Μπορούμε να υπολογίσουμε τη χωρητικότητα ξεκινώντας από τις κατανομές των X και Y. Έστω $p_i = \Pr\{X = i\}$. Επομένως, $\Pr\{Y = i\} = (1-\alpha)p_i$ για $i = 0, \ldots, 255$ και $\Pr\{Y = E\} = \left(\sum p_i\right)\alpha = \alpha$, όπου E το ενδεχόμενο διαγραφής (δηλαδή να σκοτωθεί το περιστέρι). Παρατηρούμε ότι $H(Y|X) = H(\alpha)$. Για την $H(Y)$,

$$\begin{aligned}
H(Y) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\log p(Y)}\right] &= -\sum_{i=0}^{255}(1-\alpha)p_i \log(1-\alpha)p_i - \alpha \log \alpha \\
&= -(1-\alpha)\sum_i p_i \left(\log(1-\alpha) + \log p_i\right) - \alpha \log \alpha \\
&= -(1-\alpha)\left[\log(1-\alpha) + \sum_i p_i \log p_i\right] - \alpha \log \alpha \\
&= -(1-\alpha)\log(1-\alpha) - \alpha \log \alpha + (1-\alpha)H(\mathbf{p}) \\
&= H(\alpha) + (1-\alpha)H(\mathbf{p}).
\end{aligned}$$

   Το αποτέλεσμα θα μπορούσε να προκύψει κατευθείαν και με αρχή διαχωρισιμότητας εντροπίας, χρησιμοποιώντας μια βοηθητική τ.μ. E η οποία ισούται με 1 όταν συμβαίνει διαγραφή, και με 0 όταν τα περιστέρια φτάνουν στον προορισμό τους. Δεδομένου ότι η κατανομή που μεγιστοποιεί την $H(\mathbf{p})$ είναι η ομοιόμορφη, $\max H(\mathbf{p}) = (1-\alpha)8$ bits/περιστέρι. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
C = \max_{p(x)} I(X;Y) &= \max_{p(x)} H(Y) - H(Y|X) = 8(1-\alpha) + H(\alpha) - H(\alpha) \\
&= 8(1-\alpha) \text{ bits/περιστέρι} = 96(1-\alpha) \text{ bits/ώρα}
\end{aligned}$$

Εναλλακτικά, η χωρητικότητα μπορεί να βρεθεί μεγιστοποιώντας την $H(X)$: $C = \max_{p(x)}(H(X) - H(X|Y))$ (δοκιμάστε το ως άσκηση).

(*γ) Θεωρούμε, τώρα, ότι οι αντίπαλοι γνωρίζουν Θεωρία Πληροφορίας και, αφού πιάσουν ένα περιστέρι με πιθανότητα α, αντί να το σκοτώσουν, αντικαθιστούν το σύμβολο ASCII που στέλνει το περιστέρι με ένα διαφορετικό (από τα 255 πιθανά). Το σύμβολο αντικατάστασης επιλέγεται με βάση ομοιόμορφη κατανομή. Ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού; Πώς θα μοντελοποιούσατε το κανάλι;

Απάντηση:

Κάθε σύμβολο παραμένει το ίδιο με πιθανότητα $1 - \alpha$ ή μεταβαίνει σε ένα από τα άλλα σύμβολα με πιθανότητα $\alpha/255$. Επομένως, $\Pr\{Y = i|X\} = 1 - \alpha$ εάν $X = i$, αλλιώς $\Pr\{Y = i|X\} = \alpha/255$. Ομοίως με το Ερώτημα (β),

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= -(1-\alpha)\log(1-\alpha) - (\alpha/255)\sum_{i=0}^{254}\log(\alpha/255) \\ &= -(1-\alpha)\log(1-\alpha) - \alpha\log(\alpha/255). \end{aligned}$$

Η $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$ μεγιστοποιείται όταν η $H(Y)$ είναι ομοιόμορφη. Ωστόσο, πρέπει να εξετάσουμε εάν υπάρχει τρόπος να επιτύχουμε ομοιόμορφη κατανομή στην έξοδο για κάποια $p(X)$. Αν επιλέξουμε ομοιόμορφη X,

$$p(y) = \sum_{i=0}^{255} p(x_i, y) = \sum_{i=0}^{255} p(x_i)p(y|x_i) = \frac{1}{256}\sum_{i=0}^{255} p(y|x_i) = \frac{1}{256},$$

δεδομένου ότι, αν $y = x_i$, $p(y|x_i) = 1-\alpha$, ενώ αν $y \neq x_i$, $p(y|x_i) = \frac{\alpha}{255}$. Συνεπώς, $\sum_{i=0}^{255} p(y|x_i) = 1 - \alpha + 255\frac{\alpha}{255} = 1$ (Προσοχή! Γενικά, $\sum_x p(y|x) \neq 1$). Επομένως, για ομοιόμορφη X,

$$I(X;Y) = 8 - H(Y|X) = 8 + (1-\alpha)\log(1-\alpha) + \alpha\log(\alpha/255) \text{ bits/περιστέρι}.$$

Η χωρητικότητα μεγιστοποιείται όταν $\alpha = 0$ (C = 8 bits/περιστέρι = 96 bits/ώρα). Παρατηρήστε ότι η χωρητικότητα ισούται με 0 για $\alpha = \frac{255}{256}$ και όχι για $\alpha = 1$! Όταν $\alpha = 1$, ξέρουμε ότι ο εχθρός πάντα αλλοιώνει το μήνυμα και αυτό μας δίνει κάποια (μικρή) πληροφορία. Δηλαδή, ξέρουμε ότι αποκλείεται το σύμβολο που λάβαμε να είναι το ίδιο με αυτό που στείλαμε. Εάν ο εχθρός γνωρίζει Θεωρία Πληροφορίας θα πρέπει να αλλάζει το μήνυμα σχεδόν πάντα, αλλά όχι πάντα (κατά μέσο όρο πρέπει να αφήνει 1 στα 256 περιστέρια να περάσουν ως έχουν).

Το κανάλι είναι ένα 256-δικό συμμετρικό κανάλι, όπου οι μεταβάσεις σε διαφορετικό σύμβολο έχουν πιθανότητα $\frac{\alpha}{255}$, ενώ οι μεταβάσεις στο ίδιο σύμβολο έχουν πιθανότητα $1 - \alpha$. Επομένως, ένας άλλος τρόπος να βρεθεί η χωρητικότητα είναι με χρήση της σχέσης $C = \log|\mathcal{Y}| - H\left(1-\alpha, \frac{\alpha}{255}, \frac{\alpha}{255}, \dots, \frac{\alpha}{255}\right)$.

(*δ) Αν οι αντίπαλοι μπορούν να πιάνουν όλα τα περιστέρια, αλλά δε θέλουν να ξέρουμε ότι τα έπιασαν (δηλαδή δεν τα σκοτώνουν, αλλά μπορούν να αλλάξουν το σύμβολο ASCII, αν θέλουν, πριν τα αφήσουν) τι είναι το χειρότερο (για εμάς) που μπορούν να κάνουν;

Απάντηση:

Δεδομένου ότι $C = 0$ όταν $\alpha = \frac{255}{256}$, το χειρότερο που μπορούν να κάνουν οι αντίπαλοι είναι να μην αλλάζουν το σύμβολο του περιστεριού κατά μέσο όρο μια κάθε 256 φορές.

8. **Υπάρχει περίπτωση η προσθήκη περισσότερων εισόδων στο κανάλι να ελαττώσει τη χωρητικότητά του; – Cover & Thomas 7.22**

   Δείξτε ότι η προσθήκη μιας οποιασδήποτε γραμμής στον πίνακα μετάβασης ενός διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη (δηλαδή η προσθήκη μίας νέας τιμής εισόδου) δεν μπορεί να ελαττώσει τη χωρητικότητά του.

   Απάντηση:

   Η προσθήκη μιας οποιασδήποτε γραμμής στον πίνακα μετάβασης ενός διακριτού καναλιού, δηλαδή η προσθήκη μιας ακόμα εισόδου δεν μπορεί να ελαττώσει τη χωρητικότητα του καναλιού, επειδή μπορούμε να επιτύχουμε ρυθμό μετάδοσης ίσο με τη χωρητικότητα πριν προστεθεί η γραμμή απλώς αγνοώντας τη νέα είσοδο (δηλαδή θέτοντας μηδενική πιθανότητα εισόδου στο νέο σύμβολο).

   Έστω C_m η χωρητικότητα του καναλιού πριν προστεθεί η νέα είσοδος και C_{m+1} η χωρητικότητά του μετά την προσθήκη της νέας γραμμής.

$$\begin{aligned} C_{m+1} &= \max_{p(x_1,x_2,\ldots,x_m,x_{m+1})} I(X;Y) \\ &\geq \max_{p(x_1,x_2,\ldots,x_m,0)} I(X;Y) = C_m. \end{aligned}$$

   Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέσαμε ότι η γραμμή προστέθηκε στο τέλος του πίνακα μετάβασης.

9. **Κανάλια (Τελικό Διαγώνισμα Θ. Π., Φεβρουάριος 2008)**

   Έστω

$$P(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1-\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1-\epsilon \end{bmatrix}$$

   ο πίνακας μετάβασης ενός δυαδικού συμμετρικού καναλιού με πιθανότητα σφάλματος ϵ.

   Επίσης, ορίζεται η πράξη $*$ ως εξής:

$$a * b = (1-a)b + a(1-b).$$

   (α) Να αποδείξετε ότι το κανάλι το οποίο έχει για πίνακα μετάβασης το γίνομενο $P(\epsilon_1)P(\epsilon_2)$ είναι ισοδύναμο με ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι του οποίου η πιθανότητα σφάλματος ισούται με $\epsilon_1 * \epsilon_2$.

   Απάντηση:

   Η γενική μορφή του πίνακα μετάβασης ενός δυαδικού συμμετρικού καναλιού θα πρέπει να έχει τη μορφή

$$P(\epsilon^*) = \begin{bmatrix} 1-\epsilon^* & \epsilon^* \\ \epsilon^* & 1-\epsilon^* \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Από τον πολλαπλασιασμό των πινάκων $P(\epsilon_1)$ και $P(\epsilon_2)$ προκύπτει ότι

$$P(\epsilon_1)P(\epsilon_2) = \left[\begin{array}{cc} 1-[(1-\epsilon_1)\epsilon_2+\epsilon_1(1-\epsilon_2)] & (1-\epsilon_1)\epsilon_2+\epsilon_1(1-\epsilon_2) \\ (1-\epsilon_1)\epsilon_2+\epsilon_1(1-\epsilon_2) & 1-[(1-\epsilon_1)\epsilon_2+\epsilon_1(1-\epsilon_2)] \end{array} \right]. \quad (2)$$

Από τις (1) και (2),

$$P(\epsilon_1)P(\epsilon_2) = P(\epsilon_1 * \epsilon_2) = \left[\begin{array}{cc} 1-\epsilon_1 * \epsilon_2 & \epsilon_1 * \epsilon_2 \\ \epsilon_1 * \epsilon_2 & 1-\epsilon_1 * \epsilon_2 \end{array} \right],$$

όπου $\epsilon_1 * \epsilon_2 = (1-\epsilon_1)\epsilon_2 + \epsilon_1 * (1-\epsilon_2)$.

(β) Δώστε μια φυσική ερμηνεία της παρακάτω ανισότητας, καθώς και την απόδειξή της

$$1 - H(\epsilon_1 * \epsilon_2) \leq \min\left(1 - H(\epsilon_1), 1 - H(\epsilon_2)\right),$$

εάν γνωρίζετε ότι ισχύουν οι ανισότητες: $|0.5-\epsilon_1*\epsilon_2| \leq |0.5-\epsilon_1|$ και $|0.5-\epsilon_1*\epsilon_2| \leq |0.5-\epsilon_2|$.

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι η χωρητικότητα ενός δυαδικού συμμετρικού καναλιού με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου ϵ ισούται με $1-H(\epsilon)$. Άρα, η ανισότητα $1-H(\epsilon_1*\epsilon_2) \leq$ min $((1-H(\epsilon_1), 1-H(\epsilon_2))$ υποδηλώνει ότι η χωρητικότητα του δυαδικού συμμετρικού καναλιού $\epsilon_1 * \epsilon_2$ είναι μικρότερη ή ίση από την ελάχιστη χωρητικότητα των επιμέρους δυαδικών συμμετρικών καναλιών, ϵ_1 και ϵ_2, αντιστοίχως. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το κανάλι $\epsilon_1*\epsilon_2$ συμπεριφέρεται ισοδύναμα με τα κανάλια ϵ_1 και ϵ_2 σε σειρά και ότι η χωρητικότητα του συνδυασμού τους εξαρτάται από το κανάλι με τη μικρότερη χωρητικότητα. Για να αποδείξουμε, τώρα, ότι ισχύει η ανισότητα με δεδομένη τη σχέση της άσκησης, αρκεί να δείξουμε, ισοδύναμα, ότι ισχύει

$$H(\epsilon_1 * \epsilon_2) \geq \max\left(H(\epsilon_1), H(\epsilon_2)\right).$$

Για $\epsilon_1, \epsilon_2 \leq 0.5$, $\epsilon_1 * \epsilon_2 \leq 0.5$ και αρκεί να δείξουμε ότι $\epsilon_1 * \epsilon_2 \geq$ max(ϵ_1, ϵ_2), αφού η εντροπία είναι αύξουσα συνάρτηση του ορίσματος (όταν το όρισμα είναι ≤ 0.5). Αυτή, όμως, η σχέση μεταξύ των πιθανοτήτων ϵ_1, ϵ_2 και $\epsilon_1 * \epsilon_2$ ισχύει, όπως μπορούμε να συμπεράνουμε με μία απλή επισκόπηση των σχέσεων που δίνονται από την άσκηση. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται η σχέση για την περίπτωση που οι ϵ_1 και ϵ_2 είναι ≥ 0.5 και για την περίπτωση που ένα ϵ είναι ≤ 0.5 και το άλλο ϵ είναι ≥ 0.5.

(γ) Να αποδείξετε ότι το κανάλι το οποίο έχει για πίνακα μετάβασης το γινόμενο $P^{\nu}(\epsilon)$ είναι ισοδύναμο με ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι του οποίου η πιθανότητα σφάλματος δίνεται από τη σχέση $\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{\nu}\right]$. Σε αυτήν την περίπτωση, ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού;

Απάντηση:

Για να αποδείξουμε τη σχέση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε την επαγωγική μέθοδο. Δείξαμε ήδη ότι ισχύει για $n=2$. Έστω ότι ισχύει για $n-1$, δηλαδή,

$$P^{n-1}(\epsilon) = P\left(\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]\right).$$

Θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$P^n(\epsilon) = P(\epsilon) \cdot P^{n-1}(\epsilon) = P\left(\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^n\right]\right).$$

Πράγματι, από το γινόμενο των πινάκων $P(\epsilon) \cdot P^{n-1}(\epsilon)$ προκύπτει ότι

$$P(\epsilon) \cdot P^{n-1}(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1-\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1-\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right] & \frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right] \\ \frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right] & 1-\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right] \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (1-\epsilon)\left\{1-\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]\right\}+\epsilon\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right] & (1-\epsilon)\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]+\epsilon\left\{1-\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]\right\} \\ (1-\epsilon)\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]+\epsilon\left\{1-\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]\right\} & (1-\epsilon)\left\{1-\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]\right\}+\epsilon\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right] \end{bmatrix}.$$

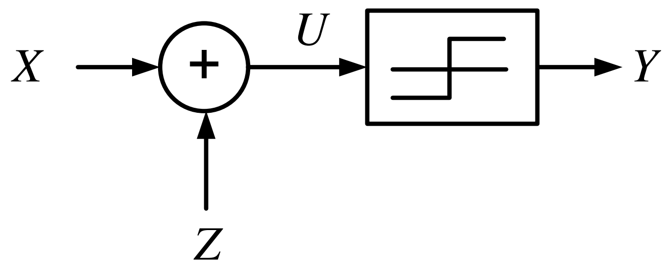
Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι

$$(1-\epsilon)\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]+\epsilon\left\{1-\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]\right\} = \frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^n\right].$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
&(1-\epsilon)\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]+\epsilon\left\{1-\frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}(1-\epsilon)-\frac{1}{2}(1-\epsilon)(1-2\epsilon)^{n-1}+\epsilon-\frac{1}{2}\epsilon\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}\right] \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2\epsilon)^{n-1}+\frac{1}{2}\epsilon(1-2\epsilon)^{n-1}+\frac{1}{2}\epsilon(1-2\epsilon)^{n-1} \\
&= \frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^{n-1}+2\epsilon(1-2\epsilon)^{n-1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)(1-2\epsilon)^{n-1}\right] = \frac{1}{2}\left[1-(1-2\epsilon)^n\right].
\end{aligned}$$

10. **Κατανομή πηγής (Επαναληπτική Εξέταση Θ. Π., Σεπτέμβριος 2008)**



Σχήμα 15: Κανάλι προσθετικού θορύβου με κύκλωμα απόφασης (slicer)

Θεωρούμε το κανάλι προσθετικού θορύβου του Σχήματος 15.

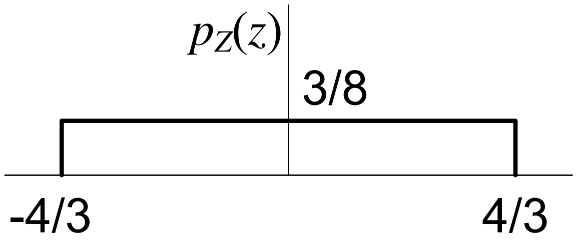
Η (διακριτή) πηγή X παίρνει τιμές στο σύνολο $\{-1,+1\}$ και οι X_i που αντιστοιχούν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές i είναι ανεξάρτητες ομοίως κατανεμημένες (i.i.d.) $\sim$ Bern(p). Ο θόρυβος Z_i είναι συνεχής ανεξάρτητη ομοίως κατανεμημένη τ.μ. (δηλαδή μια λευκή τυχαία διαδικασία διακριτού χρόνου με συνεχείς τιμές) και ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-4/3, 4/3]$. Το κύκλωμα απόφασης παράγει μια εκτίμηση Y_i της X_i με βάση την τιμή του αθροίσματος $U_i = X_i + Z_i$. Όταν $U_i > \alpha$, $Y_i = +1$, αλλιώς $Y_i = -1$. $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δίνεται ότι $\log_2 7 \approx 2.8074$.

(α) Σχεδιάστε ή δώστε μια έκφραση για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $_i$.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

$p_Z(z) = \frac{3}{8}$, $z \in [-4/3, 4/3]$. Η σ.π.π. της Z_i φαίνεται στο Σχήμα 16.



Σχήμα 16: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας της $_i$

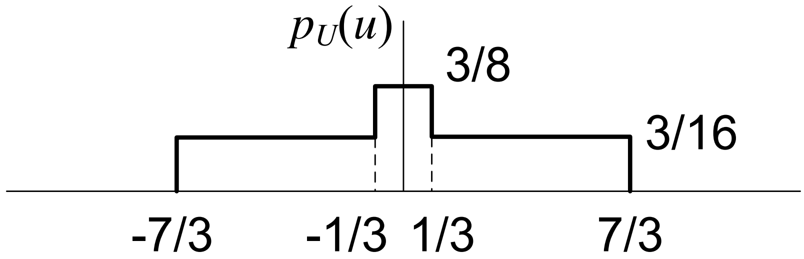
(β) Σχεδιάστε ή δώστε μια έκφραση για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της U_i εάν $p = 1/2$.

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Με απλή επισκόπηση προκύπτει ότι

$$p_U(u) = \begin{cases} \frac{3}{16} & \text{για} \quad u \in \left[-\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right] \\ \frac{3}{8} & \text{για} \quad u \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \\ 0 & \text{για} \quad u \in \left[-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup \left[\frac{7}{3}, +\infty\right] \end{cases}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορείτε να οδηγηθείτε με πράξεις ή με χρήση του ότι η σ.π.π. του αθροίσματος τ.μ. ισούται με τη συνέλιξη των σ.π.π. των τ.μ. Η $p_U(u)$ έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 17.



Σχήμα 17: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας της U_i

(γ) Έστω, ότι $\alpha \in [-0.5, 0.5]$. Υπολογίστε τις δεσμευμένες πιθανότητες σφάλματος $P_{e,-1} = \Pr\{Y = +1|X = -1\}$ και $P_{e,+1} = \Pr\{Y = -1|X = +1\}$ ως συνάρτηση του α. $p \in [0,\ 1]$ (και όχι, κατ' ανάγκη, $p = 1/2$ όπως προηγουμένως).

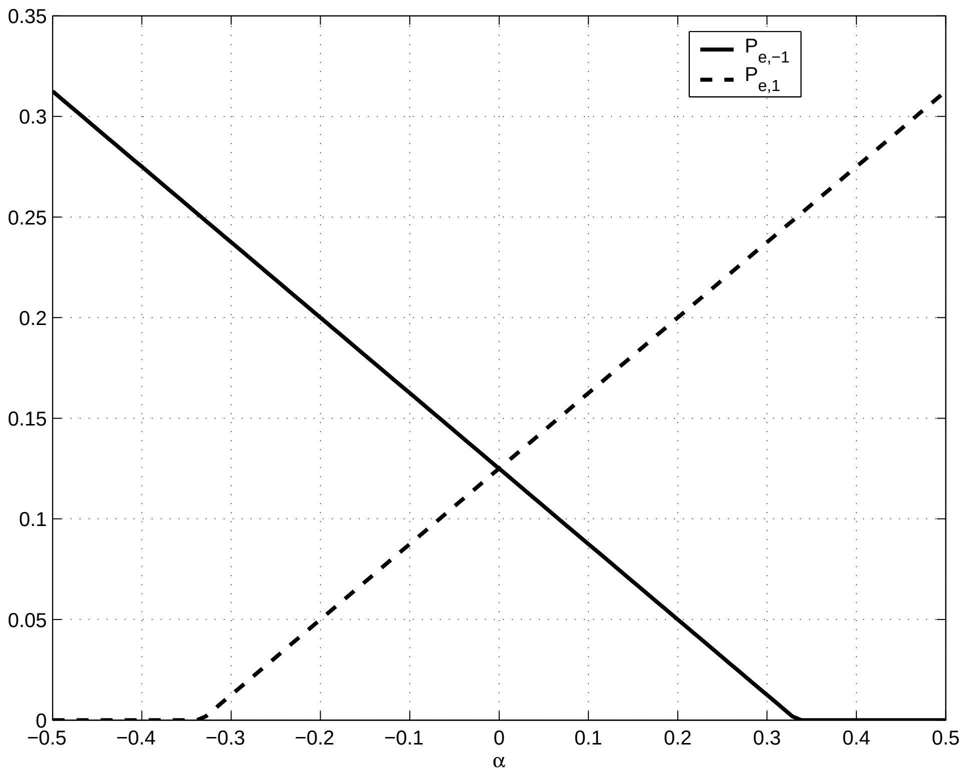
$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

- $P_{e,-1} = \Pr\{Y = +1|X = -1\} = \Pr\{U > \alpha|X = -1\} = \Pr\{Z > \alpha + 1\}$.
- $P_{e,+1} = \Pr\{Y = -1|X = +1\} = \Pr\{U < \alpha|X = +1\} = \Pr\{Z < \alpha - 1\}$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις και χρησιμοποιούμε τη σ.π.π. του Ερωτήματος (α):

- $\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$: $P_{e,-1} = \left(\frac{1}{3} - \alpha\right)\frac{3}{8}$, $P_{e,+1} = 0$.
- $\alpha \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$: $P_{e,-1} = \left(\frac{1}{3} - \alpha\right)\frac{3}{8}$, $P_{e,+1} = \left(\frac{1}{3} + \alpha\right)\frac{3}{8}$.
- $\alpha \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$: $P_{e,-1} = 0$, $P_{e,+1} = \left(\frac{1}{3} + \alpha\right)\frac{3}{8}$.

Οι $P_{e,-1}$ και $P_{e,+1}$ έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 18.



Σχήμα 18: Δεσμευμένες πιθανότητες σφάλματος $P_{e,-1}$ και $P_{e,1}$ συναρτήσει του $\alpha \in [-0.5,\ 0.5]$

(δ) Έστω, τώρα, ότι $\alpha = 0$. Υπολογίστε τις πιθανότητες σφάλματος $P_{e,-1}$ και $P_{e,+1}$.

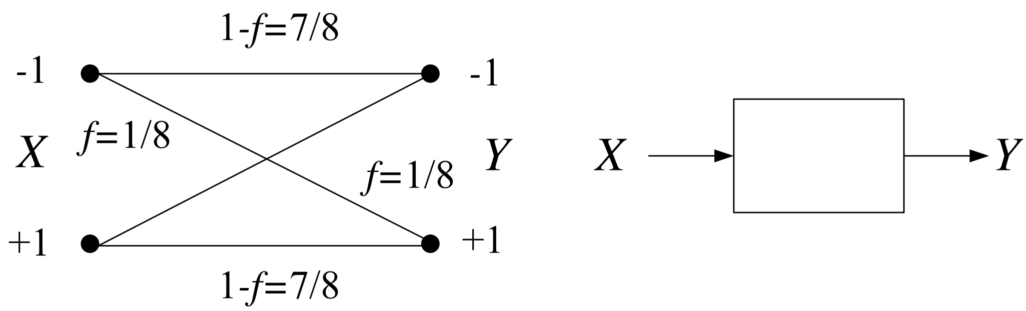
Απάντηση:

Από το προηγούμενο ερώτημα, ή απευθείας από τις σχέσεις $P_{e,-1} = \text{Pr}\{Z > 1\}$ και $P_{e,+1} = \text{Pr}\{Z < -1\}$, $P_{e,-1} = P_{e,+1} = \frac{1}{8}$.

(ε) Για $\alpha = 0$, δώστε ένα διακριτό μοντέλο για το κανάλι με είσοδο τη X και έξοδο την Y. Πρόκειται για κανάλι με η χωρίς μνήμη; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Απάντηση:

Το κανάλι μπορεί να μοντελοποιηθεί ως δυαδικό συμμετρικό κανάλι, όπως φαίνεται στο Σχήμα 19. Το κανάλι δεν έχει μνήμη γιατί η τιμή της Y_i εξαρτάται (στατιστικά) μόνο από την τιμή της X_i.



Σχήμα 19: Μοντέλο για το κανάλι της άσκησης, για $\alpha = 0$.

(στ) Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού που μοντελοποιήσατε στο προηγούμενο ερώτημα. Για ποια τιμή της p επιτυγχάνεται η χωρητικότητα;

Απάντηση:

Κατά τα γνωστά για τη χωρητικότητα δυαδικού συμμετρικού καναλιού, $C = 1 - H(f)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} C &= 1 - H(7/8) \\ &= 1 + \frac{7}{8}\log_2\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\log\frac{1}{8} \\ &= 1 + \frac{7}{8}\log_2 7 - 3\frac{7}{8} - 3\frac{1}{8} \\ &\approx 3.8074 - 3 = 0.8074 \text{ bits}. \end{aligned}$$

Η χωρητικότητα επιτυγχάνεται με ομοιόμορφη κατανομή των συμβόλων πηγής: $\Pr\{X = -1\} = \Pr\{X = +1\} = \frac{1}{2}$.

11. **Κανάλι (Επαναληπτική εξέταση Θ. Π., Σεπτέμβριος 2009)**

Έστω $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1, 2, 3\}$ τα σύμβολα εισόδου και εξόδου, αντιστοίχως, διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1-\epsilon & \epsilon & 0 & 0 \\ \epsilon & 1-\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\delta & \delta \\ 0 & 0 & \delta & 1-\delta \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήστε ότι όταν η είσοδος του καναλιού ανήκει στο $\mathcal{X}_1 = \{0, 1\}$ η έξοδος ανήκει στο $\mathcal{Y}_1 = \{0, 1\}$. Ομοίως, για $\mathcal{X}_2 = \{2, 3\}$, η έξοδος ανήκει στο $\mathcal{Y}_2 = \{2, 3\}$.

(α) Σχεδιάστε το διάγραμμα μετάβασης του καναλιού.

Απάντηση:

Το διάγραμμα μετάβασης του καναλιού έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 20.

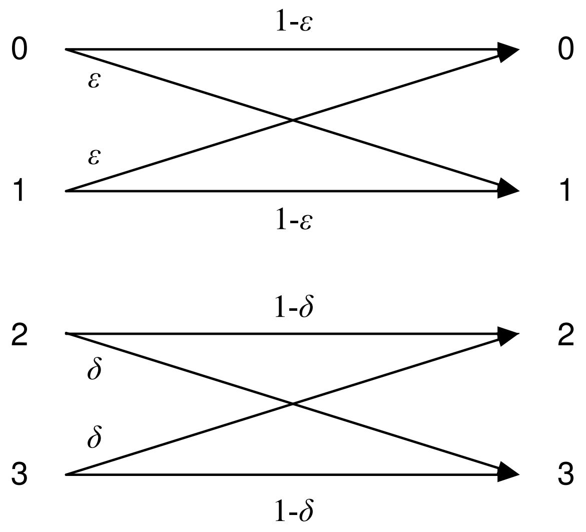
(β) Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού για $\epsilon = \delta = 1/2$.

Απάντηση:

Παρατηρούμε ότι, για $\epsilon = \delta = 1/2$, το κανάλι είναι συμμετρικό. Επομένως,

$$C = \log|\mathcal{Y}| - H([1/2, 1/2, 0, 0]) = 2 - 1 = 1 \text{ bit}.$$

Το αποτέλεσμα είναι διαισθητικά λογικό. Το κανάλι αποτελείται από δύο BSC, το καθένα με πιθανότητα αντιστροφής ίση με 1/2. Επομένως, ο δέκτης μπορεί να ξεχωρίσει ποιο BSC χρησιμοποιούμε, αλλα όχι το σύμβολο που στέλνουμε σε κάθε BSC. Δεδομένου ότι ο πομπός μπορεί να επιλέξει ένα από δύο BSC, μπορούμε να μεταδώσουμε 1 bit πληροφορίας. Παρατηρήστε, επίσης, ότι με τον τρόπο, αυτόν, μετάδοσης, επιτυγχάνουμε πιθανότητα σφάλματος ακριβώς ίση με 0. Τέλος, υπάρχουν διάφοροι συνδυασμοί κατανομών εισόδου που επιτυγχάνουν τη χωρητικότητα, αρκεί να ισχύει $p(0) + p(1) = p(2) + p(3) = 1/2$.



Σχήμα 20: Διάγραμμα μετάβασης καναλιού.

(γ) Στη συνέχεια της άσκησης θεωρούμε ότι τα δ και ϵ μπορούν να πάρουν *οποιεσδήποτε* τιμές (όχι, πλέον, 1/2).

Έστω ότι, για την κατανομή εισόδου, $p(x)$, ισχύει $p(0)+p(1) = \alpha$ και $p(2)+p(3) = 1-\alpha$. Δείξτε ότι για την αμοιβαία πληροφορία, $I(X;Y)$, μεταξύ της εισόδου, X, και της εξόδου, Y, του καναλιού P ισχύει

$$I(X;Y) = H(\alpha) + \alpha I(X;Y|X \in \mathcal{X}_1) + (1-\alpha) I(X;Y|X \in \mathcal{X}_2).$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τ.μ. V η οποία υποδηλώνει εάν $X \in \mathcal{X}_1$ ή $X \in \mathcal{X}_2$ και χρησιμοποιήστε τη για να βρείτε εκφράσεις για την $H(X)$ και $H(X|Y)$.

Απάντηση:

Άπό τον ορισμό της αμοιβαίας πληροφορίας,

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y).$$

Επίσης,

$$H(X,V) = H(X) + H(V|X) = H(X),$$

δεδομένου ότι η V είναι ντετερμινιστική συνάρτηση της X. Επίσης, $H(X,V) = H(V) + H(X|V)$. Επομένως,

$$H(X) = H(V) + H(X|V) = H(\alpha) + \alpha H(X|V=0) + (1-\alpha) H(X|V=1),$$

όπου $V=0$ όταν $X \in \mathcal{X}_1$ και $V=1$ όταν $X \in \mathcal{X}_2$.
Ομοίως, για την $H(X|Y)$,

$$H(X,V|Y) = H(X|Y) + H(V|X,Y) = H(X|Y) = H(V|Y) + H(X|V,Y).$$

Παρατηρούμε ότι $H(V|Y) = 0$. Επίσης, $H(V|X,Y) = \alpha H(X|V=0,Y) + (1-\alpha) H(X|V=1,Y)$.

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω,

$$\begin{aligned}
I(X;Y) &= H(X) - H(X|Y) \\
&= H(\alpha) + \alpha H(X|V=0) + (1-\alpha)H(X|V=1) \\
&\quad - \alpha H(X|V=0,Y) - (1-\alpha)H(X|V=1,Y) \\
&= H(\alpha) + \alpha I(X;Y|V=0) + (1-\alpha)I(X;Y|V=1) \\
&= H(\alpha) + \alpha I(X;Y|X\in\mathcal{X}_1) + (1-\alpha)I(X;Y|X\in\mathcal{X}_2).
\end{aligned}$$

(δ) Δείξτε ότι η μεγιστοποίηση της αμοιβαίας πληροφορίας προκειμένου να υπολογίσουμε τη χωρητικότητα του καναλιού μπορεί να γίνει σε δύο βήματα: Στο πρώτο βήμα βρίσκουμε τις κατανομές $p_1(x|X\in\mathcal{X}_1)$ και $p_2(x|X\in\mathcal{X}_2)$ που μεγιστοποιούν τις $I(X;Y|X\in\mathcal{X}_1)$ και $I(X;Y|X\in\mathcal{X}_2)$, αντιστοίχως. Στο δεύτερο βήμα υπολογίζουμε την παράμετρο α που μεγιστοποιεί την $I(X;Y)$. Εάν C_1 είναι η χωρητικότητα του καναλιού

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1-\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1-\epsilon \end{bmatrix}$$

και C_2 η χωρητικότητα του καναλιού

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1-\delta & \delta \\ \delta & 1-\delta \end{bmatrix},$$

εξηγήστε γιατί

$$C \triangleq \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{\alpha}\left\{H(\alpha) + \alpha C_1 + (1-\alpha)C_2\right\}.$$

Απάντηση:

Για οποιαδήποτε συνάρτηση ισχύει

$$\max_{x_1,x_2,\dots,x_n} f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \max_{x_1}\left\{\max_{x_2}\left\{\cdots\left\{\max_{x_n} f(x_1,x_2,\dots,x_n)\right\}\right\}\right\}.$$

Επομένως, μπορούμε να μεγιστοποιήσουμε πρώτα ως προς $p_1(x|X\in\mathcal{X}_1)$ και $p_1(x|X\in\mathcal{X}_2)$ για δεδομένη τιμή της παραμέτρου α και μετά ως προς α. Παρατηρούμε, επίσης ότι

• Η $I(X;Y|X\in\mathcal{X}_1)$ δεν εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου α, αλλά μόνο από την υπό συνθήκη σ.μ.π. $p_1(x|X\in\mathcal{X}_1)$. Επίσης, δεν εξαρτάται από την $p_2(x|X\in\mathcal{X}_2)$ για το συγκεκριμένο κανάλι, P, που θεωρούμε.

• Ομοίως, η $I(X;Y|X\in\mathcal{X}_2)$ εξαρτάται μόνο από την υπό συνθήκη σ.μ.π. $p_2(x|X\in\mathcal{X}_2)$.

Συνεπώς, η μεγιστοποίηση ως προς τις p_1, p_2 και α μπορεί να γίνει ξεχωριστά. Παρατηρούμε, επίσης, ότι $\max_{p_i} I(X;Y|X\in\mathcal{X}_i) = C_i$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
C \triangleq \max_{p(x)} I(X;Y) &= \max_{\alpha}\left\{H(\alpha) + \alpha\left\{\max_{p_1} I(X;Y|X\in\mathcal{X}_1)\right\}\right. \\
&\quad \left. +(1-\alpha)\left\{\max_{p_2} I(X;Y|X\in\mathcal{X}_2)\right\}\right\} \\
&= \max_{\alpha}\left\{H(\alpha) + \alpha C_1 + (1-\alpha)C_2\right\}.
\end{aligned}$$

(ε) Δείξτε ότι η χωρητικότητα, C, του καναλιού με πίνακα μετάβασης P ισούται με $C = \log\left(2^{C_1} + 2^{C_2}\right)$.

Απάντηση:

Από το προηγούμενο ερώτημα παρατηρούμε ότι η $I(X;Y)$ είναι άθροισμα μιας γραμμικής συνάρτησης ως προς α και μιας κοίλης ($H(\alpha)$) και, επομένως, είναι κοίλη ως προς α. Συνεπώς, για να βρούμε την τιμή της α που μεγιστοποιεί την $I(X;Y)$, αρκεί να βρούμε την τιμή της α για την οποία μηδενίζεται η $\partial I(X;Y)/\partial\alpha$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I(X;Y)}{\partial\alpha} &= \frac{\partial H(\alpha)}{\partial\alpha} + C_1 - C_2 \\
&= -\log_2\alpha + \alpha\frac{1}{\alpha}\log_2 e + \log_2(1-\alpha) - (1-\alpha)\frac{1}{1-\alpha}\log_2 e + C_1 - C_2 \\
&= \log_2\frac{1-\alpha}{\alpha} + C_1 - C_2 = 0 \\
\Rightarrow \log_2\frac{\alpha}{1-\alpha} &= C_1 - C_2 \Rightarrow \frac{\alpha}{1-\alpha} = 2^{C_1}/2^{C_2} \Rightarrow \alpha 2^{C_2} = (1-\alpha)2^{C_1} \\
\Rightarrow \alpha &= \frac{2^{C_1}}{2^{C_1}+2^{C_2}}.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας,

$$\begin{aligned}
C = &-\frac{2^{C_1}}{2^{C_1}+2^{C_2}}\log_2\frac{2^{C_1}}{2^{C_1}+2^{C_2}} - \frac{2^{C_2}}{2^{C_1}+2^{C_2}}\log_2\frac{2^{C_2}}{2^{C_1}+2^{C_2}} \\
&+ \frac{C_1 2^{C_1}}{2^{C_1}+2^{C_2}} + \frac{C_2 2^{C_2}}{2^{C_1}+2^{C_2}} \\
= &-\frac{C_1 2^{C_1}}{2^{C_1}+2^{C_2}} + \frac{\log_2\left(2^{C_1}+2^{C_2}\right)2^{C_1}}{2^{C_1}+2^{C_2}} - \frac{C_2 2^{C_2}}{2^{C_1}+2^{C_2}} + \frac{\log_2\left(2^{C_1}+2^{C_2}\right)2^{C_2}}{2^{C_1}+2^{C_2}} \\
&+ \frac{C_1 2^{C_1}}{2^{C_1}+2^{C_2}} + \frac{C_2 2^{C_2}}{2^{C_1}+2^{C_2}} = \log_2\left(2^{C_1}+2^{C_2}\right).
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι $2^C = 2^{C_1} + 2^{C_2}$ το οποίο είναι διαισθητικά αναμενόμενο. Δεδομένου ότι τα υπο-κανάλια είναι ανεξάρτητα, ο συνολικός αριθμός διακριτών μηνυμάτων που μπορούμε να μεταδώσουμε στο κανάλι ισούται με τον άθροισμα των διακριτών μηνυμάτων που μπορούμε να μεταδώσουμε σε κάθε επιμέρους υπο-κανάλι.

12. ***Κανάλι – Cover & Thomas 7.12 (Επαναληπτική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Σεπτέμβριος 2009)**

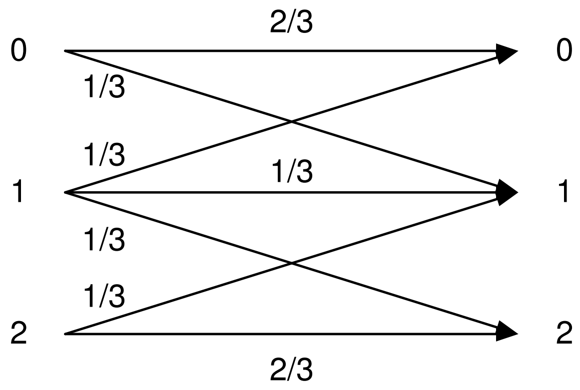
Θεωρούμε το διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

(α) Σχεδιάστε το διάγραμμα του καναλιού.

Απάντηση:

Το διάγραμμα του καναλιού δίνεται στο Σχήμα 21. Σημειώνεται ότι το αλφάβητο εισόδου και εξόδου έχει επιλεγεί τυχαία.



Σχήμα 21: Διάγραμμα καναλιού με 3 εισόδους και 3 εξόδους.

(β) Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Εξηγήστε διαισθητικά γιατί μία από τις εισόδους του καναλιού (ποια;) δε χρησιμοποιείται όταν μεταδίδουμε με ρυθμό αυθαίρετα κοντά στη χωρητικότητα.

Υπόδειξη: Εκμεταλλευτείτε κάποια συμμετρία στο κανάλι για να απλοποιήσετε τις πράξεις.

Απάντηση:

Ο πιο εύκολος τρόπος να λυθεί το πρόβλημα είναι παρατηρώντας ότι το κανάλι συμπεριφέρεται με τον ίδιο τρόπο για τις εισόδους 0 και 2. Επομένως, για να επιτύχουμε μετάδοση με τη χωρητικότητα, πρέπει $p(0) = p(2)$.

Ένας άλλος τρόπος για να δικαιολογηθεί αυτή η επιλογή είναι ο εξής. Στο μάθημα Προχωρημένα Θέματα Θ. Π. είδαμε ότι, για όλες τις εισόδους, x_i, ενός καναλιού που χρησιμοποιούνται πρέπει να ισχύει $I(X = x_i; Y) = C$, όπου C η χωρητικότητα του καναλιού. Επομένως, πρέπει να ισχύει $I(X = 0; Y) = I(X = 2; Y)$ ή $H(Y) - H(Y|X = 0) = H(Y) - H(Y|X = 2)$ η $H(Y|X = 0) = H(Y|X = 2)$. Μπορούμε να διαπιστώσουμε εύκολα ότι η ισότητα ισχύει εάν και μόνο εάν $p(X = 0) = p(X = 2)$.

Εάν, λοιπόν, θέσουμε $p(0) = p(2) = \alpha$ και $p(1) = 1-\alpha$, η λύση προκύπτει εύκολα εκφράζοντας την $I(X; Y)$ συναρτήσει του α και παραγωγίζοντας.

Στη συνέχεια δίνεται η γενικότερη λύση, όπου $p_X = \{\alpha, 1-\alpha-\beta, \beta\}$.

$$
\begin{aligned}
I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\
&= -\frac{1}{3}(1+\alpha-\beta)\log\frac{1}{3}(1+\alpha-\beta) - \frac{1}{3}(1-\alpha+\beta)\log\frac{1}{3}(1-\alpha+\beta) \\
&- \frac{1}{3}\log\frac{1}{3} \\
&- \alpha H\left(\frac{1}{3}\right) - \beta H\left(\frac{1}{3}\right) - (1-\alpha-\beta)\log 3 \\
&= -\frac{1}{3}(1+\alpha-\beta)\log(1+\alpha-\beta) + \frac{1}{3}(1+\alpha-\beta)\log 3 \\
&- \frac{1}{3}(1-\alpha+\beta)\log(1-\alpha+\beta) + \frac{1}{3}(1-\alpha+\beta)\log 3 + \frac{1}{3}\log 3 \\
&- \alpha H\left(\frac{1}{3}\right) - \beta H\left(\frac{1}{3}\right) - (1-\alpha-\beta)\log 3 \\
&= -\frac{1}{3}(1+\alpha-\beta)\log(1+\alpha-\beta) - \frac{1}{3}(1-\alpha+\beta)\log(1-\alpha+\beta) + \frac{1}{3}\log 3 \\
&+ (\alpha+\beta)\left(\log 3 - H\left(\frac{1}{3}\right)\right) - \frac{1}{3}\log 3.
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη γραμμή μεγιστοποιείται όταν $\alpha = \beta$ (πρόκειται για την εντροπία μιας κατανομής με 3 μάζες), ενώ η 2η γραμμή μεγιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται το $(\alpha+\beta)$. Δεδομένου ότι $\alpha+\beta \leq 1$, θέλουμε $\alpha+\beta = 1$. Συνεπώς, $\alpha = \beta = 0.5$.

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε ότι $C = \log_2 3 - H\left(\frac{1}{3}\right)$. Η χωρητικότητα επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας μόνο τα σύμβολα 0 και 2.

Διαισθητικά, ο λόγος για τον οποίο δε χρησιμοποιείται η είσοδος 1 είναι ότι οδηγεί σε όλες τις εξόδους με την ίδια πιθανότητα.

(γ) Επαληθεύστε ότι η χωρητικότητα του καναλιού είναι η ίδια με αυτή του καναλιού διαγραφής (Binary Erasure Channel).

Απάντηση:

Η επαλήθευση μπορεί να γίνει αριθμητικά ή παρατηρώντας ότι, όταν χρησιμοποιούμε μόνο τις εισόδους 0 και 2, το κανάλι εκφυλίζεται σε κανάλι διαγραφής με πιθανότητα διαγραφής 1/3.

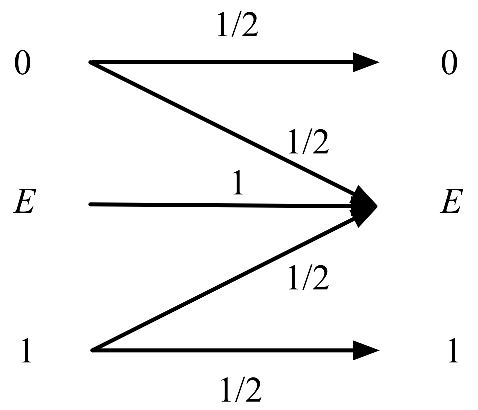
Αριθμητικά,

$$
C = \log 3 - H\left(\frac{1}{3}\right) = \log 3 - \frac{1}{3}\log 3 - \frac{2}{3}\log 3 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3} = C_{\text{BEC}}.
$$

13. **Χρήση διαγραφής από τον πομπό (Τελική Εξέταση Θ. Π., Φεβρουάριος 2010)**

Όπως είδαμε στο μάθημα, η χωρητικότητα του *δυαδικού* καναλιού διαγραφής (binary erasure channel - BEC) ισούται με $C = 1 - \alpha$ και επιτυγχάνεται με χρήση ομοιόμορφης κατανομής στον πομπό (Bern(1/2)). Στην άσκηση αυτή θα εξετάσουμε εάν έχει νόημα, εφόσον αυτό είναι εφικτό, ο πομπός να στέλνει όχι μόνο δύο σύμβολα (π.χ. 0 και 1), αλλά και ένα τρίτο σύμβολο διαγραφής. Στην άσκηση αυτή δε θα μας απασχολήσει σε τι αντιστοιχεί ένα σύμβολο διαγραφής στην πράξη και απλώς θα το δούμε ως ένα τρίτο σύμβολο εισόδου που έχουμε στη διάθεσή μας για τη μετάδοση.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε το διακριτό κανάλι *χωρίς μνήμη* του Σχήματος 22. Τα σύμβολα 0 και 1 διαγράφονται με πιθανότητα 1/2, ενώ, αν στείλουμε διαγραφή, θεωρούμε ότι φτάνει πάντοτε στο δέκτη ως διαγραφή.



Σχήμα 22: Τροποποιημένο Κανάλι Διαγραφής με 3 εισόδους.

(α) Είναι το κανάλι συμμετρικό; Είναι το κανάλι ασθενώς συμμετρικό;

Απάντηση:

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης του καναλιού είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Το κανάλι δεν είναι ούτε συμμετρικό ούτε ασθενώς συμμετρικό, αφού η δεύτερη γραμμή του P δεν προκύπτει από αναδιάταξη της πρώτης.

(β) Δώστε ένα άνω φράγμα, C_{UB}, και ένα κάτω φράγμα, C_{LB}, για τη χωρητικότητα του καναλιού. Το κάτω φράγμα που ζητείται πρέπει να είναι *αυστηρώς* μεγαλύτερο του 0.5: $C_{\mathsf{LB}} > 0.5$ bits. Με βάση τα όρια που βρήκατε, αν μας δίνεται η δυνατότητα, κερδίζουμε σε χωρητικότητα αν χρησιμοποιήσουμε και το 3ο σύμβολο διαγραφής στον πομπό;

Υπόδειξη: Αν δυσκολεύεστε να βρείτε $C_{\mathsf{LB}} > 0.5$ bits, πιθανώς να σας βοηθήσει η απάντησή σας στο επόμενο Ερώτημα (γ).

Σε περίπτωση που σας χρειαστεί, δίνεται ότι $\log_2 3 \approx 1.585$ και ότι $H(1/3) \triangleq -\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}\log\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0.9183$ bits.

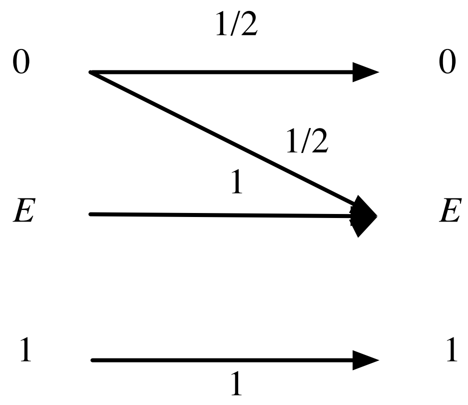
Απάντηση:

Αν δε χρησιμοποιήσουμε καθόλου την είσοδο , χρησιμοποιούμε το κανάλι ως δυαδικό κανάλι διαγραφής και, επομένως, μπορούμε να μεταδώσουμε έως $1 - \alpha = 1/2$ bits. Συνεπώς, $C \geq 1/2$ bits. Ωστόσο, μπορούμε να βρούμε καλύτερο φράγμα ως εξής: Για οποιαδήποτε κατανομή εισόδου, $p(x)$, η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ εισόδου και εξόδου αποτελεί κάτω φράγμα για τη χωρητικότητα του καναλιού. Εάν χρησιμοποιήσουμε ομοιόμορφη κατανομή $X \sim$ Unif$[1/3, 1/3, 1/3]$ προκύπτει εύκολα ότι $p(y) = \{1/6, 4/6, 1/6\}$. Συνεπώς, $H(Y) = H(1/3) + 2 \times 1/6 \times H(1/2) = H(1/3) + 1/3$ bits. Επίσης, $H(Y|X) = 2 \times \frac{1}{3}H(1/2) = 2/3$. Άρα, $C_{\text{LB}} = I(X;Y) = H(1/3) - 1/3 \approx 0.585$ bits.

Γνωρίζουμε, επίσης, ότι $C \leq |\mathcal{Y}|$ και $C \leq |\mathcal{X}|$. Επομένως, $C \leq \log_2 3 \approx 1.585$ bits $= C_{\text{UB}}$.

Ένα καλύτερο άνω φράγμα (το οποίο δε χρειαζόταν να βρείτε για το διαγώνισμα) μπορεί να βρεθεί ως εξής: Θεωρούμε το κανάλι του Σχήματος 23. Από την Άσκηση της Επαναληπτικής Εξέτασης Σεπτεμβρίου 2009 (ή από Cover & Thomas Άσκηση 7.28), αν θεωρήσουμε 2 υπο-κανάλια, ένα κανάλι Z με $f = 0.5$ και χωρητικότητα C_1 και ένα τετριμμένο κανάλι με 1 είσοδο και 1 έξοδο), η χωρητικότητα του καναλιού του Σχήματος 23 ισούται με

$$C' = \log_2\left(2^{C_1} + 2^{C_2}\right) \approx \log_2(2^{0.322} + 2^0) \approx 1.17 \text{ bits}.$$



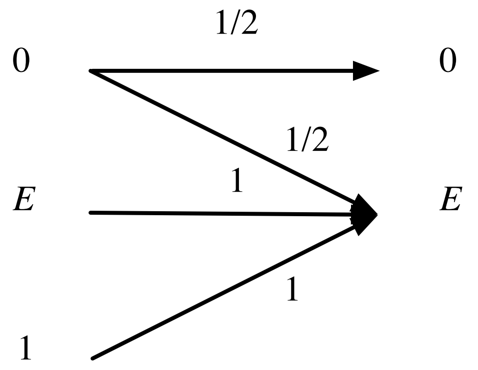
Σχήμα 23: Κανάλι για υπολογισμό C_{UB}.

Θεωρούμε, τώρα, το Κανάλι του Σχήματος 24. Πρόκειται για ένα κανάλι Z με $f = 0.5$, δεδομένου ότι δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε τις εισόδους E και 1.

Συνεπώς,

$$C'' \approx 0.322 \text{ bits}.$$

Για δεδομένη $p(x)$, η $I(X;Y)$ είναι *κυρτή* $\cup$ συνάρτηση της $p(y|x)$. Δηλαδή, αν για δύο κατανομές μετάβασης $p_1(y|x)$ και $p_2(y|x)$ και για δεδομένη κατανομή εισόδου, $p(x)$, η αμοιβαία πληροφορία μεταξύ εισόδου και εξόδου ισούται με I_1 και I_2, αντιστοίχως, για την αμοιβαία πληροφορία, I, που επιτυγχάνεται με την κατανομή $\theta p_1(y|x) + (1-\theta)p_2(y|x)$, $0 \leq \theta \leq 1$, $\leq \theta_1 + (1-\theta)I_2$. Παρατηρήστε, τώρα, ότι η $p(y|x)$ του καναλιού του Σχήματος 22 αποτελεί κυρτό συνδυασμό (convex combination) των κατανομών των καναλιών των Σχημάτων 23 και 24 με $\theta = 0.5$. Συνεπώς, για οποιαδήποτε $p(x)$, $I(X;Y) \leq \theta I_1 + (1-\theta)I_2 \leq \theta C' + (1-\theta)C''$. Επομένως, και για την $p^*(x)$ η οποία επιτυγχάνει τη χωρητικότητα του καναλιού, $C \leq \theta C' + (1-\theta)C''$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι $C \leq C' \approx 1.17$ bits.



Σχήμα 24: Κανάλι για υπολογισμό C_{UB}.

Τέλος, ένας άλλος τρόπος να βρούμε ένα άνω φράγμα για τη C είναι με χρήση της σχέσης $C \leq \max H(Y)$. Ωστόσο, πρέπει να προσέξουμε το εξής: Η κατανομή εισόδου, $p(x)$, που μεγιστοποιεί την $H(Y)$ δεν είναι, κατ' ανάγκη ίδια με την κατανομή που μεγιστοποιεί την $I(X;Y)$. Θέτοντας $p_X(0) = p_X(1) = p$ (δείτε την αιτιολόγηση για αυτήν την επιλογή στο Ερώτημα (γ)), $H(Y) = H(p) + 2 \times \frac{p}{2} \times H(1/2) = H(p)+p$. Πρέπει, τώρα, να μεγιστοποιήσουμε την $H(p)+p$. Απλή παραγώγιση δίνει $p = 2/3$, τιμή η οποία δεν είναι αποδεκτή γιατί πρέπει $2p \leq 1$. Πρέπει, λοιπόν, να μεγιστοποιήσουμε την $(p) + p$ υπό τον περιορισμό $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$. Στη γενική περίπτωση, απαιτείται χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange. Ωστόσο, στη συγκεκριμένη περίπτωση μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την κυρτότητα της $H(Y)$ και το γεγονός ότι, αν δεν έχουμε περιορισμό, η μέγιστη τιμή επιτυγχάνεται για $p > \frac{1}{2}$. Αυτό σημαίνει ότι η $H(p)+p$ μεγιστοποιείται σε ένα από τα άκρα του διαστήματος επιτρεπτών τιμών της p. Επειδή $H(0)+0 = 0$, $\max\{H(p)+p\} = H(1/2)+1/2 = 1.5$ bits. Άρα, η $H(Y)$ μεγιστοποιείται για $p_X(0) = p_X(1) = 1/2$ και $P_X(E) = 0$. Παρατηρήστε ότι, παρόλο που η ομοιόμορφη κατανομή εισόδου οδηγεί σε μεγαλύτερη αμοιβαία πληροφορία απ' ό,τι η κατανομή $p_X(0) = p_X(1) = 1/2$ και $P_X(E) = 0$ (και, μάλιστα, επιτυγχάνει τη χωρητικότητα, όπως θα δούμε στο Ερώτημα (γ)), η $H(Y)$ σε αυτήν την περίπτωση ισούται με 1.2516 bits.

Δεδομένου ότι $C_{\text{LB}} > 0.5 = C_{\text{BEC}}$, συμφέρει να μεταδίδουμε και διαγραφές από τον πομπό, εφόσον μας δίνεται η δυνατότητα.

(γ) Υπολογίστε τη χωρητικότητα, C, του καναλιού του Σχήματος 3, καθώς και την κατανομή πομπού, $p^*(x)$, με την οποία επιτυγχάνεται.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη συμμετρία του διαγράμματος μετάβασης του καναλιού για να απλοποιήσετε τις πράξεις (Προσοχή: Δε σημαίνει, απαραίτητα, ότι το κανάλι είναι συμμετρικό ή ασθενώς συμμετρικό).

Απάντηση:

Από τη συμμετρία του διαγράμματος μετάβασης, $p_X(0) = p_X(1) = p$ και $p_X(E) = 1-2p$. Επομένως, $p_Y(0) = p_Y(1) = p/2$ και $p_Y(E) = 1-p$. Αυτό μπορούμε να το δικαιολογήσουμε ως εξής: Κατ' αρχάς, διαισθητικά, δεδομένου ότι αν "αναποδογυρίσουμε" το κανάλι θα είναι το ίδιο, δεν υπάρχει λόγος να χρησιμοποιήσουμε μια είσοδο με μεγαλύτερη πιθανότητα από μία άλλη. Πιο αυστηρά, αν η χωρητικότητα επιτυγχάνεται από την κατανομή $p_X(0) = p$, $p_X(1) = q$ και $p_X(E) = 1-p-q$, τότε μπορούμε να επιτύχουμε τη χωρητικότητα και με την κατανομή $p_X(0) = q$, $p_X(1) = p$ και $p_X(E) = 1 - p - q$. Δεδομένου ότι, για δεδομένες $p(y|x)$, η αμοιβαία πληροφορία είναι κοίλη $\cap$ συνάρτηση της **p**, οποιοσδήποτε κυρτός συνδυασμός των δύο κατανομών οδηγεί σε αμοιβαία πληροφορία τουλάχιστον ίση με την αμοιβαία πληροφορία που επιτυγχάνει κάθε μία από τις δύο κατανομές. Άρα, με χρήση της $p_X(0) = (p + q)/2$, $p_X(1) = (p + q)/2$ και $p_X(E) = 1 - p - q$ μπορούμε να επιτύχουμε τη χωρητικότητα. Ένας άλλος τρόπος είναι με χρήση του εξής θεωρήματος (που δεν έχουμε αναφέρει σε αυτό το μάθημα): Για τις κατανομές εισόδου $p_X(x)$ που επιτυγχάνουν τη χωρητικότητα ισχύει $I(Y; X = x) = C$ για όλα τα x για τα οποία $p_X(x) > 0$. Άρα, αν χρησιμοποιηθούν οι είσοδοι 0 και 1, θα ισχύει $I(Y; X = 0) = I(Y; X = 1) = C$. Δεδομένης της συμμετρίας του καναλιού, για να επιτύχουμε $I(Y; X = 0) = I(Y; X = 1)$ χρειαζόμαστε και ίσες πιθανότητες εισόδου. Τέλος, ένας σαφώς πιο πολύπλοκος τρόπος είναι να μη χρησιμοποιήσουμε τη συμμετρία του διαγράμματος και να μεγιστοποιήσουμε συνάρτηση 2 μεταβλητών.

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας $p_X(0) = p_X(1) = p$, $H(Y) = H(p)+2\times\frac{p}{2}\times H(1/2) = H(p)+p$. $H(Y|X) = 2\times p\times H(1/2) = 2p$. Άρα, $I(X;Y) = H(p)-p$. Δεδομένου ότι η $I(X;Y)$ είναι κοίλη $\cap$ συνάρτηση της $p(x)$ για δεδομένη $p(y|x)$, μπορούμε να βρούμε το μέγιστο της $I(X;Y)$ παραγωγίζοντας ως προς p:

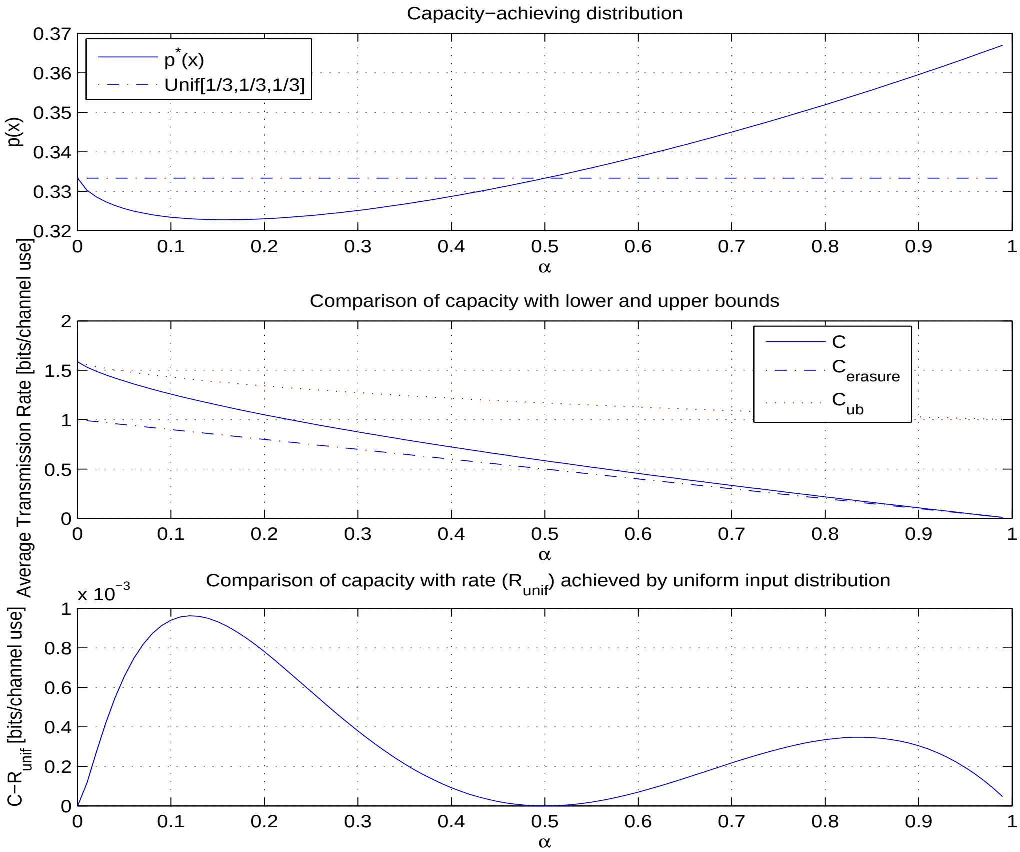
$$\begin{aligned}
&I(X;Y) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p) - p \Rightarrow \\
&\frac{dI(X;Y)}{dp} = -\log_2 p - p\frac{1}{p}\log_2 e + \log_2(1-p) - (1-p)\cdot(-1)\frac{1}{1-p}\log_2 e - 1 = 0 \Rightarrow \\
&\log_2\frac{1-p}{p} = 1 \Rightarrow \frac{1-p}{p} = 2 \Rightarrow p = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Επομένως, παρόλο που το κανάλι δεν είναι συμμετρικό η κατανομή που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα είναι η ομοιόμορφη: $p^*(x) = \{1/3, 1/3, 1/3\}$.

Η χωρητικότητα του καναλιού ισούται με $C = H(p) - p = H(1/3) - 1/3 \approx 0.585$ bits.

Σημείωση: Είναι δελεαστικό να δουλέψουμε με φυσικούς λογαρίθμους (δηλαδή να εκφράσουμε την εντροπία σε nats) για να απλοποιήσουμε τις παραγωγίσεις. Ωστόσο, σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να προσέξουμε, γιατί $H(1/2) = \ln 2$ nats! (και όχι 1).

Στη συνέχεια δίνεται ένα πρόγραμμα σε MATLAB το οποίο σχεδιάζει τη χωρητικότητα του καναλιού για διαφορετικές πιθανότητες μετάβασης α και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Επίσης, η χωρητικότητα συγκρίνεται με τη χωρητικότητα του αντίστοιχου BEC, με τη χωρητικότητα του καναλιού του Σχήματος 23, καθώς και με το ρυθμό μετάδοσης που επιτυγχάνεται με την ομοιόμορφη κατανομή (Σχήμα 25). Παρατηρούμε ότι η βέλτιστη κατανομή εισόδου έχει αρκετά ενδιαφέρουσα συμπεριφορά: Είναι σχεδόν ομοιόμορφη και ταυτίζεται με την ομοιόμορφη για $\alpha = 0$ και $\alpha = 0.5$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι η απώλεια ρυθμού μετάδοσης όταν χρησιμοποιείται ομοιόμορφη κατανομή εισόδου σε σχέση με τη χωρητικότητα είναι πολύ μικρή για όλες τις τιμές του α (και μηδενική για $\alpha = 0$ και 0.5). Τέλος, όπως περιμέναμε, η χωρητικότητα μεγιστοποιείται όταν $\alpha = 0$ οπότε το κανάλι δεν έχει θόρυβο ($C = \log 3$) και ισούται με 0 όταν $\alpha = 1$, οπότε όλες οι είσοδοι οδηγούν στην Έξοδο E.



Σχήμα 25: Κανάλι για υπολογισμό C_{UB}.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% EE676 - Information Theory              %
% Sample code for Problem 3 of 2010 Final %
%                                         %
% Dimitris Toumpakaris, 20/01/2010        %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all;

% transition probability values of the channel
alpha = linspace(0,0.99,100);

% Calculate intermediate parameters
H_alpha = -alpha.*log2(alpha) - (1-alpha).*log2(1-alpha);
```

```
% Set H_alpha corresponding to alpha=0 manually
% to avoid numerical problems
H_alpha(1) = 0;

% calculate distribution that achieves capacity
p = 1/2./(1-alpha)./(1.+2.^((H_alpha+alpha-1)./(1-alpha)));
clf;
subplot(3,1,1);
plot(alpha,p);
grid on;
hold on;

% show intersection with uniform distribution
unif = 1/3*ones(1,100);
plot(alpha,unif,'-.');

title('Capacity-achieving distribution')
xlabel('\alpha')
ylabel('p(x)')
legend('p^*(x)','Unif[1/3,1/3,1/3]');

% find corresponding capacity
beta = 2.*(1-alpha).*p;
C = -beta.*log2(beta)-(1-beta).*log2(1-beta) + 2.*p.*(1-alpha-H_alpha);

% generate plot comparing capacity with corresponding erasure channel
subplot(3,1,2);
plot(alpha,C);
grid on;
hold on;

% plot capacity of erasure channel with alpha
plot(alpha,1-alpha,'-.');

% plot capacity of combined Z channel and trivial channel
% with one input and one output
C_ub = log2(2+(1-alpha).*alpha.^(alpha./(1-alpha)));
plot(alpha,C_ub,':');

title('Comparison of capacity with lower and upper bounds');
xlabel('\alpha');
ylabel('Average Transmission Rate [bits/channel use]');
legend('C','C_{erasure}','C_{ub}');

% generate plot comparing capacity with lower bound achieved
% with uniform input distribution
```

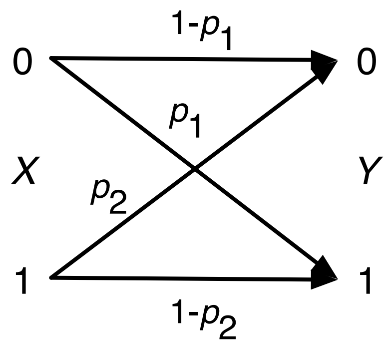
```
subplot(3,1,3);

% plot lower bound assuming that the uniform input distribution is used
p_lb = 1/3*ones(1,100);
beta_lb = 2.*(1-alpha).*p_lb;
C_lb = -beta_lb.*log2(beta_lb)-(1-beta_lb).*log2(1-beta_lb) +...
  2.*p_lb.*(1-alpha-H_alpha);
plot(alpha,C-C_lb);

title('Comparison of capacity with rate (R_{unif})...
       achieved by uniform input distribution');
xlabel('\alpha');
ylabel('C-R_{unif} [bits/channel use]');
grid on;
hold on;
```

14. **Μη συμμετρικό Δυαδικό Κανάλι (Επαναληπτική Εξέταση Π. Θ. Θ. Π., Σεπτέμβριος 2010)**

Θεωρούμε το *μη συμμετρικό* δυαδικό κανάλι του Σχήματος 26.



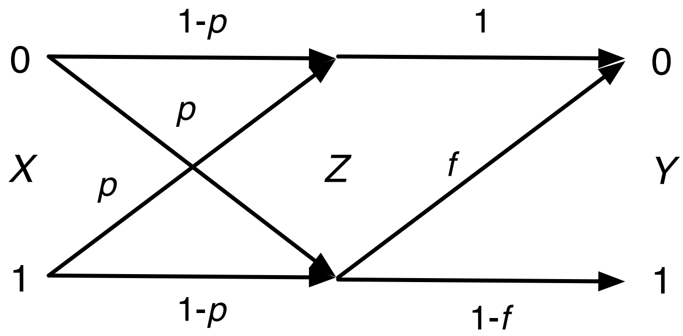
Σχήμα 26: Το μη συμμετρικό δυαδικό κανάλι.

Σε περίπτωση που σας χρειαστεί στην άσκηση, δίνεται ότι η χωρητικότητα του καναλιού Z ισούται με $C \leq \log\left(1 + (1-f)f^{f/(1-f)}\right)$, όπου f η πιθανότητα μετάβασης από το 1 στο 0.

(α) Δείξτε ότι το μη συμμετρικό δυαδικό κανάλι μπορει να γραφτεί ως διαδοχή ενός δυαδικού συμμετρικού καναλιού με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου p και ενός καναλιού Z με πιθανότητα μετάβασης από το 1 στο 0 ίση με f. Δώστε εκφράσεις για τις παραμέτρους p και f συναρτήσει των p_1 και p_2.

Απάντηση:

Θεωρούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $p_2 \geq p_1$. Αν $p_1 \geq p_2$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το κανάλι Z που αναστρέφει το ψηφίο εισόδου 0. Από το Σχήμα



Σχήμα 27: Το δυαδικό μη συμμετρικό κανάλι ως διαδοχή BSC και καναλιού Z.

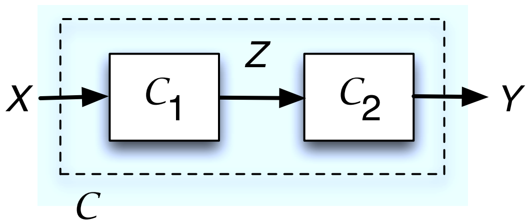
27,

$$\begin{aligned}
&\text{Pr}\{Y=0|X=0\} = 1-p_1 = 1-p+pf = 1-p(1-f),\\
&\text{Pr}\{Y=1|X=0\} = p_1 = p(1-f),\\
&\text{Pr}\{Y=1|X=1\} = 1-p_2 = (1-p)(1-f) \text{ και}\\
&\text{Pr}\{Y=0|X=1\} = p_2 = p+(1-p)f.
\end{aligned}$$

Επομένως, $f = p_2 - p_1$ και $p = \frac{p_1}{1+p_1-p_2}$.
Παρατηρήστε ότι όταν $p_1 = p_2$, $f = 0$ και $p = p_1 = p_2$.

(β) Δείξτε ότι για *οποιοδήποτε* κανάλι $\mathcal{C}$ που μπορεί να γραφτεί ως διαδοχή δύο καναλιών $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$, $C \leq \min\{C_1, C_2\}$, όπου C, C_1 και C_2 είναι οι χωρητικότητες των καναλιών $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$, αντιστοίχως.
Επίσης, δώστε μια ικανή συνθήκη για να ισχύει η ισότητα, δηλαδή
$C = \min\{C_1, C_2\}$.

Απάντηση:



Σχήμα 28: Διαδοχή καναλιών.

Από την ανισότητα επεξεργασίας δεδομένων γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}
&I(X;Y) \leq I(X;Z) \text{ και}\\
&I(X;Y) \leq I(Z;Y).
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
&C = \max I(X;Y) \leq \max I(X;Z) = C_1 \text{ και}\\
&C = \max I(X;Y) \leq \max I(Z;Y) = C_2.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, $C \leq \min\{C_1, C_2\}$.

Η ισότητα ισχύει όταν τουλάχιστον ένα από τα κανάλια είναι ντετερμινιστικό και αντιστρέψιμο (1-προς-1).

(γ) Με βάση τις απαντήσεις σας στα Ερωτήματα (α) και (β) βρείτε ένα *άνω* φράγμα για τη χωρητικότητα του μη συμμετρικού δυαδικού καναλιού. Το άνω φράγμα πρέπει να είναι συνάρτηση των p_1 και p_2.

Απάντηση:

Η χωρητικότητα του μη συμμετρικού δυαδικού καναλιού δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητα του δυαδικού συμμετρικού καναλιού με παράμετρο p. Επίσης, δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητα του καναλιού Z με παράμετρο f.

Επομένως,

$$C \leq 1 - H(p) = 1 - H\left(\frac{p_1}{1 + p_1 - p_2}\right)$$

και

$$C \leq \log\left(1 + (1-f)f^{f/(1-f)}\right) = \log\left(1 + (1 + p_1 - p_2)(p_2 - p_1)^{\frac{p_2 - p_1}{1 + p_1 - p_2}}\right).$$

(δ) Βρείτε ένα *κάτω* φράγμα για τη χωρητικότητα του μη συμμετρικού δυαδικού καναλιού (χωρίς να χρησιμοποιήσετε, κατ' ανάγκη, τα προηγούμενα ερωτήματα). Δε χρειάζεται να δώσετε αναλυτικές εκφράσεις. Αρκεί να εξηγήσετε πώς μπορεί να υπολογιστεί το κάτω φράγμα.

Απάντηση:

Μπορούμε να βρούμε ένα κάτω φράγμα αν υπολογίσουμε την αμοιβαία πληροφορία, $I(X;Y)$, για ομοιόμορφη κατανομή εισόδου.

$\mathbf{p}_X = (1/2, 1/2) \Rightarrow \mathbf{p}_Y = (1/2 + 1/2(p_2 - p_1), 1/2 - 1/2(p_2 - p_1))$.

Επομένως,

$$\begin{aligned} I(X;Y)\big|_{\mathbf{p}_X = (1/2,1/2)} &= H(Y) - H(Y|X) = \\ &= H\left(1/2 + 1/2(p_2 - p_1), 1/2 - 1/2(p_2 - p_1)\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}H(p_1) - \frac{1}{2}H(p_2) \leq C. \end{aligned}$$

15. **Δυαδικό συμμετρικό κανάλι με μεταβαλλόμενη πιθανότητα αναστροφής ψηφίου (Τελική Εξέταση Θ. Π., Φεβρουάριος 2011)**

Θεωρούμε ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC) με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου $p \leq \frac{1}{2}$. Ωστόσο, η πιθανότητα αναστροφής ψηφίου μεταβάλλεται με το χρόνο, n. Συγκεκριμένα, η p_n μπορεί να πάρει δύο πιθανές τιμές, p_A και p_B. Θεωρούμε, επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $0 \leq p_A \leq p_B \leq \frac{1}{2}$. Η διαδικασία p_n είναι ανεξάρτητη και ομοίως κατανεμημένη (i.i.d.), δηλαδή η τιμή της τη χρονική στιγμή n δεν εξαρτάται από προηγούμενες χρονικές στιγμές και δεν επηρεάζει επόμενες χρονικές στιγμές.

Έστω ότι $\Pr\{p_n = p_A\} = \alpha = 1 - \Pr\{p_n = p_B\}$.

(α) Εάν γνωρίζουμε την τιμή της p_n τη χρονική στιγμή n, με τι ισούται η χωρητικότητα, C, του καναλιού τη χρονική στιγμή n; Θα ονομάσουμε την τιμή αυτή $C(S_n)$ όπου $S_n = A$ ή B, ανάλογα με την τιμή της p_n (p_A ή p_B, αντιστοίχως).

Με ποια κατανομή εισόδου επιτυγχάνεται η χωρητικότητα;

Απάντηση:

Εάν γνωρίζουμε την τιμή της p_n, κατά τα γνωστά από το δυαδικό συμμετρικό κανάλι, $C(S) = 1 - H(p_S)$. Η χωρητικότητα επιτυγχάνεται με ομοιόμορφη κατανομή εισόδου.

(β) Εάν χρησιμοποιήσουμε το κανάλι πάρα πολλές φορές ($n \to \infty$) και κάθε φορά γνωρίζουμε την τιμή της p_n στον πομπό (η οποία, όμως, εξακολουθεί να μεταβάλλεται με τυχαίο τρόπο) ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορούμε να επιτύχουμε; Δηλαδή, με τι ισούται η ποσότητα

$$C_{perfect} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} C(S_n);$$

Απάντηση:

Με πιθανότητα α το κανάλι θα βρίσκεται στην κατάσταση A, ενώ με πιθανότητα $1 - \alpha$ στην κατάσταση B. Επομένως, στο όριο,

$$C_{perfect} = \alpha C(A) + (1 - \alpha)C(B) = 1 - \alpha H(p_A) - (1 - \alpha)H(p_B).$$

Δηλαδή, στο όριο, θα χρησιμοποιήσουμε το κανάλι ως κανάλι $n_A \approx \alpha n$ φορές (οπότε θα στείλουμε $\alpha C(A)n$ bits) και ως κανάλι $n_B \approx (1 - \alpha)n$ φορές.

(γ) Έστω, τώρα, ότι δε γνωρίζουμε την τιμή της p_n στον πομπό. Δείξτε ότι μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το κανάλι ως ένα δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC) με παράμετρο $\bar{p}$. Δώστε μια έκφραση για την $\bar{p}$ συναρτήσει των α, p_A και p_B, καθώς και για τη χωρητικότητα, $C_{no\ state\ info}$, εάν υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε το κανάλι n φορές με $n \to \infty$.

Απάντηση:

Με χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας, η πιθανότητα το ψηφίο 0 να αντιστραφεί στο 1 μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned}\bar{p} = \mathrm{Pr}\{0 \to 1\} &= \mathrm{Pr}\{S = A\}\,\mathrm{Pr}\{0 \to 1|S = A\} + \mathrm{Pr}\{S = B\}\,\mathrm{Pr}\{0 \to 1|S = B\} \\ &= \alpha p_A + (1 - \alpha)p_B.\end{aligned}$$

Αντιστοίχως μπορούμε να εξαγάγουμε και τις υπόλοιπες πιθανότητες μετάβασης. Επομένως, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το κανάλι ως BSC με $\bar{p} = \alpha p_A + (1 - \alpha)p_B$.

Η χωρητικότητα ισούται με $C_{no\ state\ info} = 1 - H(\bar{p}) = 1 - H(\alpha p_A + (1 - \alpha)p_B)$ και επιτυγχάνεται με ομοιόμορφη κατανομή εισόδου.

(δ) Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός, $R_{conservative}$, με τον οποίο μπορούμε να μεταδώσουμε αν είμαστε συντηρητικοί και υποθέσουμε ότι η p_n παίρνει πάντοτε τη (χειρότερη) τιμή p_B; Τι κατανομή εισόδου πρέπει να χρησιμοποιήσουμε; Συγκρίνετε με τη $C_{no\ state\ info}$ του προηγούμενου ερωτήματος. Υπάρχει περίπτωση να ισχύει $R_{conservative} = C_{no\ state\ info}$;

Απάντηση:

$$R_{conservative} = 1 - H(p_B),$$

με χρήση ομοιόμορφης κατανομής. Για $0 < p_A \leq p_B \leq \frac{1}{2}$, $p_B \geq (1-\alpha)p_A + \alpha p_B$ για οποιοδήποτε $\alpha > 0$, οπότε και $(p_B) \geq H((1-\alpha)p_A + \alpha p_B) \Rightarrow 1 - H(p_B) \leq 1 - H((1-\alpha)p_A + \alpha p_B)$. Η μόνη περίπτωση όπου ισχύει η ισότητα είναι όταν $p_A = p_B$ ή όταν $\alpha = 1$, οπότε, στην ουσία, το κανάλι δεν αλλάζει και $R_{conservative} = C_{no\ state\ info}$. Για οποιαδήποτε μη τετριμμένη περίπτωση,
$R_{conservative} < C_{no\ state\ info}$.

(ε) Αποδείξτε ότι $C_{no\ state\ info} \leq C_{perfect}$. Επομένως, γνώση της κατάστασης του καναλιού στον πομπό αυξάνει τη χωρητικότητα. Εάν $\alpha > 0$, για ποιες τιμές των p_A και p_B ισχύει η ισότητα;

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι η εντροπία είναι κυρτή συνάρτηση της κατανομής. Επιπλέον, η εντροπία δυαδικής τ.μ. είναι γνησίως κυρτή. Επομένως, για $0 < \lambda < 1$, $\lambda H(p_1) + (1-\lambda)H(p_2) \leq H(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2)$. Η ισότητα ισχύει όταν $p_1 = p_2$. Θέτοντας $\alpha = \lambda$, $p_1 = p_A$ και $p_2 = p_B$ προκύπτει το ζητούμενο. Παρατηρήστε ότι δεν είναι απαραίτητο οι p_A και p_B να ισούνται με $\frac{1}{2}$.

Παρατηρήσεις:

Ένα λάθος που έκαναν κάποιοι ήταν να υποθέσουν ότι, στο Ερώτημα (β), το κανάλι παραμένει σε μία από τις καταστάσεις (p_A ή p_B). Αυτό δεν είναι σωστό. Το κανάλι μεταβαίνει μεταξύ των δύο καταστάσεων με τυχαίο (και i.i.d.) τρόπο. Ένα άλλο λάθος που έκαναν κάποιοι ήταν να γράψουν $C = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} H(S_1, S_2, \ldots, S_n)$, όπου S_n η κατάσταση του καναλιού. Και αυτό δεν είναι σωστό. Επειδή η κατάσταση του καναλιού μας είναι γνωστή, $C(S_n) = 1 - H(p_n)$ όπου p_n είναι η τιμή της πιθανότητας μετάβασης στην κατάσταση S_n και όχι η κατανομή της κατάστασης S_n (η οποία είναι Bernoulli(α)).

16. **Ένας πομπός, πολλοί δέκτες (Π. Θ. Θ. Π. – Τελική Εξέταση Ιουνίου 2011)**

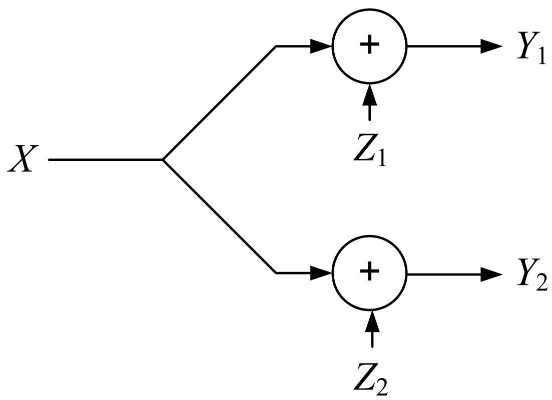
Θεωρούμε έναν πομπό που μεταδίδει σε δύο δέκτες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 29. Σε κάθε δέκτη προστίθεται πραγματικός Γκαουσιανός θόρυβος μηδενικής μέσης τιμής. Δηλαδή, $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ και , $Z_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$. Οι θόρυβοι είναι *ανεξάρτητοι* μεταξύ τους.
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $\sigma_2^2 \geq \sigma_1^2$.

(α) Αρχικά θεωρούμε ότι η ανίχνευση μπορεί να γίνει *από κοινού* (jointly) με χρήση των σημάτων και των δύο δεκτών. Δηλάδη οι δέκτες συνδέονται μεταξύ τους ή, ισοδύναμα, τα σήματά τους αποστέλλονται σε κάποιο κέντρο επεξεργασίας.

Αν επιβάλουμε περιορισμό μέσης ισχύος στον πομπό $\mathbb{E}[X^2] \leq P$ και $X \in \mathbb{R}$, βρείτε τη χωρητικότητα C_{joint} του καναλιού μεταξύ του πομπού και των δύο δεκτών, καθώς και την κατανομή της X με την οποία επιτυγχάνεται.

Απάντηση:

Παρόμοια με την περίπτωση Γκαουσιανού καναλιού με ένα δέκτη,



Σχήμα 29: Μετάδοση σε 2 δέκτες.

$$
\begin{aligned}
I(X;Y_1,Y_2) &= h(Y_1,Y_2) - h(Y_1,Y_2|X) \\
&\leq \frac{1}{2}\log(2\pi e)^2|K_Y| - h(Z_1,Z_2) = \frac{1}{2}\log(2\pi e)^2|K_Y| - \frac{1}{2}\log(2\pi e)^2|K_Z|,
\end{aligned}
$$

όπου $K_Y = \mathbb{E}\left[[Y_1\, Y_2]^T \cdot [Y_1\, Y_2]\right]$ και $K = \mathbb{E}\left[[Z_1\, Z_2]^T \cdot [Z_1\, Z_2]\right]$ οι πίνακες συνδιασποράς των (πραγματικών) τυχαίων διανυσμάτων $\mathbf{Y} = [Y_1\, Y_2]^T$ και $\mathbf{Z} = [Z_1\, Z_2]^T$, αντιστοίχως.

Λόγω της ανεξαρτησίας των θορύβων, $K_Z = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow |K_Z| = \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2$.

$$
\begin{aligned}
K_Z = \mathbb{E}\begin{bmatrix} Y_1^2 & Y_1Y_2 \\ Y_2Y_1 & Y_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[X^2] + \sigma_1^2 & \mathbb{E}[X^2] \\ \mathbb{E}[X^2] & \mathbb{E}[X^2] + \sigma_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
|K_Z| = \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 + \mathbb{E}\left[X^2\right](\sigma_1^2 + \sigma_2^2).
\end{aligned}
$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
I(X;Y_1,Y_2) &\leq \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 + \mathbb{E}[X^2](\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\sigma_1^2} + \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\sigma_2^2}\right).
\end{aligned}
$$

Η ισότητα ισχύει όταν το **Y** είναι Γκαουσιανό τυχαίο διάνυσμα. Επειδή το **Y** είναι γραμμική συνάρτηση της τ.μ. X, το **Y** είναι Γκαουσιανό τυχαίο διάνυσμα όταν η X είναι Γκαουσιανή. Επίσης, προκειμένου να μεγιστοποιηθεί το όρισμα του λογαρίθμου, επιλέγουμε $\mathbb{E}[X^2] = P$.

Συνεπώς,

$$
C_{\text{joint}} = \max I(X;Y_1,Y_2) = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{\sigma_1^2} + \frac{P}{\sigma_2^2}\right).
$$

Παρατηρήστε ότι κάθε κλάδος συμβάλλει με όρο $\frac{P}{\sigma_i^2}$. Δηλαδή, αν $\text{SNR}_i \triangleq \frac{P}{\sigma_i^2}$, $C_{\text{joint}} = \frac{1}{2}\log(1 + \text{SNR}_1 + \text{SNR}_2)$.

(β) Έστω ότι θέτουμε τον εξής περιορισμό στους δέκτες: Η αποκωδικοποιήση πρέπει να βασιστεί στο σήμα $\tilde{Y} = aY_1 + (1-a)Y_2$ με δεδομένο $0 \leq a \leq 1$. Δηλαδή, αντί να έχουμε απευθείας πρόσβαση στο σήμα κάθε δέκτη (δηλαδή στο διάνυσμα **Y** $= [Y_1 \; Y_2]^T$), έχουμε πρόσβαση μόνο στο $\tilde{Y}$.

Βρείτε τη χωρητικότητα, $C_{\text{lin-comb}}$, του καναλιού μεταξύ της X και της˜για δεδομένο a.

Αλλάζει η απάντησή σας αν $\tilde{Y} = aY_1 + bY_2$ με $a > 0$, $b > 0$ και $a + b = c > 1$, όπου c σταθερά;

Απάντηση:

$$
\begin{aligned}
I(X;\tilde{Y}) &= h(\tilde{Y}) - h(\tilde{Y}|X) \\
&\leq \frac{1}{2}(2\pi e) \log \mathbb{E}\left[\tilde{Y}^2\right] - \frac{1}{2}(2\pi e) \log\left(a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2\right) \\
&= \frac{1}{2}(2\pi e) \log\left(\mathbb{E}\left[X^2\right] + a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2\right) - \frac{1}{2}(2\pi e) \log\left(a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2\right) \\
&= \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{\mathbb{E}\left[X^2\right]}{a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2}\right).
\end{aligned}
$$

Όπως και πριν, η χωρητικότητα επιτυγχάνεται θέτοντας $X \sim \mathcal{N}(0, P)$, οπότε

$$
C_{\text{lin-comb}} = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P}{a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2}\right).
$$

Η απάντηση δεν αλλάζει αν $a + b > c$. Θα έχουμε έναν όρο c^2 στον αριθμητή και έναν στον παρονομαστή οι οποίοι απαλείφονται. Αυτό συμβαίνει γιατί ενισχύουμε το θόρυβο με το ίδιο κέρδος με το οποίο ενισχύουμε το χρήσιμο σήμα, οπότε ο SNR δεν αλλάζει (αν κάνετε τις πράξεις θα προκύψει ότι $C_{\text{lin-comb}} = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{\left(\frac{a}{c}\right)^2\sigma_1^2 + (1-\frac{a}{c})^2\sigma_2^2}\right)$).

(γ) Επιλέξτε την τιμή του $0 \leq a \leq 1$ που μεγιστοποιεί τη $C_{\text{lin-comb}}$ και συγκρίνετε με την απάντησή σας στο Ερώτημα (α). Σχολιάστε.

Απάντηση:

Λύνοντας την εξίσωση $\frac{\partial}{\partial a}(a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2) = 0$,

$$
a^* = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{1/\text{SNR}_2}{1/\text{SNR}_1 + 1/\text{SNR}_2} = \frac{\text{SNR}_1}{\text{SNR}_1 + \text{SNR}_2}.
$$

Παρατηρούμε ότι $0 \leq a^* \leq 1$ και ότι $\frac{\partial^2}{\partial a^2}(a^2\sigma_1^2 + (1-a)^2\sigma_2^2) = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) > 0$. Επομένως, το a^* ελαχιστοποιεί τον παρονομαστή και, άρα, μεγιστοποιεί τη $C_{\text{lin-comb}}$. Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιούμε και τα δύο Y_i, όχι μόνο το Y_1. Ωστόσο, δίνουμε μεγαλύτερο βάρος στο Y_1 που έχει μεγαλύτερο SNR.

$$\begin{aligned}
C^*_{\text{lin-comb}} &= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}{\sigma_1^2\sigma_2^4+\sigma_1^4\sigma_2^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\frac{P(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{\sigma_1^2}+\frac{P}{\sigma_2^2}\right) = C_{\text{joint}}.
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε, επίσης, ότι μπορούμε να επιτύχουμε τη C_{joint} συνδυάζοντας με γραμμικό τρόπο τα Y_1 και Y_2. Δηλαδή το γεγονός ότι δεν έχουμε απευθείας πρόσβαση στα Y_i δεν ελαττώνει τη χωρητικότητα. Στη γενική περίπτωση καναλιών με πολλές εξόδους, αυτό δεν ισχύει.

(δ) Βρείτε το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης, $C_{\text{separate}} = C_{\text{separate},1} + C_{\text{separate},2}$, που μπορούμε να πετύχουμε αν η αποκωδικοποίηση πρέπει να γίνει ξεχωριστά σε κάθε δέκτη, αν, δηλαδή, δεν επιτρέπεται συνεργασία (από κοινού αποκωδικοποίηση). Συγκρίνετε με το αποτέλεσμα του Ερωτήματος (α).

Απάντηση:

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ένα BC. Όπως είδαμε στις ασκήσεις, το μέγιστο άθροισμα ρυθμών μετάδοσης επιτυγχάνεται όταν μεταδίδουμε μόνο στο χρήστη με το καλύτερο SNR. Επομένως,

$$C_{\text{separate}} = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{\sigma_1^2}\right).$$

Η C_{separate} είναι μικρότερη από την C_{joint}. Αυτό είναι το τίμημα που πληρώνουμε επειδή δεν μπορούμε να προβούμε σε από κοινού αποκωδικοποίηση.

17. **Ασθενώς Συμμετρικά Διακριτά Κανάλια Χωρίς Μνήμη (Τελική Εξέταση Θ. Π., Φεβρουάριος 2012)**

Όπως γνωρίζουμε, τα ασθενώς συμμετρικά διακριτά κανάλια χωρίς μνήμη αποτελούν μία υποκατηγορία του συνόλου των διακριτών καναλιών χωρίς μνήμη. Επομένως, περιμένουμε ότι, στη γενική περίπτωση, για κανάλι με δεδομένο αριθμό εισόδων, $|\mathcal{X}|$, και δεδομένο αριθμό εξόδων, $|\mathcal{Y}|$, η μέγιστη χωρητικότητα ενός ασθενώς συμμετρικού καναλιού χωρίς μνήμη είναι μικρότερη από τη χωρητικότητα ενός καναλιού χωρίς μνήμη που δεν υπόκειται στον περιορισμό να είναι ασθενώς συμμετρικό.

(α) Δείξτε ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του πίνακα μετάβασης *ασθενώς συμμετρικού* καναλιού $|\mathcal{X}|$ εισόδων και $|\mathcal{Y}|$ εξόδων ισούται με $\frac{|\mathcal{X}|}{|\mathcal{Y}|}$.

Απάντηση:

Σε ένα ασθενώς συμμετρικό κανάλι, τα αθροίσματα των στοιχείων κάθε στήλης ισούνται. Έστω ότι $\sum_{i\in\mathcal{X}} p_{i,j} = c$ για κάθε $j = 1, \ldots, |\mathcal{Y}|$. Επομένως, $\sum_{i\in\mathcal{X}}\sum_{j\in\mathcal{Y}} p_{i,j} = c|\mathcal{Y}|$. Επίσης, το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής ισούται με 1. Συνεπώς, $\sum_{i\in\mathcal{X}}\sum_{j\in\mathcal{Y}} p_{i,j} = |\mathcal{X}|$.

Επομένως,

$$|\mathcal{X}| = c|\mathcal{Y}| \Rightarrow c = \frac{|\mathcal{X}|}{|\mathcal{Y}|}.$$

(β) Στη συνέχεια της άσκησης θεωρούμε *ασθενώς συμμετρικά* κανάλια με 2 εισόδους και 3 εξόδους. Δείξτε ότι

i. Υπάρχει *τουλάχιστον* μία στήλη του πίνακα μετάβασης της οποίας και τα δύο στοιχεία ισούνται με $\frac{1}{3}$.

ii. Μπορούμε να εκφράσουμε τον πίνακα μετάβασης οποιουδήποτε ασθενώς συμμετρικού καναλιού με $|\mathcal{X}| = 2$ και $|\mathcal{Y}| = 3$ συναρτήσει μίας παραμέτρου $0 \leq q \leq 1$ (εάν επιτρέπεται να αλλάξουμε την αρίθμηση των εξόδων και, επομένως, να ανταλλάξουμε στήλες του πίνακα μετάβασης, εφόσον το επιθυμούμε).

Επίσης, δώστε την έκφραση για τον πίνακα μετάβασης. Μπορείτε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσετε ότι η στήλη της οποίας και τα δύο στοιχεία ισούνται με $\frac{1}{3}$ είναι η πρώτη.

Υπόδειξη: Η κάθε γραμμή έχει 3 στοιχεία, αλλά χρειαζόμαστε 2 παραμέτρους για να τα περιγράψουμε (γιατί;). Οπότε, συνολικά, χρειαζόμαστε 4 παραμέτρους για να περιγράψουμε τα στοιχεία του πίνακα. Ωστόσο, υπάρχουν 2 επιπλέον περιορισμοί. Η πρώτη γραμμή να είναι αναδιάταξη της δεύτερης (άρα μειώνουμε την περιγραφή κατά 2 παραμέτρους) και, επίσης, το άθροισμα των στοιχείων σε κάθε στήλη να είναι σταθερό. Επίσης, χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του Ερωτήματος (α).

Απάντηση:

Κατ' αρχάς, από το Ερώτημα (α), το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης ισούται με $\frac{2}{3}$. Έστω ότι η πρώτη γραμμή του πίνακα είναι η

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & 1-p_1-p_2 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, το πρώτο στοιχείο της δεύτερης γραμμής πρέπει να ισούται με $\frac{2}{3} - p_1$. Υπάρχουν 3 επιλογές για το πρώτο στοιχείο της δεύτερης γραμμής.

▷ $\frac{2}{3} - p_1 = p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{3}$. Σε αυτήν την περίπτωση ο πίνακας μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & p_2 & \frac{2}{3} - p_2 \\ \frac{1}{3} & p_{2,2} & \frac{2}{3} - p_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Διακρίνουμε, τώρα, δύο υποπεριπτώσεις. $p_{2,2} = p_2$, οπότε ο πίνακας είναι ο

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

ή $p_{2,2} = \frac{2}{3} - p_2$ οπότε προκύπτει ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & p_2 & \frac{2}{3} - p_2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - p_2 & p_2 \end{bmatrix}. = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3}q & \frac{2}{3}(1-q) \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}(1-q) & \frac{2}{3}q \end{bmatrix}, \; 0 \leq q \leq 1.$$

▷ $\frac{2}{3} - p_1 = p_2$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο πίνακας παίρνει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} p_1 & \frac{2}{3} - p_1 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} - p_1 & p_1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}. = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}q & \frac{2}{3}(1-q) & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}(1-q) & \frac{2}{3}q & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \; 0 \leq q \leq 1.$$

▷ $\frac{2}{3}-p_1=1-p_1-p_2 \Rightarrow p_2=\frac{1}{3}$. Η περίπτωση αυτή είναι ίδια με την πρώτη με τη διαφορά ότι, αν ο πίνακας δεν είναι ο $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, η στήλη της οποίας και τα δύο στοιχεία ισούνται με $\frac{1}{3}$ είναι η δεύτερη.

Επομένως, ο πίνακας μετάβασης οποιουδήποτε ασθενώς συμμετρικού καναλιού με 2 εισόδους και 3 εξόδους μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3}q & \frac{2}{3}(1-q) \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}(1-q) & \frac{2}{3}q \end{bmatrix},\ 0 \le q \le 1.$$

Παρεμπιπτόντως, το κανάλι αυτό είναι ειδική περίπτωση του BSEC (Binary Symmetric Erasure Channel). Συγκεκριμένα, είναι το BSEC με πιθανότητα διαγραφής $\alpha=\frac{1}{3}$. Το BSEC είχε μελετηθεί στην Εξέταση Ιουνίου 2010 των Προχωρημένων Θεμάτων Θεωρίας Πληροφορίας.

<u>Εναλλακτική, πιο απλή απόδειξη για το i. (από τον Οδυσσέα Ζησιμόπουλο):</u>

Εάν η στήλη j έχει τα ίδια στοιχεία έστω a και στις δύο γραμμές, τότε $2a=\frac{2}{3} \Rightarrow a=\frac{1}{3}$. Αν η στήλη j έχει διαφορετικά στοιχεία σε κάθε γραμμή έστω b και c, τότε $b+c=\frac{2}{3} \Rightarrow a=1-b-c=\frac{1}{3}$. Τα στοιχείο της άλλης γραμμής στη στήλη όπου βρίσκεται το $a=\frac{1}{3}$ πρέπει να ισούται με $\frac{2}{3}-a=\frac{1}{3}=a$. Επομένως, υπάρχει τουλάχιστον μία στήλη του πίνακα μετάβασης της οποίας και τα δύο στοιχεία ισούνται με $\frac{1}{3}$.

(γ) Εξηγήστε, κατ' αρχάς, γιατί η αλλαγή αρίθμησης των εξόδων ενός καναλιού (ή, ισοδύναμα, η ανταλλαγή στηλών του πίνακα μετάβασής του) δεν επηρεάζει την τιμή της χωρητικότητάς του. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η στήλη του πίνακα μετάβασης της οποίας και τα δύο στοιχεία ισούνται με $\frac{1}{3}$ είναι η πρώτη.

Χρησιμοποιώντας τη γενική μορφή του πίνακα μετάβασης που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα βρείτε ποια είναι η μέγιστη χωρητικότητα ενός ασθενώς συμμετρικού καναλιού χωρίς μνήμη με 2 εισόδους και 3 εξόδους. Δώστε τον πίνακα (ή τους πίνακες) μετάβασης των καναλιών με μέγιστη χωρητικότητα, καθώς και μία κατανομή με την οποία επιτυγχάνεται η χωρητικότητα.

Συγκρίνετε την τιμή που βρήκατε για τη μέγιστη χωρητικότητα με τη μέγιστη χωρητικότητα, C_{max}, ενός καναλιού 2 εισόδων και 3 εξόδων (όχι, απαραιτήτως, συμμετρικού ή ασθενώς συμμετρικού). Δηλαδή

$$C_{\text{max}} = \max\{C_s : s \in \mathcal{S}\},$$

όπου C_s είναι η χωρητικότητα του καναλιού s και $\mathcal{S}$ είναι το σύνολο *όλων* των διακριτών καναλιών χωρίς μνήμη 2 εισόδων και 3 εξόδων.

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι η χωρητικότητα ενός ασθενώς συμμετρικού διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη ισούται με $\log|\mathcal{Y}| - H(\mathbf{r})$, όπου **r** μια οποιαδήποτε γραμμή του πίνακα. Συνεπώς, $C=\log_2 3 - H([1/3, 2q/3, 2(1-q)/3])$.

Από το θεώρημα διαχωρισιμότητας της εντροπίας,

$$([1/3, 2q/3, 2(1-q)/3]) = (1/3) + \frac{2}{3}H(q).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}C &= \log_2 3 - H([1/3, 2q/3, 2(1-q)/3]) \\ &= \log_2 3 - \frac{1}{3}\log_2 3 - \frac{2}{3}\log_2 \frac{3}{2} - \frac{2}{3}H(q) \\ &= \log_2 3 - \frac{1}{3}\log_2 3 - \frac{2}{3}\log_2 3 + \frac{2}{3}\log_2 2 - \frac{2}{3}H(q) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2}{3}H(q) = \frac{2}{3}\left(1 - H(q)\right).\end{aligned}$$

Επομένως, η χωρητικότητα μεγιστοποιείται όταν $H(q) = 0$, όταν, δηλαδή, $q = 0$ ή $q = 1$. Οι πίνακες μετάβασης είναι οι

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix},\ 0 \le q \le 1.$$

και

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix},\ 0 \le q \le 1.$$

Στην ουσία πρόκειται για το ίδιο κανάλι με ανταλλαγή γραμμών. Είναι το συμμετρικό BEC (Binary Erasure Channel), δηλαδή το BEC με πιθανότητα διαγραφής $\alpha = \frac{1}{3}$.

Επειδή το κανάλι είναι ασθενώς συμμετρικό, μία κατανομή που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα είναι η ομοιόμορφη: $p_X^* = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι αν επιβάλουμε τον περιορισμό ένα κανάλι 2 εισόδων και 3 εξόδων να είναι ασθενώς συμμετρικό, η χωρητικότητά του δεν μπορεί να υπερβεί τα $\frac{2}{3}$ bits. Στην περίπτωση ενός γενικού καναλιού 2 εισόδων και 3 εξόδων, $C \le \log_2 |\mathcal{X}|$. Επομένως, $C \le 1$ bit.

Η τιμή $C = 1$ είναι επιτεύξιμη. Για παράδειγμα, θεωρήστε το κανάλι με πίνακα μετάβασης

$$\begin{bmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ 0 \le p \le 1.$$

Προφανώς, το κανάλι δεν είναι ασθενώς συμμετρικό. Ωστόσο, παρατηρήστε ότι η χωρητικότητα επιτυγχάνεται με ομοιόμορφη κατανομή εισόδου.

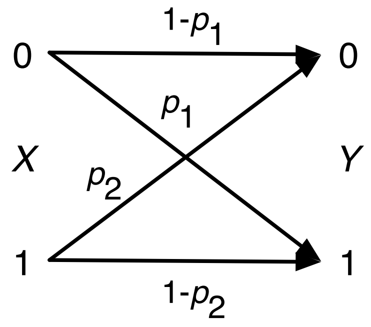
18. **To be or not to be (symmetric)? (Τελική Εξέταση Θ. Π., Ιανουάριος 2013)**

    Σημείωση: Αρχικά η άσκηση είχε περισσότερα ερωτήματα, αλλά αφαιρέθηκαν γιατί υπήρχε κάποιο λάθος και οι πράξεις ήταν χρονοβόρες.

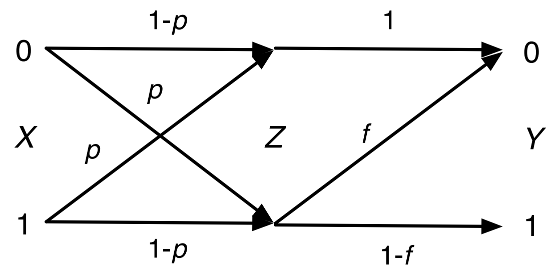
    Σε αυτή την άσκηση θα ασχοληθούμε με το εξής ερώτημα. Εάν θεωρήσουμε ένα δυαδικό κανάλι, θέλουμε να είναι συμμετρικό ή, αντιθέτως, θέλουμε να είναι (εντόνως) μη συμμετρικό;

    Έστω το *μη συμμετρικό* δυαδικό κανάλι του Σχήματος 30.

    Μπορεί να αποδειχτεί (το έκαναν συνάδελφοί σας σε διαγώνισμα πριν από κάποια χρόνια), ότι ένα μη συμμετρικό δυαδικό κανάλι μπορεί να γραφτεί ως διαδοχή ενός συμμετρικού δυαδικού καναλιού και ενός καναλιού Z, όπως φαίνεται στο Σχήμα 31.



Σχήμα 30: Μη συμμετρικό δυαδικό κανάλι.



Σχήμα 31: Μη συμμετρικό δυαδικό κανάλι ως διαδοχή συμμετρικού δυαδικού καναλιού και καναλιού Z.

Εάν υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $p_1 \leq p_2 \leq \frac{1}{2}$, αποδεικνύεται ότι

$$f = p_2 - p_1 \text{ και } p = \frac{p_1}{1 + p_1 - p_2}.$$

Επίσης, αποδεικνύεται αυστηρώς αυτό που περιμένουμε διασθητικά, ότι, δηλαδή, η χωρητικότητα του καναλιού που αποτελείται από διαδοχή των δύο καναλιών δεν μπορεί να υπερβαίνει τη χωρητικότητα οποιουδήποτε από τα επί μέρους κανάλια. Επομένως, η χωρητικότητα του μη συμμετρικού δυαδικού καναλιού δεν μπορεί να υπερβαίνει τη χωρητικότητα του συμμετρικού δυαδικού καναλιού με παράμετρο p.

Έστω ότι ξεκινάμε με $p_1 = p_2$. Στη συνέχεια, αρχίζουμε και αυξάνουμε το p_2 ώστε να καταστήσουμε το κανάλι μη συμμετρικό. Πώς επηρεάζεται η χωρητικότητά του; Με βάση το αποτέλεσμα, για δεδομένο p_1, προτιμάτε συμμετρικό ή μη συμμετρικό δυαδικό κανάλι;

Υπόδειξη: Εκφράστε το p συναρτήσει της παραμέτρου f και παρατηρήστε ότι η f παίρνει τιμές από 0 έως $\frac{1}{2} - p_1$.

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι η χωρητικότητα του δυαδικού *συμμετρικού* καναλιού ισούται με $1 - H(p)$. Επομένως, για το μη συμμετρικό δυαδικό κανάλι ισχύει

$$C \leq 1 - H(p).$$

Μάλιστα, για $p_2 \neq p_1$ ισχύει $C < 1 - H(p)$.

$p = \frac{p_1}{1+p_1-p_2} = \frac{p_1}{1-f}$. Επομένως, για δεδομένο p_1, καθώς η f αυξάνει από 0 σε $\frac{1}{2} - p_1$, το p αυξάνει από $p_1 \leq \frac{1}{2}$ σε $\frac{p_1}{\frac{1}{2}+p_1}$.

Επίσης, το p δεν υπερβαίνει το $\frac{1}{2}$ γιατί τότε θα έπρεπε να ισχύει $\frac{p_1}{p_1+\frac{1}{2}} > \frac{1}{2} \Rightarrow p_1 > \frac{1}{2}$.

Συνεπώς, η $H(p)$ αυξάνει και η $1 - H(p)$ ελαττώνεται. Άρα, ελαττώνεται και η χωρητικότητα του μη συμμετρικού δυαδικού καναλιού.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, στην περίπτωση δυαδικού καναλιού, για δεδομένη p_1 η συμμετρία είναι προτιμότερη από την έλλειψη συμμετρίας. Φυσικά, ένα μη συμμετρικό κανάλι με μικρότερη p'_1 και p'_2 ενδέχεται να είναι καλύτερο (όπως, άλλωστε, και ένα μη συμμετρικό κανάλι διαγραφής με μικρότερα α' και β').

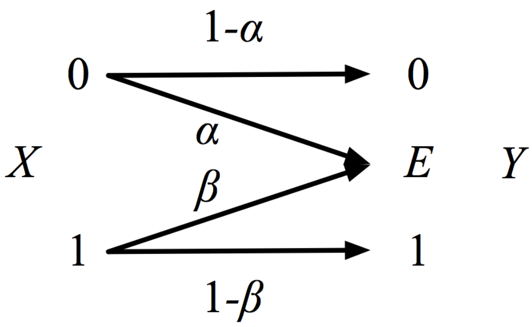
19. **Χωρητικότητα καναλιών (Π. Θ. Θ. Π., Ιούνιος 2013)**

Στην άσκηση αυτή ζητείται να συγκρίνετε χωρητικότητες καναλιών και να υπολογίσετε φράγματα.

Υπόδειξη: Τα δύο ερωτήματα είναι (σχετικά) ανεξάρτητα μεταξύ τους.

(α) Θεωρήστε το κανάλι διαγραφής του Σχήματος 32 με *μη* συμμετρικές πιθανότητες διαγραφής.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι $\beta \geq \alpha$.



Σχήμα 32: Δυαδικό κανάλι με μη συμμετρικές πιθανότητες διαγραφής.

Δείξτε ότι η χωρητικότητα του καναλιού, έστω $C(\alpha, \beta)$, ικανοποιεί τη σχέση

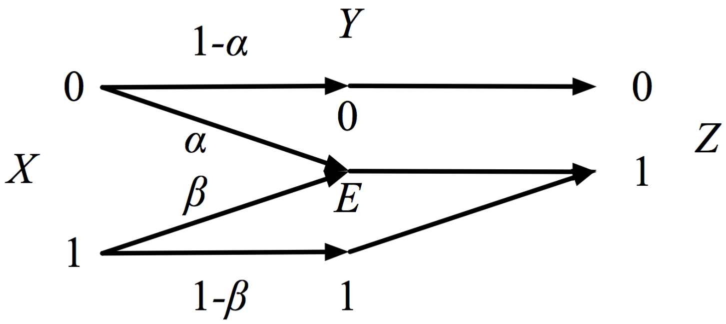
$$C_Z(\alpha) \leq C(\alpha, \beta) \leq 1 - \alpha,$$

όπου $C_Z(\alpha)$ η χωρητικότητα του καναλιού Z με πιθανότητα αναστροφής συμβόλου α.

Υπόδειξη: Δημιουργήστε κάποια ‘‘ενδιάμεσα’’ κανάλια και χρησιμοποιήστε την Ανισότητα Επεξεργασίας Δεδομένων.

Απάντηση:

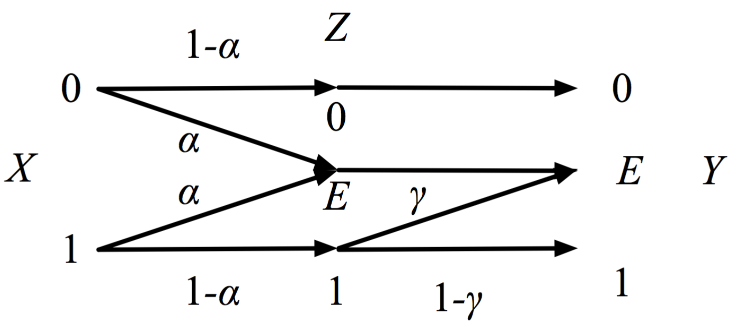
Όπως φαίνεται στο Σχήμα 33, το κανάλι Z μπορεί να γραφτεί ως διαδοχή δύο καναλιών, το πρώτο από τα οποία είναι το δυαδικό κανάλι με μη συμμετρικές πιθανότητες διαγραφής. Παρατηρούμε ότι $X \to Y \to Z$, επειδή η έξοδος κάθε καναλιού δεδομένης της εισόδου του δεν εξαρτάται από άλλες εισόδους. Από την ανισότητα



Σχήμα 33: Κανάλι Z ως διαδοχή δύο καναλιών.

επεξεργασίας δεδομένων γνωρίζουμε ότι, αν $X \to Y \to Z$, $I(X;Z) \le I(X;Y)$. Επομένως, max $I(X;Y) \ge$ max $I(X;Z)$ και $C(\alpha,\beta) \ge C_Z(\alpha)$.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι το κανάλι διαγραφής μπορεί να γραφτεί ως διαδοχή δύο καναλιών, το πρώτο από τα οποία είναι το κανάλι διαγραφής (BEC) με παράμετρο α (Σχήμα 34). Στο δεύτερο κανάλι $\gamma = \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}$.



Σχήμα 34: Δυαδικό κανάλι με μη συμμετρικές πιθανότητες διαγραφής ως διαδοχη δύο καναλιών.

Από την ανισότητα επεξεργασίας δεδομένων, $I(X;Y) \le I(X;Z)$. Επομένως, max $I(X;Y) \le$ max $I(X;Z)$ και $C(\alpha,\beta) \le C_{BEC}(\alpha) = 1-\alpha$.

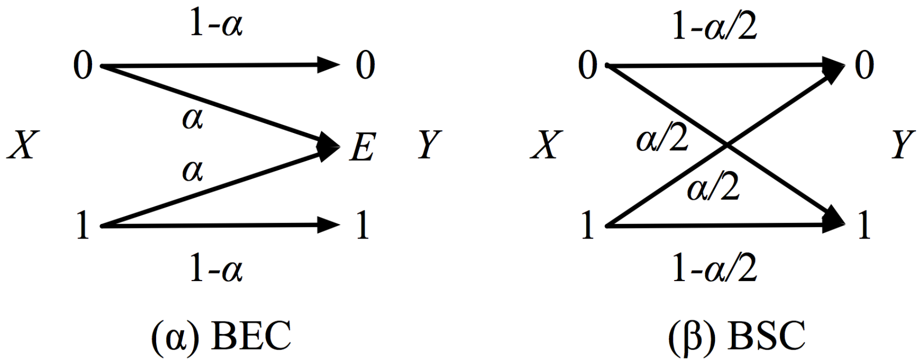
(β) Θεωρήστε το δυαδικό κανάλι διαγραφής με συμμετρικές πιθανότητες διαγραφής (BEC) του Σχήματος 35(α). Ζητείται να αποδείξετε ότι

$$C_{BEC}(\alpha) \ge C_{BSC}(\alpha/2)$$

για όλες τις τιμές της παραμέτρου $0 \le \alpha \le 1$, όπου $C_{BSC}(\alpha/2)$ είναι η χωρητικότητα του δυαδικού συμμετρικού καναλιού του Σχήματος 35(β) (BSC) με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου ίση με $\alpha/2$.

Πότε ισχύει η ισότητα;

Παρατηρήστε ότι, παρόλο που στο BEC γνωρίζουμε πότε έχει συμβεί διαγραφή, στο BSC τα σύμβολα μεταδίδονται αυτούσια με μεγαλύτερη πιθανότητα, οπότε δεν είναι προφανές ότι $C_{BEC}(\alpha) \ge C_{BSC}(\alpha/2)$.

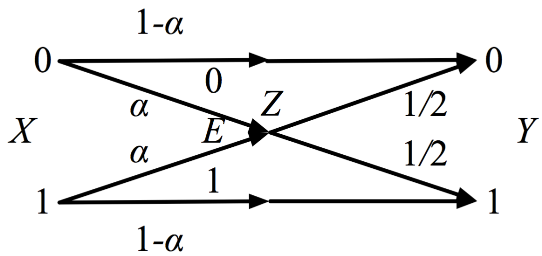


Σχήμα 35: BEC και BSC με $f = \alpha/2$.

Υπόδειξη: Για να αποφύγετε πράξεις, εκφράστε το BSC ως διαδοχή του BEC του Σχήματος 35(α) και ενός δεύτερου καναλιού χωρίς μνήμη με κατάλληλες παραμέτρους. Στη συνέχεια, χρησιμοποιήστε την Ανισότητα Επεξεργασίας Δεδομένων.

Απάντηση:

Μπορούμε να εκφράσουμε το BSC ως διαδοχή δύο καναλιών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 36.



Σχήμα 36: BSC ως διαδοχή δύο καναλιών.

Παρατηρούμε ότι $X \to Z \to Y$, επειδή η έξοδος κάθε καναλιού δεδομένης της εισόδου του δεν εξαρτάται από άλλες εισόδους. Από την ανισότητα επεξεργασίας δεδομένων γνωρίζουμε ότι, αν $X \to Z \to Y$, $I(X;Y) \leq I(X;Z)$. Επομένως, max $I(X;Y) \leq$ max $I(X;Z)$ και $C_{BSC}(\alpha) \leq C_{BEC}(\alpha/2)$.

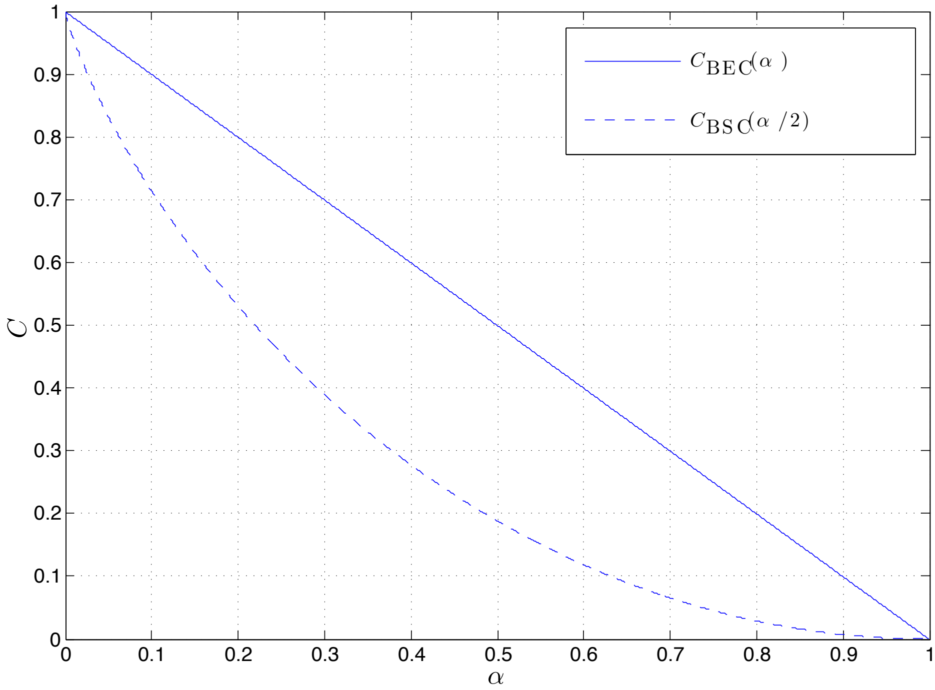
Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha = 0$ (οπότε $Z = Y$) και όταν $\alpha = 1$ (οπότε $0 \leq I(X;Y) \leq I(X;Z) = 0$).

Οι $C_{BEC}(\alpha)$ και $C_{BSC}(\alpha/2)$ έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα 37.

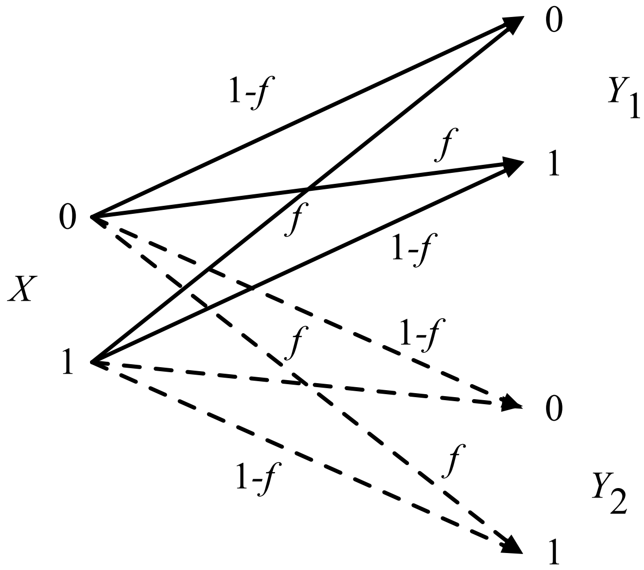
20. **Δύο συμμετρικά κανάλια (Τελική Εξέταση Θ. Π., Φεβρουάριος 2014)**

Θεωρούμε ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη με μία είσοδο και δύο εξόδους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 38.

Ο πομπός έχει στη διάθεσή του δύο σύμβολα, έστω $X = 0$ και $X = 1$ και συνδέεται με κάθε δέκτη μέσω δυαδικού συμμετρικού καναλιού (BSC) με παράμετρο $f \leq \frac{1}{2}$. Θεωρούμε, επίσης, ότι Y_1 και $Y_2 \in \mathcal{Y} = \{0, 1\}$. Παρόλο που τα δύο BSC έχουν την ίδια πα-



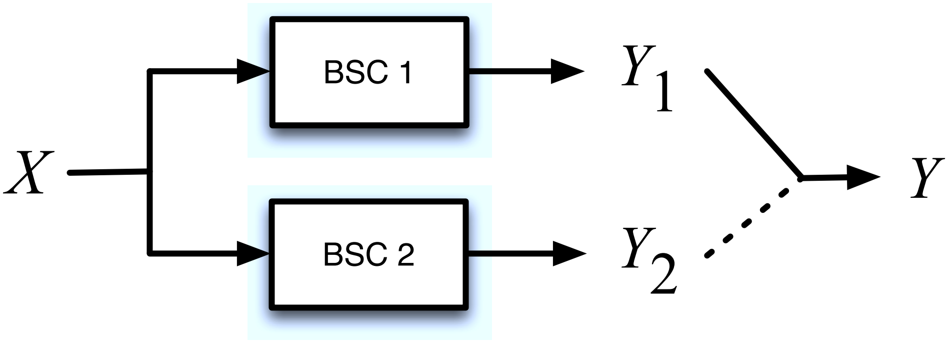
Σχήμα 37: Σύγκριση $C_{BEC}(\alpha)$ και $C_{BSC}(\alpha/2)$.



Σχήμα 38: Δύο ανεξάρτητα BSC με κοινή είσοδο.

ράμετρο αντιστροφής ψηφίου, f, είναι μεταξύ τους *ανεξάρτητα*, δηλαδή $p(y_1, y_2|x) = p(y_1|x) \cdot p(y_2|x)$.

(α) Έστω ότι στο τέλος κάθε χρονικής στιγμής, n, μπορούμε να κοιτάζουμε την έξοδο *μόνο* ενός καναλιού (όποιου θέλουμε εμείς), όπως φαίνεται στο Σχήμα 39. Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης, έστω C_1, που μπορούμε να επιτύχουμε; Ποια είναι η κατανομή εισόδου που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;

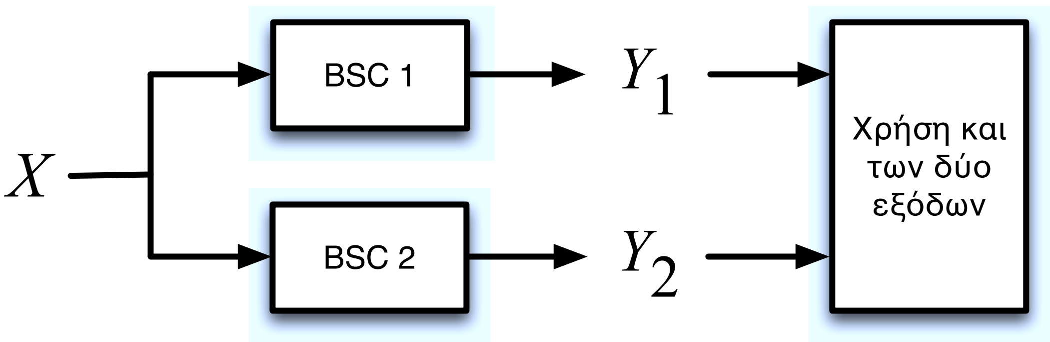


Σχήμα 39: Επιλογή μίας από τις δύο εξόδους.

Απάντηση:

Όποιο κανάλι και αν επιλέξουμε, δεν μπορούμε να μεταδώσουμε με ρυθμό μεγαλύτερο από τη χωρητικότητα. Επομένως, μπορούμε να μεταδώσουμε με $C_1 = 1 - H_b(f)$. Πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ομοιόμορφη κατανομή εισόδου (Bern$(1/2)$).

(β) Έστω, τώρα, ότι μπορούμε να παρατηρούμε και τις δύο εξόδους, Y_1 και Y_2. Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης, έστω C_2, που μπορούμε να επιτύχουμε; Ποια είναι η κατανομή εισόδου που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;



Σχήμα 40: Χρήση και των δύο εξόδων.

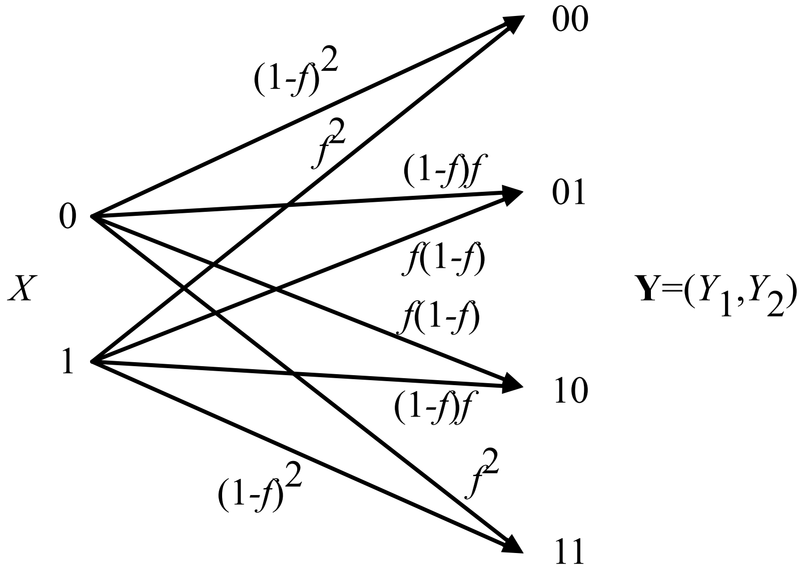
Υπόδειξη: Μεγιστοποιήστε την $I(X; Y_1, Y_2)$. Η επίλυση απλοποιείται αν χρησιμοποιήσετε κάποια συμμετρία που υπάρχει στο πρόβλημα. Επίσης, ενδέχεται να σας βοηθήσει η χρήση της Αρχής Διαχωρισιμότητας της Εντροπίας και η χρήση της παραμέτρου $g \triangleq f(1-f)$.

Προσοχή! Οι Y_1 και Y_2 *δεν* είναι ανεξάρτητες (εκτός αν $f = 1/2$). Είναι ανεξάρτητες *δεδομένης* της εισόδου, X.

Απάντηση:

Θεωρούμε ένα κανάλι μίας εισόδου και μίας εξόδου με δυαδικό αλφάβητο εισόδου και τετραδικό αλφάβητο εξόδου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 41.

$$\begin{aligned} H(\mathbf{Y}|X) &= H(Y_1, Y_2|X) \stackrel{(a)}{=} H(Y_1, Y_2|X=0) = H(Y_1, Y_2|X=1) \\ &= H((1-f)^2, f(1-f), f(1-f), f^2). \end{aligned}$$



Σχήμα 41: Ισοδύναμο κανάλι μίας εισόδου και μίας (τετραδικής) εξόδου.

(a) Το κανάλι παρουσιάζει συμμετρία ως προς τις εισόδους (παρόλο που δεν είναι συμμετρικό).

Από την Αρχή Διαχωρισιμότητας της Εντροπίας, αν χωρίσουμε τα ενδεχόμενα εξόδου σε δύο σύνολα $\{(0,0),(0,1)\}$ με συνολική πιθανότητα $(1-f)$ (όταν $X=0$) και $\{(1,0),(1,1)\}$ με συνολική πιθανότητα f (όταν $X=0$),

$$H(Y_1,Y_2|X=0) = H_b(f) + fH_b(f) + (1-f)H_b(f) = 2H_b(f).$$

Ακόμα πιο απλά, λόγω της ανεξαρτησίας των εξόδων των καναλιών (δεδομένης της εισόδου, X),

$$H(Y_1,Y_2|X) = H(Y_1|X) + H(Y_2|X) = 2H_b(f).$$

Από το Σχήμα 41 παρατηρούμε ότι, παρόλο που το κανάλι από το X στο **Y** δεν είναι συμμετρικό στη γενική περίπτωση (γιατί;), η αμοιβαία πληροφορία μεγιστοποιείται με χρήση της ομοιόμορφης κατανομής, επειδή οι δύο είσοδοι $X=0$ και $X=1$ οδηγούν ακριβώς στην ίδια στατιστική συμπεριφορά της εξόδου. Δηλαδή, αν αντιστρέψουμε τις ονομασίες των εισόδων και των εξόδων το κανάλι παραμένει το ίδιο. Συνεπώς,

$$H(\mathbf{Y}) = H(1/2-g, g, g, 1/2-g),$$

όπου $g = f(1-f)$. Από την Αρχή Διαχωρισιμότητας της Εντροπίας,

$$H(1/2-g,g,g,1/2-g) = H_b(1/2) + H_b(2g) = 1 + H_b(2f(1-f)).$$

Επομένως,

$$C_2 = \max_{p(x)} I(X;Y_1,Y_2) = 1 + H_b(2f(1-f)) - 2H_b(f).$$

Εναλλακτική λύση (από Φ. Οικονόμου):

Από τον κανόνα αλυσίδας, $H(Y_1, Y_2) = H(Y_1) + H(Y_2|Y_1)$.

Παρατηρούμε, κατ' αρχάς, ότι, για $X \sim$ Bern$(1/2)$, $Y_1 \sim$ Bern$(1/2)$ και $Y_2 \sim$ Bern$(1/2)$.

Επίσης, $p_{Y_2|Y_1} = p(y_2|y_1) = \frac{p_{Y_1Y_2}(y_1,y_2)}{p_{Y_1}(y_1)} = 2p_{Y_1Y_2}(y_1, y_2)$. Συνεπώς, $p(0|0) = 1 - 2g = p(1|1)$ και $p(1|0) = p(0|1) = 2g$, δηλαδή η $Y_2|Y_1$ ακολουθεί κατανομή Bern$(2g)$. Επομένως,

$$H(Y_1, Y_2) = 1 + H_b(2g) = 1 + H_b(2f(1 - f)).$$

Παρατηρήστε ότι, όπως αναφέρθηκε στην εκφώνηση, οι Y_1 και Y_2 δεν είναι ανεξάρτητες. Αν ήταν ανεξάρτητες θα είχαμε $Y_2|Y_1 \sim$Bern$(1/2)$, όπως, δηλαδή και η Y_2. Όταν $f = 1/2$, $g = 1/4 \Rightarrow 2g = 1/2$.

(γ) Δείξτε ότι, για $f < \frac{1}{2}, C_2 > C_1$. Δηλαδή, ισχύει αυτό που περιμέναμε διαισθητικά: Χρήση και των δύο εξόδων οδηγεί σε αύξηση της χωρητικότητας.

Απάντηση:

Με πράξεις,

$$\begin{aligned} C_2 &\overset{?}{>} C_1 \Rightarrow \\ 1 + H_b(2f(1 - f)) - 2H_b(f) &\overset{?}{>} 1 - H_b(f) \Rightarrow \\ H_b(2f(1 - f)) &\overset{?}{>} H_b(f). \end{aligned}$$

Για να ισχύει η ανισότητα, αν $2f(1 - f) \leq \frac{1}{2}$, πρέπει $2f(1 - f) > f$, δεδομένου ότι η $H(p)$ είναι αύξουσα για $p \leq \frac{1}{2}$. Για $f < \frac{1}{2}$, $2f(1 - f) < \frac{1}{2}$: $2f(1 - f) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(-4f^2 + 4f - 1\right) = -\frac{1}{2}(2f - 1)^2 < 0$.

Επίσης, $2f(1 - f) - f = f - 2f^2 = f(1 - 2f) > 0$ για $f < 1/2$.

Συνεπώς, $H_b(2f(1 - f)) > H_b(f) \Rightarrow C_2 > C_1$ όταν $f < 1/2$.

Όταν $f = 1/2$, $C_1 = C_2 = 0$, δηλαδή η χρήση δύο καναλιών δε μας βοηθά και είναι αδύνατο να περάσουμε οποιαδήποτε πληροφορία.