22A004 - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
Τελικό Διαγώνισμα

• Διάρκεια διαγωνίσματος: 3 ώρες. 4 ασκήσεις (το φυλλάδιο έχει 7 σελίδες – ελέγξτε το!).

• Βαθμός διαγωνίσματος = $\min\{\text{μονάδες}/10, 10\}$. Σύνολο μονάδων: 110.

• Οι απαντήσεις σας σε κάθε ερώτημα θα πρέπει να είναι επαρκώς αιτιολογημένες. Επιτρέπεται η χρήση (χωρίς απόδειξη) οποιουδήποτε θεωρήματος και οποιασδήποτε ιδιότητας έχει αναφερθεί στο μάθημα ή βρίσκεται στο βιβλίο των Cover & Thomas ή στο βιβλίο του Gallager ή/και στις σημειώσεις ή/και στα φυλλάδια αρκεί να το διευκρινίσετε.

• Αποτέλεσμα για το οποίο δεν υπάρχει επαρκής αιτιολόγηση στο γραπτό δεν προσμετράται στη βαθμολόγηση. Στην περίπτωση αριθμητικού αποτελέσματος που υπολογίστηκε με αριθμομηχανή πρέπει να δώσετε τον τύπο που χρησιμοποιήσατε ή να επισυνάψετε το πρόχειρο στο οποίο κάνατε τις πράξεις.

• Βεβαιωθείτε ότι έχετε γράψει το όνομά σας σε όλα τα φύλλα που έχετε χρησιμοποιήσει, συμπεριλαμβανομένων των προχείρων.

• Απαγορεύεται το κάπνισμα μέσα στην αίθουσα κατά τη διάρκεια του διαγωνίσματος. Θα σας επιτραπεί, όμως, να βγείτε έξω για να καπνίσετε. Επίσης, απαγορεύεται επικοινωνία μεταξύ διαγωνιζομένων χωρίς άδεια επιτηρητή. Τέλος, απαγορεύεται η χρήση κινητών τηλεφώνων ή άλλων μέσων επικοινωνίας.

• Μπορείτε να κρατήσετε τα θέματα. Οι λύσεις θα είναι διαθέσιμες σύντομα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Βάρη θεμάτων	
1ο θέμα	25+5
2ο θέμα	30
3ο θέμα	25
4ο θέμα	25

Η ΣΕΛΙΔΑ ΑΥΤΗ ΕΙΝΑΙ ΚΕΝΗ ΕΣΚΕΜΜΕΝΑ

1. **Μπρίτζ (25 μονάδες + 5 επιπλέον)**

   Το μπριτζ παίζεται με μία τράπουλα 52 χαρτιών.

   Ένα *χέρι* (hand) είναι οποιοσδήποτε συνδυασμός 13 χαρτιών.

   Η *διανομή* (deal) είναι οποιαδήποτε διαμέριση της τράπουλας σε 4 χέρια.

   Ένας απλός τρόπος για να αναπαραστήσουμε ένα χέρι είναι αντιστοιχίζοντας ένα μοναδικό αριθμό 6 bits σε κάθε χαρτί. Σε αυτήν την περίπτωση χρειάζονται 78 bits για να περιγράψουν ένα συγκεκριμένο χέρι. (Αυτό που οι Μηχανικοί Επικοινωνιών ονομάζουν Pulse Coded Modulation – PCM).

   (α) **(10 μονάδες)**

   Αποδείξτε ότι οποιαδήποτε *δυαδική* περιγραφή ενός αυθαίρετου χεριού δεν μπορεί να χρησιμοποιεί λιγότερα από *περίπου* $52H_b\left(\frac{1}{4}\right) \approx 42$ bits, όπου $H_b(p) = p\log\frac{1}{p} + (1-p)\log\frac{1}{1-p}$ η εντροπία δυαδικής τ.μ. $\sim \mathrm{Bern}(p)$.

   Υπόδειξη: Βρείτε, πρώτα, μία περιγραφή χρησιμοποιώντας 52 bits.

   (β) **(8 μονάδες + 5 επιπλέον)**

   Δείξτε ότι δεν μπορούμε να περιγράψουμε μία αυθαίρετη διανομή με λιγότερα από 104 bits. Δώστε μία αναπαράσταση με χρήση 104 bits.

   Επιπλέον μονάδες αν δώσετε και δεύτερο τρόπο αναπαράστασης με χρήση 104 bits.

   Σε περίπτωση που σας χρειαστεί δίνεται ότι $H_b\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.9183$ bits.

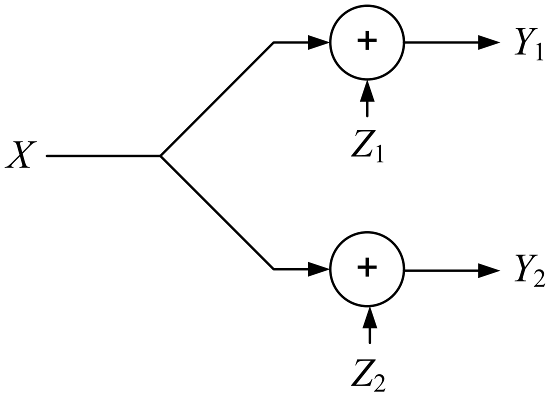
   (γ) **(7 μονάδες)**

   Δείξτε ότι για να περιγραφούν δύο χέρια χρειάζονται περίπου 78 bits. Δώστε έναν τρόπο περιγραφής με χρήση 78 bits.

2. **Ένας πομπός, πολλοί δέκτες (30 μονάδες)**

   Θεωρούμε έναν πομπό που μεταδίδει σε δύο δέκτες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Σε κάθε δέκτη προστίθεται πραγματικός Γκαουσιανός θόρυβος μηδενικής μέσης τιμής. Δηλαδή, $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ και , $Z_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$. Οι θόρυβοι είναι *ανεξάρτητοι* μεταξύ τους.

   Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $\sigma_2^2 \geq \sigma_1^2$.



Σχήμα 1: Μετάδοση σε 2 δέκτες.

   (α) **(10 μονάδες)**

   Αρχικά θεωρούμε ότι η ανίχνευση μπορεί να γίνει *από κοινού* (jointly) με χρήση των σημάτων και των δύο δεκτών. Δηλάδη οι δέκτες συνδέονται μεταξύ τους ή, ισοδύναμα, τα σήματά τους αποστέλλονται σε κάποιο κέντρο επεξεργασίας.

   Αν επιβάλουμε περιορισμό μέσης ισχύος στον πομπό $\mathbb{E}[X^2] \leq P$ και $X \in \mathbb{R}$, βρείτε τη χωρητικότητα C_{joint} του καναλιού μεταξύ του πομπού και των δύο δεκτών, καθώς και την κατανομή της X με την οποία επιτυγχάνεται.

   (β) **(7 μονάδες)**

   Έστω ότι θέτουμε τον εξής περιορισμό στους δέκτες: Η αποκωδικοποιήση πρέπει να βασιστεί στο σήμα $\tilde{Y} = aY_1 + (1-a)Y_2$ με δεδομένο $0 \leq a \leq 1$. Δηλαδή, αντί να έχουμε απευθείας πρόσβαση στο σήμα κάθε δέκτη (δηλαδή στο διάνυσμα $\mathbf{Y} = [Y_1\ Y_2]^T$), έχουμε πρόσβαση μόνο στο $\tilde{Y}$.

   Βρείτε τη χωρητικότητα, $C_{\text{lin-comb}}$, του καναλιού μεταξύ της X και της $\tilde{Y}$ για δεδομένο a.

   Αλλάζει η απάντησή σας αν $\tilde{Y} = aY_1 + bY_2$ με $a > 0$, $b > 0$ και $a + b = c > 1$, όπου c σταθερά;

   (γ) **(8 μονάδες)**

   Επιλέξτε την τιμή του $0 \leq a \leq 1$ που μεγιστοποιεί τη $C_{\text{lin-comb}}$ και συγκρίνετε με την απάντησή σας στο Ερώτημα (α). Σχολιάστε.

(δ) **(5 μονάδες)**

Βρείτε το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης, $C_{\text{separate}} = C_{\text{separate},1} + C_{\text{separate},2}$, που μπορούμε να πετύχουμε αν η αποκωδικοποίηση πρέπει να γίνει ξεχωριστά σε κάθε δέκτη, αν, δηλαδή, δεν επιτρέπεται συνεργασία (από κοινού αποκωδικοποίηση). Συγκρίνετε με το αποτέλεσμα του Ερωτήματος (α).

3. **Slepian-Wolf (25 μονάδες)**

Θεωρούμε δύο *δυαδικές* και *ανεξάρτητες* τ.μ. $Z_1 \sim \text{Bern}(1/2)$ και $Z_2 \sim \text{Bern}(1/2)$. Και οι δύο τ.μ. παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{0, 1\}$.

(α) **(9 μονάδες)**

Θέλουμε να συμπιέσουμε *ανεξάρτητα* το άθροισμα $X = Z_1 + Z_2$ και τη διαφορά $Y = Z_1 - Z_2$ (*Προσοχή:* η πρόσθεση και η αφαίρεση είναι στο $\mathbb{R}$).

Βρείτε την περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών συμπίεσης (Slepian-Wolf).

(β) **(9 μονάδες)**

Επαναλάβετε το 1ο ερώτημα αν οι Z_1 και Z_2 δεν είναι ανεξάρτητες, αλλά έχουν από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας (p.m.f.) που δίνεται στον Πίνακα 1. Συγκρίνετε την περιοχή που προκύπτει με την περιοχή του Ερωτήματος (α).

	$Z_2 = 0$	$Z_2 = 1$
$Z_1 = 0$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$Z_1 = 1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

Πίνακας 1: Από κοινού κατανομή, $p_{Z_1Z_2}(z_1, z_2)$, των Z_1 και Z_2.

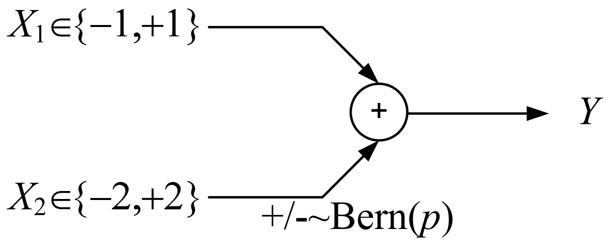
Σε περίπτωση που σας χρειαστεί, δίνεται ότι $\log_2 3 \approx 1.585$.

(γ) **(7 μονάδες)**

Συγκρίνετε τις περιοχές των Ερωτημάτων (α) και (β) με την περίπτωση που κωδικοποιούμε (ανεξάρτητα) απευθείας τις Z_1 και Z_2 (αντί για τις X και Y).

4. **Υπέρθεση με τυχαία φάση (25 μονάδες)**

Θεωρούμε το κύκλωμα του Σχήματος 2. Οι τ.μ. X_1 και X_2 υπερτίθενται, οπότε προκύπτει η τ.μ. Y.



Σχήμα 2: Υπέρθεση τ.μ. με τυχαία φάση.

Η υπέρθεση γίνεται με τυχαία φάση 0 ή π. Πιο συγκεκριμένα, $Y = X_1+X_2$ με πιθανότητα p, ενώ $Y = X_1 - X_2$ με πιθανότητα $1 - p$. Θεωρούμε ότι η τιμή της p είναι γνωστή.

Τέλος, $X_1 \in \{-1, +1\}$ και $X_2 \in \{-2, +2\}$.

(α) **(13 μονάδες)**

Βρείτε την περιοχή χωρητικότητας, $\mathcal{C}$, καθώς και τις κατανομές των X_1 και X_2 με τις οποίες επιτυγχάνεται το όριο της $\mathcal{C}$.

Υπόδειξη: Για το συγκεκριμένο πρόβλημα ίσως είναι πιο εύκολο να γράψετε $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$ (αντί για $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$).

(β) **(4 μονάδες)**

Τι συμβαίνει όταν $p = 1/2$; Μπορούμε να περάσουμε πληροφορία στο κανάλι;

(γ) **(4 μονάδες)**

Μπορούμε να περάσουμε πληροφορία στο κανάλι αν δε γνωρίζουμε την τιμή της παραμέτρου p;

(δ) **(4 μονάδες)**

Μπορούμε να αυξήσουμε το μέγιστο επιτεύξιμο άθροισμα ρυθμών μετάδοσης $R_1 + R_2$ (sum capacity) αν επιτρέπεται να συνεργαστούν οι δύο πηγές;