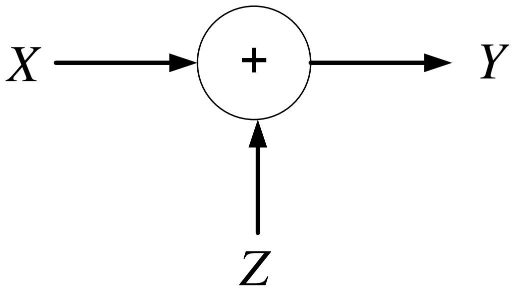
ΕΕ728 (22Α004) - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
2η σειρά ασκήσεων – Ενδεικτικές Λύσεις

1. **Κανάλι Προσθετικού Θορύβου – Cover & Thomas 7.2**

Βρείτε τη χωρητικότητα του διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη του Σχήματος 1.



Σχήμα 1: Διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη.

Δίνεται ότι Pr$\{Z = 0\}$ = Pr$\{Z = \alpha\} = \frac{1}{2}$. Η τ.μ. X παίρνει τιμές στο αλφάβητο $\mathcal{X} = \{0, 1\}$. Υποθέστε ότι η Z είναι ανεξάρτητη της X.

Παρατηρήστε ότι η χωρητικότητα του καναλιού εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου α η οποία μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο $\mathbb{R}$.

Απάντηση:

Διακρίνουμε περιπτώσεις, ανάλογα με την τιμή του α

• $\alpha = 0$: $Y = X$ και, συνεπώς, $H(Y|X) = 0$.
Επομένως, $\max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} H(Y) = \max_{p(x)} H(X) = 1$. Άρα, $C = 1$ bit/μετάδοση.

• $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pm 1$: Η Y μπορεί να πάρει 4 *διακριτές* τιμές $0, 1, \alpha$ και $1 + \alpha$. Εξετάζοντας την τιμή της Y μπορούμε να βρούμε χωρίς σφάλμα την τιμή της X. Επομένως, και πάλι, $H(X|Y) = 0$ και $C = 1$ bit/μετάδοση.

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού είναι παρατηρώντας ότι, για $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pm 1$, το κανάλι είναι ασθενώς συμμετρικό. $C = \log |\mathcal{Y}| - H(1/2, 1/2, 0, 0) = 2 - 1 = 1$ bit.

• $\alpha = 1$: Η Y μπορεί να πάρει 3 διαφορετικές τιμές: $0, 1$ ή 2. Παρατηρούμε ότι το κανάλι είναι ένα Δυαδικό Κανάλι Διαγραφής (Binary Erasure Channel – BEC) με $\alpha = 1/2$. Επομένως, από την έκφραση για τη χωρητικότητα του BEC, $C = 1 - \alpha = 1/2$ bits/μετάδοση.

• $\alpha = -1$: Ομοίως με την περίπτωση $\alpha = 1$, $C = 1/2$ bits/μετάδοση.

2. ►**Ενθόρυβη Γραφομηχανή – Cover & Thomas 7.6 (τροποποιημένη)**

   Θεωρούμε γραφομηχανή με 24 πλήκτρα.

   (α) Εάν κάθε φορά που πατάμε ένα πλήκτρο τυπώνεται το σωστό γράμμα, ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού σε bits;

   Απάντηση:

$$\begin{aligned} C &= \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)}\{H(Y) - H(Y|X)\} \\ &\overset{(a)}{=} \max_{p(x)} H(Y) \overset{(b)}{=} \max_{p(x)} H(X) = \log 24 \text{ bits.} \end{aligned}$$

   $(a)\ Y = X \Rightarrow H(Y|X) = 0$. $(b)\ Y = X \Rightarrow H(Y) = H(X)$.

   Η χωρητικότητα επιτυγχάνεται με χρήση ομοιόμορφης κατανομής εισόδου.

   (β) Υποθέστε, τώρα, ότι κάθε φορά που πατάμε ένα πλήκτρο τυπώνεται το σωστό γράμμα ή το επόμενό του στο αλφάβητο (με την ίδια πιθανότητα). Δηλαδή, $A \to A$ ή $A \to B$, $B \to B$ ή $B \to \Gamma$, ..., $\Omega \to \Omega$ ή $\Omega \to A$. Ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού;

   Απάντηση:

$$\begin{aligned} C &= \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)}\{H(Y) - H(Y|X)\} \\ &\overset{(a)}{=} \max_{p(x)} H(Y) - \log 2 \overset{(b)}{=} \log 24 - \log 2 = \log 12 \text{ bits.} \end{aligned}$$

   (a) Για δεδομένο , η Y παίρνει μία από 2 τιμές με την ίδια πιθανότητα $\Rightarrow H(Y|X) = 1$ bit. (b) Το κανάλι είναι συμμετρικό, επομένως μια κατανομή εισόδου που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα είναι η ομοιόμορφη. Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει και με πράξεις.

   Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, μια κατανομή που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα είναι η ομοιόμορφη.

   (γ) Για το κανάλι του Ερωτήματος (β), εάν κωδικοποιούμε κάθε σύμβολο που θέλουμε να στείλουμε στο κανάλι ξεχωριστά, ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορείτε να επιτύχετε για μετάδοση με (ακριβώς) μηδενική πιθανότητα σφάλματος;

   Απάντηση:

   Έστω ότι χρησιμοποιούμε μόνο τα γράμματα A, Γ, E, H, ..., Ψ. Κοιτώντας το σύμβολο που λαμβάνεται στην έξοδο, μπορούμε να προσδιορίσουμε το σύμβολο που μεταδόθηκε με μηδενική πιθανότητα σφάλματος. Επίσης, προκύπτει εύκολα ότι, για ομοιόμορφη κατανομή εισόδου (στο σύνολο $\{A, \Gamma, E, H, \ldots, \Psi\}$), $H(Y) = H(X) = \log 12$ bits. Συνεπώς,

   $C = \max_{p(x)}\{H(Y) - H(Y|X)\} = \max_{p(x)} H(Y) = \log 12$ bits.

   Στην περίπτωση ενθόρυβης γραφομηχανής με 24 πλήκτρα, μπορούμε να μεταδώσουμε με ρυθμό ίσο με τη χωρητικότητα και με πιθανότητα σφάλματος *ακριβώς* ίση με το 0. Στη γενική περίπτωση, δεν είναι δυνατόν να μεταδώσουμε σε ένα κανάλι με μηδενική πιθανότητα σφάλματος, αλλά με πιθανότητα σφάλματος αυθαίρετα κοντά στο 0.

(δ) Επαναλάβετε τα Ερωτήματα (α)-(γ) για γραφομηχανή με 25 πλήκτρα.

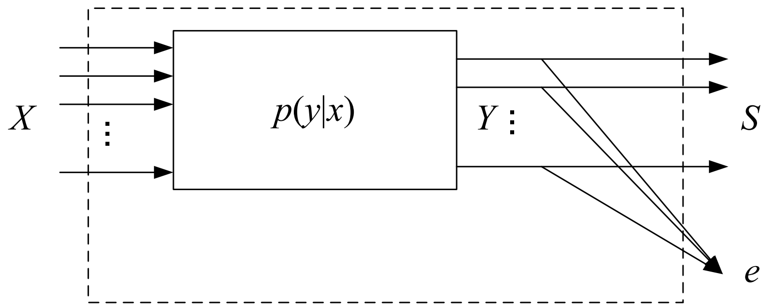
Απάντηση:

Τα Ερωτήματα (α) και (β) λύνονται με τον ίδιο τρόπο όπως και για την περίπτωση γραφομηχανής με 24 πλήκτρα. Η χωρητικότητα του καναλιού είναι log 25 bits και log $\frac{25}{2}$ bits, αντιστοίχως.

Για το Ερώτημα (γ), δεδομένου ότι κάθε μήνυμα πρέπει να κωδικοποιηθεί αυτόνομα, χρειαζόμαστε ακέραιο αριθμό μηνυμάτων. Προκειμένου να επιτύχουμε μηδενικό σφάλμα αποκωδικοποίησης στο δέκτη, ο μέγιστος αριθμός συμβόλων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι 12. Επομένως, ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης ισούται με log 12 bits/χρήση καναλιού και είναι μικρότερος από τη χωρητικότητα.

3. **Κανάλι διαγραφής – Cover & Thomas 7.27**

Έστω $\{\mathcal{X}, p(y|x), \mathcal{Y}\}$ ένα διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη με χωρητικότητα C. Υποθέστε ότι στην έξοδο του καναλιού συνδέεται ένα κανάλι διαγραφής $\{\mathcal{Y}, p(s|y), \mathcal{S}\}$ το οποίο διαγράφει την έξοδο του πρώτου καναλιού με πιθανότητα α, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Κανάλι για το Πρόβλημα 7.27 των Cover & Thomas.

Συγκεκριμένα, $\mathcal{S} = \{y_1, y_2, \ldots, y_m, e\}$, και

$$\begin{aligned} &\Pr\{S = y|X = x\} = \bar{\alpha} p(y|x), \;\; y \in \mathcal{Y}, \\ &\Pr\{S = e|X = x\} = \alpha. \end{aligned}$$

Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού από το X στο S.

Απάντηση:

Ένας γρήγορος τρόπος για να λυθεί το πρόβλημα είναι με χρήση της αρχής διαχωρισιμότητας της εντροπίας. Έστω τ.μ. E που υποδηλώνει εάν έχει γίνει διαγραφή. $H(S) = H(S) + H(E|S) = H(S, E) = H(E) + H(S|E) \Rightarrow H(S) = H(E) + \Pr\{E \neq e\}H(S|E \neq e) = H(\alpha) + (1-\alpha)H(Y)$.

Ομοίως, $H(S|X) = H(S|X) + H(E|S, X) = H(S, E|X) = H(E|X) + H(S|E, X) \Rightarrow H(S|X) = H(E) + \Pr\{E \neq e\}H(S|X, E \neq e) = H(\alpha) + (1-\alpha)H(Y|X)$.

Επομένως,

$$\begin{aligned}C' = \max I(X;S) &= \max\{(1-\alpha)H(Y)-(1-\alpha)H(Y|X)\}\\ &= (1-\alpha)\max\{H(Y)-H(Y|X)\} = (1-\alpha)C.\end{aligned}$$

Εναλλακτική λύση

$$\begin{aligned}I(X;S) &= H(S)-H(S|X)\\ &\overset{(a)}{=} H(E)+H(S|E)-H(E|X)+H(S|E,X)\\ &= H(E)-H(E|X)+H(S|E)-H(S|E,X)\\ &= I(E;X)+I(S;X|E)\\ &\overset{(b)}{=} I(S;X|E)\\ &= \mathrm{Pr}\{E=e\}I(S;X|E=e)+\mathrm{Pr}\{E\neq e\}I(S;X|E\neq e)\\ &\overset{(c)}{=} (1-\alpha)I(S;X|E\neq e)\\ &\overset{(d)}{=} (1-\alpha)I(Y;X).\end{aligned}$$

(a) εφαρμογή αρχής διαχωρισιμότητας εντροπίας για τις $H(S)$ και $H(S|X)$. (b) $I(E;X) = H(E)-H(E|X) = H(E)-H(E) = 0$, επειδή όλες οι πιθανές έξοδοι Y διαγράφονται με την ίδια πιθανότητα. Πιο αυστηρά, $p_{E|X}(e|x) = \sum_y p_{E,Y|X}(e,y|x) = \sum_y p_{Y|X}(y|x)p_{E|X,Y}(e|x,y) \overset{X\to Y\to E}{=} \sum_y p_{Y|X}(y|x)p_{E|Y}(e|y) = \sum_y p_{Y|X}(y|x)\cdot\alpha = \alpha$, δηλαδή η $p_{E|X}(e|x)$ ισούται με α ανεξαρτήτως της τιμής, x, της X. (c) $I(S;X|E=e) = 0$ επειδή όταν $E=e$ γνωρίζουμε ότι $S=e$ και, επομένως, η αβεβαιότητά μας για την S είναι 0 (οπότε δεν απομένει πληροφορία που θα μπορούσε να μας παράσχει η X). (d) Όταν $E\neq e$, γνωρίζουμε ότι $S=Y$.

4. ***Τετραδικά Κανάλια διαγραφής (Προχωρημένα Θέματα Θ.Π., Τελική Εξέταση Ιουνίου 2008)**

   Θεωρήστε τα κανάλια διαγραφής χωρίς μνήμη του Σχήματος 3. Στο κανάλι A στέλνουμε ένα από 4 πιθανά σύμβολα. Ο δέκτης γνωρίζει πότε η μετάδοση έχει γίνει σωστά και πότε έχει προκύψει διαγραφή. Στο κανάλι B, όπως και στο κανάλι A, ο πομπός επιλέγει κάθε φορά να μεταδώσει ένα από 4 σύμβολα. Εάν συμβεί διαγραφή ο δέκτης γνωρίζει όχι μόνο ότι συνέβη διαγραφή, αλλά, επιπλέον, το υποσύνολο στο οποίο ανήκει το σύμβολο που μεταδόθηκε από τον πομπό ($\{0,1\}$ ή $\{2,3\}$).

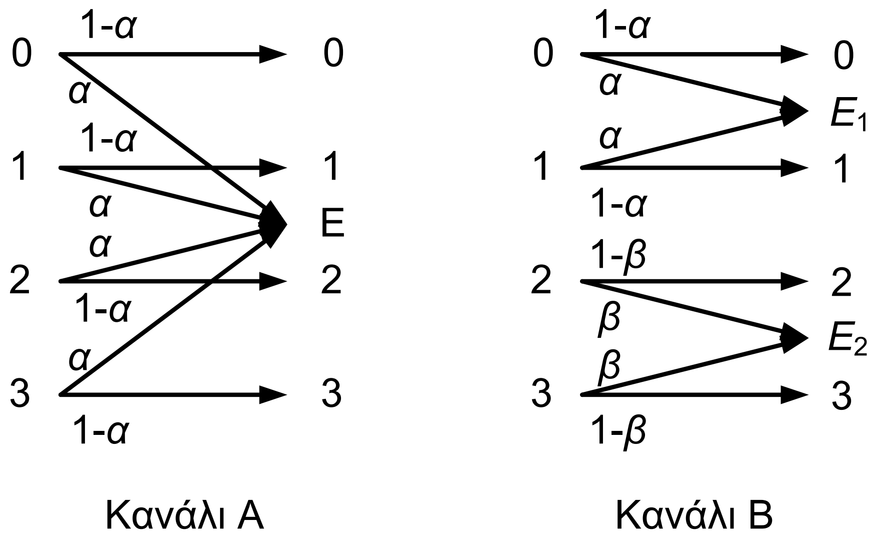
   (α) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού A, και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται.

   Απάντηση:

   Από τον ορισμό της χωρητικότητας,

   $$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)}\{H(Y)-H(Y|X)\} = \max_{p(x)} H(Y) - H(\alpha).$$

   Ανεξάρτητα από την κατανομή της X, $\mathrm{Pr}\{E\} = \alpha$. Προκειμένου να μεγιστοποιήσουμε την εντροπία της Y, επιλέγουμε ομοιόμορφη κατανομή για τα υπόλοιπα



Σχήμα 3: Τετραδικά Κανάλια Διαγραφής

ενδεχόμενα Y και, επομένως, ομοιόμορφη κατανομή για τη X. Συνεπώς,

$$C = \max_{p(x)}\{H(X)-H(X|Y)\} = \log 4-\alpha H(X|Y=E)-(1-\alpha)H(X|Y\neq E) = 2-2\alpha.$$

Η άσκηση μπορούσε, επίσης, να λυθεί υποθέτοντας γενικές τιμές για τις πιθανότητες εισόδου $p(X=i)$ και μεγιστοποιώντας την $C = H(Y)-H(Y|X)$. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή, την οποία χρησιμοποίησαν κάποιοι, ήταν και πιο χρονοβόρα.

Τέλος, μπορείτε να λύσετε την άσκηση χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της Άσκησης 7.27 των Cover & Thomas.

(β) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού B όταν $\alpha = \beta$, και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Συγκρίνετε με την τιμή που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Σχολιάστε.

Απάντηση:

Από το δυαδικό κανάλι διαγραφής γνωρίζουμε ότι η χωρητικότητα επιτυγχάνεται με ομοιόμορφη κατανομή εισόδου. Επομένως, τα σύμβολα 0 και 1 πρέπει να μεταδίδονται με την ίδια πιθανότητα. Το ίδιο ισχύει και για τα 2 και 3. Αυτό μπορεί να δειχτεί και πιο αυστηρά με χρήση του ορισμού της χωρητικότητας. Όταν $\alpha = \beta$, από τη συμμετρία του προβλήματος (ή με την παρατήρηση ότι και αυτό το κανάλι, όπως και το κανάλι του προηγούμενου ερωτήματος, είναι ασθενώς συμμετρικό), όλα τα σύμβολα πρέπει να μεταδίδονται με την ίδια πιθανότητα. Συνεπώς, $p(x) = \frac{1}{4}$ για όλα τα x.

$$C = \max_{p(x)}\{H(X)-H(X|Y)\} = \log 4-\frac{\alpha}{2}H(X|Y=E_1)-\frac{\alpha}{2}H(X|Y=E_2) = 2-\alpha.$$

Παρατηρούμε ότι η χωρητικότητα του καναλιού B με $\alpha = \beta$ είναι μεγαλύτερη από τη χωρητικότητα του καναλιού A. Διαισθητικά το αποτέλεσμα είναι σωστό, δεδομένου ότι στο κανάλι B υπάρχουν δύο είδη διαγραφών οπότε έχουμε περισσότερη πληροφορία για το μεταδοθέν σύμβολο (γνωρίζουμε ότι είναι ένα από 2 πιθανά σύμβολα, σε αντίθεση με το κανάλι A όπου δε γνωρίζουμε τίποτα άλλο πλην του ότι έχει προκύψει διαγραφή).

Κάποιοι θεώρησαν εσφαλμένα ότι το κανάλι αποτελείται από δύο κανάλια που χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα. Παρόλο που τα δύο ''υπο-κανάλια'' δεν παρεμβάλλονται το ένα στο άλλο, κάθε χρονική στιγμή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο ένα σύμβολο εισόδου και, επομένως, μπορούμε να μεταδώσουμε μόνο σε ένα ''υπο-κανάλι''.

(γ) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού B όταν $\alpha \neq \beta$, και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Συγκρίνετε με την τιμή που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Σχολιάστε. Ποια είναι η χωρητικότητα στην ειδική περίπτωση όπου $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ και με ποια κατανομή εισόδου επιτυγχάνεται;

Απάντηση:

Όταν $\alpha \neq \beta$, το κανάλι δεν είναι πλέον συμμετρικό. Ωστόσο, τα επιμέρους κανάλια είναι συμμετρικά. Επομένως, γενικά, η $p(x)$ έχει κατανομή $\left\{\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}, \frac{1-\delta}{2}, \frac{1-\delta}{2}\right\}$.

$$\begin{aligned}
C &= \max_{p(x)}\{H(X) - H(X|Y)\} \\
&\max_{\delta}\left\{-2 \times \frac{\delta}{2}\log\frac{\delta}{2} - 2 \times \frac{1-\delta}{2}\log\frac{1-\delta}{2} - \delta\alpha - (1-\delta)\beta\right\} \\
&= \max_{\delta}\left\{-\delta\log\frac{\delta}{2} - (1-\delta)\log\frac{1-\delta}{2} - \delta\alpha - (1-\delta)\beta\right\},
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $H(X|Y) = 0 \cdot H(X|Y \neq \{E_1, E_2\}) + \alpha\delta H(X|Y = E_1) + \beta(1-\delta)H(X|Y = E_2)$.

Το όρισμα της max είναι κοίλη ($\cap$) συνάρτηση της παραμέτρου δ, (άθροισμα κοίλων και γραμμικών συναρτήσεων). Για να βρούμε το μέγιστο παίρνουμε την παράγωγο ως προς δ:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\delta}\left\{-\delta\log\frac{\delta}{2} - (1-\delta)\log\frac{1-\delta}{2} - \delta\alpha - (1-\delta)\beta\right\} \\
=&\frac{\partial}{\partial\delta}\left\{-\delta\log e\ln\frac{\delta}{2} - (1-\delta)\log e\ln\frac{1-\delta}{2} - \delta\alpha - (1-\delta)\beta\right\} \\
=&-\log e\ln\frac{\delta}{2} - \log e + \log e\ln\frac{1-\delta}{2} + \log e - \alpha + \beta \\
=&\log e\ln\frac{1-\delta}{\delta} - \alpha + \beta = 0 \\
\Rightarrow&\log\frac{1-\delta}{\delta} = \alpha - \beta \Rightarrow \frac{1-\delta}{\delta} = 2^{\alpha-\beta} \\
\Rightarrow&\delta^* = \frac{1}{1+2^{\alpha-\beta}}.
\end{aligned}$$

Η χωρητικότητα ισούται με

$$\begin{aligned}
C &= -\delta^*\log\frac{\delta^*}{2} - (1-\delta^*)\log\frac{1-\delta^*}{2} - \delta^*\alpha - (1-\delta^*)\beta \\
&= -\delta^*\log\delta^* - (1-\delta^*)\log(1-\delta^*) + \log 2 - \delta^*\alpha - (1-\delta^*)\beta \\
&= 1 + H(\delta^*) - \delta^*\alpha - (1-\delta^*)\beta.
\end{aligned}$$

Με πράξεις,

$$C = 1 + \log(1 + 2^{\alpha-\beta}) - \alpha = 1 + \log(1 + 2^{\beta-\alpha}) - \beta.$$

Παρατηρούμε ότι, για δεδομένο α, καθώς το β αυξάνει, η χωρητικότητα ελαττώνεται. Η χωρητικότητα αυξάνει καθώς το β τείνει στο 0. Για $\beta = 0$, $C = 1 + \log(1 + 2^{\alpha}) - \alpha$. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$, $C = \log 3$ και $\delta = \frac{1}{3}$. Το αποτέλεσμα έχει νόημα: Όταν τα 0 και 1 πάντα διαγράφονται, ενώ τα 2 και 3 φτάνουν πάντοτε στο δέκτη ως έχουν, μπορούμε να στείλουμε $\log 3$ bits πληροφορίας. Για να στείλουμε τα μηνύματα 2 και 3 χρησιμοποιούμε τα σύμβολα 2 και 3, αντιστοίχως. Για να στείλουμε το μήνυμα 1 χρησιμοποιούμε τα σύμβολα 0 και 1 με οποιαδήποτε αναλογία, αρκεί το άθροισμά των πιθανοτήτων εκπομπής να ισούται με $p(0) + p(1) = \frac{1}{3}$.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι, για $\alpha = \beta$, $C = 1 + 1 - \alpha = 1 + 1 - \beta$, το οποίο συμφωνεί με το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος.

5. **Το δυαδικό συμμετρικό κανάλι διαγραφής (BSEC) (Προχωρημένα Θέματα Θ. Π., Τελική Εξέταση, Ιούνιος 2010)**

   Σε αυτό το πρόβλημα θα θεωρήσουμε ένα πιο ρεαλιστικό *δυαδικό* κανάλι διαγραφής, το BSEC. Στο BSEC, επιπλέον των διαγραφών, ενδέχεται να έχουμε και αναστροφή ψηφίου.

   Συγκεκριμένα, ο πίνακας μετάβασης του BSEC είναι ο

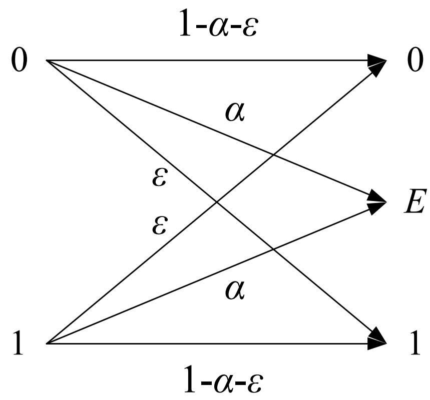
$$P_{Y|X} = \begin{bmatrix} 1-\epsilon-\alpha & \alpha & \epsilon \\ \epsilon & \alpha & 1-\epsilon-\alpha \end{bmatrix}.$$

   $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ και $\mathcal{Y} = \{0, E, 1\}$.

   (α) Σχεδιάστε το διάγραμμα μεταβάσεων του καναλιού. Είναι το κανάλι συμμετρικό; Είναι ασθενώς συμμετρικό;

   Απάντηση:

   Το διάγραμμα μεταβάσεων του καναλιού έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 4. Το κανάλι δεν είναι συμμετρικό ούτε ασθενώς συμμετρικό για γενικές τιμές των α και ϵ.



Σχήμα 4: Κανάλι για υπολογισμό C_{UB}.

(β) Βρείτε τη χωρητικότητα του BSEC, καθώς και την κατανομή εισόδου, p^*, με την οποία επιτυγχάνεται η χωρητικότητα. Συγκρίνετε με τη χωρητικότητα του BEC ($\epsilon = 0$).

Υπόδειξη: Ένας τρόπος για να αποφύγετε τις πολλές πράξεις είναι να χρησιμοποιήσετε την αρχή διαχωρισιμότητας της εντροπίας (2 φορές).

Απάντηση:

Από τον ορισμό της χωρητικότητας,

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \{H(Y) - H(Y|X)\}.$$

Παρατηρούμε, κατ' αρχάς, ότι η $H(Y|X)$ δεν εξαρτάται από την $p(x)$. Έστω τ.μ. V που ισούται με 1 στην περίπτωση διαγραφής, αλλιώς με 0. Από την αρχή διαχωρισιμότητας της εντροπίας,

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= (1-\alpha-\epsilon, \alpha, \epsilon) \\ &= H(V|X) + \alpha H(Y|X, V=1) + (1-\alpha) H(Y|X, V=0) \\ &= H(\alpha) + (1-\alpha) H\left(\frac{1-\alpha-\epsilon}{1-\alpha}, \frac{\epsilon}{1-\alpha}\right). \end{aligned}$$

Θέτοντας $\Pr\{X=0\} = p$, $\Pr\{Y=0\} = p(1-\alpha-\epsilon) + (1-p)\epsilon = p(1-\alpha-2\epsilon) + \epsilon$. $\Pr\{Y=1\} = 1 - \Pr\{Y=0\} - \alpha = 1 - \alpha - \epsilon - p(1-\alpha-2\epsilon)$.

Χρησιμοποιώντας, και πάλι, την αρχή διαχωρισιμότητας της εντροπίας,

$$\begin{aligned} H(Y) &= H(V) + \alpha H(Y|V=1) + (1-\alpha) H(Y|V=0) \\ &= H(V) + (1-\alpha) H(Y|V=0) \\ &= H(\alpha) + (1-\alpha) H\left(\frac{p(1-\alpha-2\epsilon)+\epsilon}{1-\alpha}, \frac{1-\alpha-\epsilon-p(1-\alpha-2\epsilon)}{1-\alpha}\right). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι μόνο ο δεύτερος όρος εξαρτάται από την κατανομή, p. Αρκεί να επιλέξουμε την p έτσι ώστε $\frac{p(1-\alpha-2\epsilon)+\epsilon}{1-\alpha} = \frac{1}{2}$. Με πράξεις, $p^* = \frac{1}{2}$. Συνεπώς,

$$H(Y) = H(\alpha) + (1-\alpha).$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση για τη χωρητικότητα,

$$\begin{aligned} C &= \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \{H(Y) - H(Y|X)\} = \max_{p(x)} H(Y) - H(Y|X) \\ &= H(\alpha) + (1-\alpha) - H(\alpha) - (1-\alpha) H\left(\frac{1-\alpha-\epsilon}{1-\alpha}, \frac{\epsilon}{1-\alpha}\right) \\ &= (1-\alpha) - (1-\alpha) H\left(\frac{1-\alpha-\epsilon}{1-\alpha}, \frac{\epsilon}{1-\alpha}\right). \\ &= 1-\alpha + (1-\alpha)\left[\frac{1-\alpha-\epsilon}{1-\alpha} \log \frac{1-\alpha-\epsilon}{1-\alpha} + \frac{\epsilon}{1-\alpha} \log \frac{\epsilon}{1-\alpha}\right] \\ &= 1-\alpha + (1-\alpha-\epsilon)\log(1-\alpha-\epsilon) + \epsilon \log \epsilon - (1-\alpha)\log(1-\alpha). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, στη γενική περίπτωση, η χωρητικότητα του BSEC είναι μικρότερη από τη χωρητικότητα του BEC. Επίσης, η κατανομή που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα του BSEC είναι η ομοιόμορφη για οποιαδήποτε τιμή του α και του ϵ.

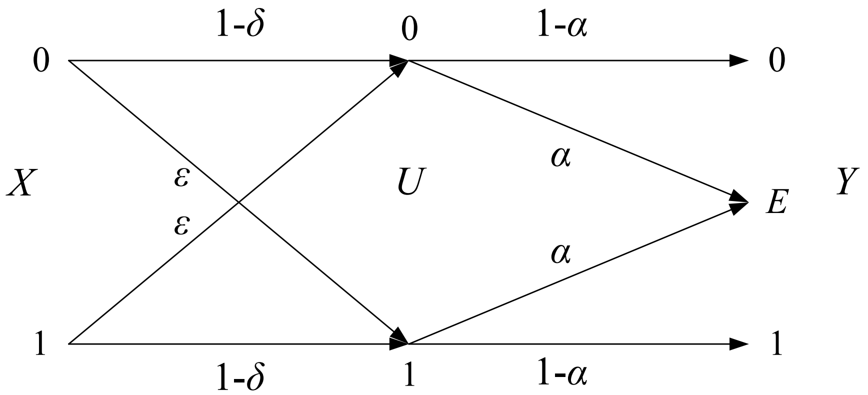
Σημείωση: Θα μπορούσατε (όπως έκαναν κάποιοι και στο διαγώνισμα) να χρησιμοποιήσετε τη συμμετρία του διαγράμματος μετάβασης του καναλιού για να συμπεράνετε απευθείας ότι η ομοιόμορφη κατανομή εισόδου επιτυγχάνει τη χωρητικότητα χωρίς να το αποδείξετε με πράξεις. Στη συγκεκριμένη περίπτωση (του BSEC), η ομοιόμορφη κατανομή εισόδου είναι η μόνη που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα, αλλά αυτό δεν ισχύει πάντοτε (ένα παράδειγμα είναι η ενθόρυβη γραφομηχανή).

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τη χωρητικότητα του BSEC με έναν εναλλακτικό τρόπο.

(γ) Δείξτε ότι το BSEC ισοδυναμεί με ένα BSC με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου $\delta = \frac{\epsilon}{1-\alpha}$ το οποίο ακολουθείται από ένα BEC με πιθανότητα διαγραφής α.

Απάντηση:

Η διαδοχή των δύο καναλιών έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 5. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι Pr$\{Y = 0|X = 0\}$ = Pr$\{Y = 1|X = 1\} = (1-\delta)(1-\alpha) = 1-\alpha-\epsilon$, Pr$\{Y = 1|X = 0\}$ = Pr$\{Y = 0|X = 1\} = \delta(1-\alpha) = \epsilon$ και Pr$\{Y = E|X = 0\}$ = Pr$\{Y = E|X = 1\} = 1-(1-\alpha-\epsilon)-\epsilon = \alpha$.



Σχήμα 5: BSEC ως διαδοχή BSC και BEC.

(δ) Εάν X είναι η είσοδος στο BSEC, Y η έξοδός του και U η (ενδιάμεση) έξοδος του BSC, χρησιμοποιήστε τα βήματα της απόδειξης της ανισότητας επεξεργασίας δεδομένων για να εκφράσετε την $I(X;Y)$ συναρτήσει μόνο της $I(X;U)$ και της παραμέτρου α.

Απάντηση:

Δεδομένου ότι $X \to U \to Y$, από την ανισότητα επεξεργασίας δεδομένων,

$$I(X;U,Y) = I(X;U) + I(X;Y|U) = I(X;Y) + I(X;U|Y) \Rightarrow$$
$$I(X;Y) = I(X;U) - I(X;U|Y).$$

Για την $I(X;U|Y)$ ισχύει $I(X;U|Y) = \alpha I(X;U|Y=E) + (1-\alpha)I(X;U|Y \neq E)$. Όταν $Y \neq E$, $= U$. Συνεπώς, $I(X;U|Y \neq E) = H(U|Y \neq E) - H(U|X, Y \neq E) = H(U|Y=U) - H(U|X, Y=U) = 0$. Αντίθετα, όταν $Y = E$, η αβεβαιότητά μας για την U παραμένει η ίδια όπως και στην έξοδο, U του BSC (λόγω της συμμετρίας του BEC). Επομένως, $I(X;U|Y=E) = H(U|Y=E) - H(U|X,Y=E) = H(U) - H(U|X) = (X;U)$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι

$$I(X;Y) = I(X;U) - I(X;U|Y) = I(X;U) - \alpha I(X;U) = (1-\alpha)I(X;U).$$

Σημείωση: Εδώ θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε απευθείας το αποτέλεσμα της Άσκησης 7.27 των Cover & Thomas. Η διαδοχή BSC και BEC είναι μια ειδική περίπτωση της Άσκησης.

(ε) Βρείτε τη χωρητικότητα του BSEC μεγιστοποιώντας την $I(X;U)$ του BSC ως προς την κατανομή της X.

Απάντηση:

Κατά τα γνωστά, $C_{\textsf{BSC}} = 1 - (\delta)$ και επιτυγχάνεται με $p^* = \frac{1}{2}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} C_{\textsf{BSEC}} &= (1-\alpha)\,(1-H(\delta)) \\ &= (1-\alpha)\left(1 + \frac{1-\alpha-\epsilon}{1-\alpha}\,\textsf{log}\,\frac{1-\alpha-\epsilon}{1-\alpha} + \frac{\epsilon}{1-\alpha}\,\textsf{log}\,\frac{1-\alpha-\epsilon}{1-\alpha}\right) \\ &= 1-\alpha + (1-\alpha-\epsilon)\,\textsf{log}\,\frac{1-\alpha-\epsilon}{1-\alpha} + \epsilon\,\textsf{log}\,\frac{1-\alpha-\epsilon}{1-\alpha} \\ &= 1-\alpha + (1-\alpha-\epsilon)\,\textsf{log}(1-\alpha-\epsilon) + \epsilon\,\textsf{log}\,\epsilon - (1-\alpha)\,\textsf{log}(1-\alpha). \end{aligned}$$

Καταλήξαμε, επομένως, όπως ήταν αναμενόμενο, στην ίδια έκφραση για τη χωρητικότητα και στην ίδια κατανομή εισόδου, p^*.