

**EE728 (22A004) - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας**  
**3η Σειρά Ασκήσεων**  
**(Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων)**

**Παράδοση: Έως την ημέρα του διαγωνίσματος (16/5/2011 2 μ.μ.)**

Διευκρινίσεις: Αν θέλετε τις λύσεις ενωρίτερα πρέπει είτε να παραδώσετε τις ασκήσεις ενωρίτερα ή να μου ζητήσετε τις λύσεις με e-mail και να μην παραδώσετε ασκήσεις.

Η επίλυση των ασκήσεων είναι προαιρετική. Σκοπός τους είναι να λειτουργήσουν συμπληρωματικά με τις διαλέξεις.

Επιτρέπεται η συνεργασία σε μικρές ομάδες, αλλά όχι η αντιγραφή.

**1. \*Κατανεμημένη συμπίεση δεδομένων (Cover & Thomas 15.24)**

Έστω  $Z_1, Z_2$  και  $Z_3$  ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν κατανομή  $\text{Bern}(p)$  η καθεμία. Βρείτε την περιοχή ρυθμών μετάδοσης Slepian-Wolf για την περιγραφή της τριάδας  $(X_1, X_2, X_3)$ , όπου

$$\begin{aligned}X_1 &= Z_1 \\X_2 &= Z_1 + Z_2 \\X_3 &= Z_1 + Z_2 + Z_3.\end{aligned}$$

**2. Ταυτότητα για το MAC (Cover & Thomas 15.27)**

Έστω ότι συμβολίζουμε τη χωρητικότητα Γκαουσιανού καναλιού με SNR  $x$  με  $C(x) \triangleq \frac{1}{2} \log(1+x)$ . Δείξτε ότι

$$C\left(\frac{P_1}{N}\right) + C\left(\frac{P_2}{P_1+N}\right) = C\left(\frac{P_1+P_2}{N}\right).$$

Επομένως, δύο ανεξάρτητοι χρήστες μπορούν να στέλνουν τόση πληροφορία όση και εάν είχαν ενώσει τις ισχύεις τους.

**3. Διαμοιρασμός Συχνότητας (FDMA) (Cover & Thomas 15.28)**

Θεωρούμε ότι δύο χρήστες μοιράζονται εύρος ζώνης  $W$  με χρήση FDMA.

Δείξτε ότι, για να μεγιστοποιήσουμε το άθροισμα ρυθμών μετάδοσης

$$R_1 + R_2 = W_1 \log \left( 1 + \frac{P_1}{NW_1} \right) + (W - W_1) \log \left( 1 + \frac{P_2}{N(W - W_1)} \right)$$

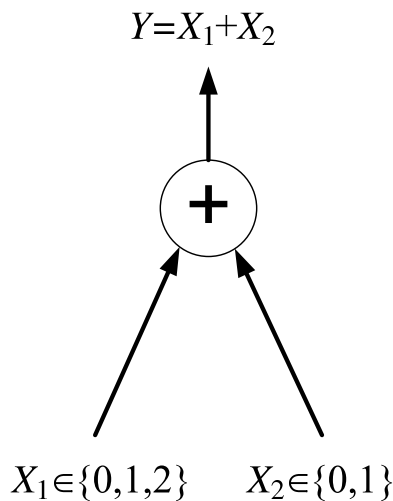
το εύρος ζώνης  $W$  πρέπει να μοιραστεί στους χρήστες αναλόγως με τις ισχύεις τους,  $P_i$ .

*Υπόδειξη:* Μεγιστοποιήστε ως προς  $W_1$ . Εναλλακτικά, αντικαταστήστε με τη βέλτιστη τιμή του  $W_1$  και δείξτε ότι βρίσκεται στο όριο της περιοχής χωρητικότητας του MAC (και, επομένως, δεν υπάρχει  $W_1$  που επιτυγχάνει μεγαλύτερη τιμή του  $R_1 + R_2$ ).

4. Διακριτό MAC χωρίς θόρυβο (Προχωρημένα Θέματα Θ. Π., Τελική Εξέταση Ιουνίου 2009)

Στο κανάλι του Σχήματος 1, δύο χρήστες (1 και 2) επιθυμούν να επικοινωνήσουν με ένα δέκτη. Ο δέκτης λαμβάνει το άθροισμα,  $Y = X_1 + X_2$ , των σημάτων  $X_1$  και  $X_2$  του χρήστη 1 και 2, αντίστοιχα. Ο χρήστης 1 μεταδίδει ένα από τα σύμβολα 0, 1 και 2, ενώ ο χρήστης 2 το σύμβολο 0 ή το σύμβολο 1. Οι χρήστες δε συνεννοούνται μεταξύ τους πριν μεταδώσουν. Ωστόσο, θεωρούμε ότι γνωρίζουν την κατανομή  $p_{X_i}(x_i)$  με την οποία πρέπει να μεταδώσουν (για παράδειγμα, μπορεί να τους την έχει γνωστοποιήσει ο δέκτης πριν αρχίσει η μετάδοση).

Δίνεται, επίσης, ότι  $\log_2 3 \approx 1.585$ .



Σχήμα 1: Διακριτό MAC χωρίς θόρυβο.

- (α) Βρείτε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο ρυθμός μετάδοσης  $R_1$  του χρήστη 1. Επαναλάβετε για το ρυθμό μετάδοσης  $R_2$  του χρήστη 2. Βρείτε, επίσης, την κατανομή  $p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$  που επιτυγχάνει το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης,  $R_i$ , σε κάθε περίπτωση.

- (β) Δώστε μια έκφραση για τη μέγιστη τιμή του αθροίσματος  $R_1 + R_2$  των ρυθμών με τους οποίους μπορούν να μεταδώσουν ταυτόχρονα οι δύο χρήστες (sum capacity του καναλιού). Η έκφραση αυτή μπορεί να είναι συνάρτηση εντροπιών (ή/και δεσμευμένων εντροπιών) τυχαίων μεταβλητών και θα πρέπει να έχει όσο γίνεται λιγότερους όρους. Προς το παρόν δε χρειάζεται να βρείτε κάποια τιμή για τη sum capacity.
- (γ) Με βάση το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος δώστε ένα άνω φράγμα για τη sum capacity. Το φράγμα αυτό δεν είναι απαραίτητο να είναι επιτεύξιμο.
- (δ) Δώστε ένα παράδειγμα κατανομής  $p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$  με την οποία μπορεί να επιτευχθεί η sum capacity. Συγκρίνετε με το άνω φράγμα που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.  
Υπόδειξη: Για να μην αναλωθείτε σε πράξεις και να απαντήσετε γρήγορα στο ερώτημα, προσπαθήστε να βρείτε εάν είναι δυνατόν ο κάθε χρήστης να μεταδίδει με  $R_1 = R_2 = C_{\text{sum}}/2$ .
- (ε) Υπάρχει τρόπος ο χρήστης 1 να μεταδίδει με το μέγιστο ρυθμό μετάδοσής του,  $R_{1,\text{max}}$ , και ο χρήστης 2 με  $R_2 = C_{\text{sum}} - R_{1,\text{max}}$ ; Εάν ναι, με ποια κατανομή επιτυγχάνεται αυτό; Εάν όχι, με τι ισούται η διαφορά  $C_{\text{sum}} - (R_{1,\text{max}} + R_2)$ ; Συγκρίνετε με την περίπτωση Γκαουσιανού MAC.

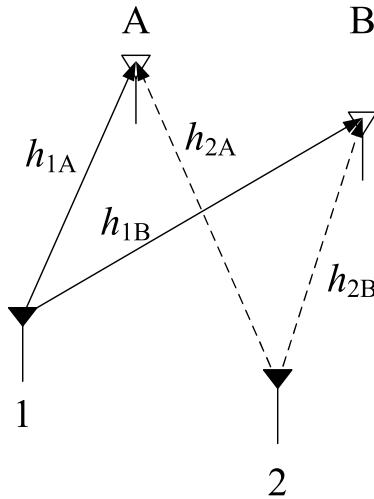
5. Μετάδοση από δύο πομπούς σε δύο δέκτες (Προχωρημένα Θέματα Θ. Π. – Τελική Εξέταση Ιουνίου 2010)

Στο σύστημα του Σχήματος 2, οι πομποί 1 και 2 θέλουν να μεταδώσουν ο καθένας την ίδια πληροφορία στους δέκτες A και B. Δηλαδή, ο πομπός 1 θέλει να μεταδώσει την ίδια πληροφορία στο δέκτη A και στο δέκτη B και ο πομπός 2 θέλει να μεταδώσει την ίδια πληροφορία (αλλά διαφορετική από την πληροφορία του πομπού 1) στο δέκτη A και στο δέκτη B.

Θεωρούμε ότι ούτε οι πομποί ούτε οι δέκτες συνδέονται μεταξύ τους. Επομένως, οι πομποί μεταδίδουν ανεξάρτητα και οι δέκτες αποκωδικοποιούν ανεξάρτητα.

Και στους δύο δέκτες στο ληφθέν σήμα προστίθεται Γκαουσιανός θόρυβος διασποράς  $N$ . Δηλαδή,  $Z_A \sim \mathcal{N}(0, N)$  και  $Z_B \sim \mathcal{N}(0, N)$ :  $Y_A = h_{1A}X_1 + h_{2A}X_2 + Z_A$  και  $Y_B = h_{1B}X_1 + h_{2B}X_2 + Z_B$ . Στους πομπούς υπάρχει περιορισμός εκπεμπόμενης ισχύος  $P_1$  και  $P_2$ , αντίστοιχα. Για διευκόλυνσή σας μπορείτε να θεωρήσετε ότι τα κέρδη των καναλιών,  $h_{i,j}$ , παίρνουν πραγματικές τιμές.

- (α) Εάν δε μας ενδιαφέρει να αποκωδικοποιήσουμε τα εκπεμπόμενα σήματα στο δέκτη B, σχεδιάστε την περιοχή χωρητικότητας του καναλιού που σχηματίζεται μεταξύ των πομπών 1 και 2 και του δέκτη A. Επίσης, εξηγήστε ποιες είναι οι κατανομές που πρέπει να χρησιμοποιήσουν οι πομποί προκειμένου να επιτευχθεί μετάδοση στο όριο της περιοχής χωρητικότητας. Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορεί να επιτύχει ο πομπός 1; Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορεί



Σχήμα 2: Μετάδοση από 2 πομπούς σε 2 δέκτες.

να επιτύχει ο πομπός 2; Ποιο είναι το μέγιστο άθροισμα ρυθμών μετάδοσης που μπορούμε να επιτύχουμε (δηλαδή η sum capacity);

- (β) Έστω, τώρα, ότι μας ενδιαφέρει η πληροφορία από κάθε πομπό να λαμβάνεται και στους δύο δέκτες. Ποια είναι η περιοχή χωρητικότητας, δηλαδή ποια είναι η περιοχή ρυθμών μετάδοσης για τους οποίους η μέγιστη πιθανότητα σφάλματος και στους δύο δέκτες για τα σήματα και των δύο πομπών μπορεί να είναι αυθαίρετα κοντά στο 0; Αν προτιμάτε, δε χρειάζεται να δώσετε τις σχέσεις που περιγράφουν την περιοχή της χωρητικότητας, αρκεί να τη σχεδιάσετε λεπτομερώς.

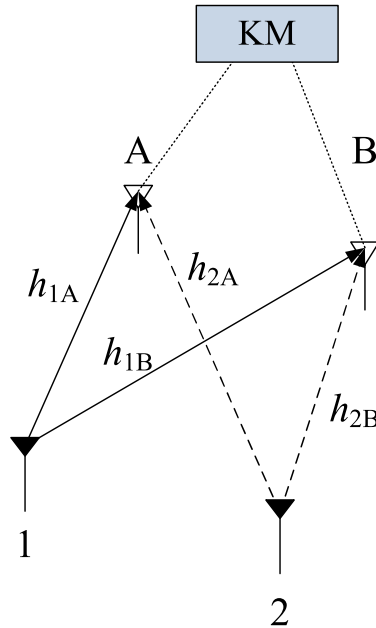
Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορεί να επιτύχει ο πομπός 1; Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορεί να επιτύχει ο πομπός 2; Ποιο είναι το μέγιστο άθροισμα ρυθμών μετάδοσης που μπορούμε να επιτύχουμε (δηλαδή η sum capacity); Τι κατανομή πρέπει να χρησιμοποιήσουμε στους πομπούς;

Υπόδειξη: Πρέπει να διακρίνετε περιπτώσεις για τις σχέσεις μεταξύ των  $h_{1A}$ ,  $h_{2A}$ ,  $h_{1B}$  και  $h_{2B}$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορείτε να υποθέσετε ότι  $h_{1A} \geq h_{1B}$ .

- (γ) Υποθέτουμε, τώρα, ότι έχουμε πρόσβαση και στους δύο δέκτες A και B μέσω μιας Κεντρικής Μονάδας ΚΜ, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.

Υποθέστε, αρχικά, ότι η ΚΜ είναι ένας διακόπτης που μπορεί να επιλέξει μεταξύ του σήματος που λαμβάνεται στο δέκτη A και του σήματος που λαμβάνεται στο δέκτη B. Δώστε μια περιοχή επιτευξιμων ρυθμών μετάδοσης,  $\mathcal{R}$ , μεταξύ των πομπών 1 και 2 και της ΚΜ. Τι μπορείτε να πείτε για την περιοχή χωρητικότητας του νέου καναλιού; Είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την περιοχή χωρητικότητας του Ερωτήματος (β);

- (\*δ) Υποθέτουμε, τέλος, ότι η ΚΜ μπορεί να συνδυάσει γραμμικώς τα λαμβανόμενα σήματα στους δέκτες A και B, δηλαδή ότι μπορεί να σχηματίσει το σήμα  $\alpha Y_1 + \beta Y_2$ . Θέλουμε να δείξουμε ότι η περιοχή χωρητικότητας του καναλιού μεταξύ των



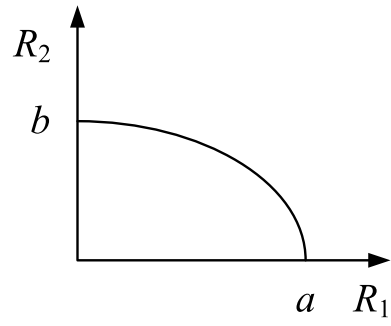
Σχήμα 3: Μετάδοση από 2 πομπούς σε 2 δέκτες. Οι δέκτες συνδέονται σε Κεντρική Μονάδα ΚΜ.

πομπών 1 και 2 και της εξόδου της ΚΜ είναι υπερσύνολο της περιοχής ρυθμών μετάδοσης του Ερωτήματος (γ). Υπενθυμίζεται ότι οι θόρυβοι  $Z_A$  και  $Z_B$  στους δέκτες είναι ανεξάρτητοι. Θεωρούμε, επίσης, ότι η ΚΜ δεν εισάγει νέο θόρυβο (πέραν αυτού των δεκτών Α και Β).

- i. Βρείτε το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης που μπορεί να επιτύχει ο πομπός 1. Ποια βάρη  $\alpha$  και  $\beta$  αντιστοιχούν σε αυτό το ρυθμό μετάδοσης; Επαναλάβετε για τον πομπό 2.
- ii. Βρείτε το μέγιστο άθροισμα ρυθμών μετάδοσης  $R_1 + R_2$  που μπορούμε να επιτύχουμε με (έξυπνο) διαμερισμό χρόνου (time division), αν, δηλαδή, ο πομπός 1 μεταδίδει μόνος του για ποσοστό  $c$  του χρόνου και ο πομπός 2 μεταδίδει μόνος του για ποσοστό  $1 - c$ . Τα βάρη  $\alpha$  και  $\beta$  που χρησιμοποιεί η ΚΜ μπορούν να αλλάζουν όταν αλλάζει ο πομπός ο οποίος μεταδίδει.
- iii. Συγκρίνετε με το μέγιστο άθροισμα ρυθμών μετάδοσης που είναι επιτεύξιμο στην περίπτωση του Ερωτήματος (γ). Δείξτε ότι το άθροισμα που βρήκατε στην περίπτωση που η ΚΜ μπορεί να συνδυάσει γραμμικώς τα σήματα είναι μεγαλύτερο. Επομένως, και η περιοχή χωρητικότητας (ως υπερσύνολο της περιοχής επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης) θα είναι υπερσύνολο της περιοχής επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης του Ερωτήματος (γ).

#### 6. Σημεία χωρητικότητας (Cover & Thomas 15.12)

- (α) Για το υποβαθμισμένο BC  $X \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_2$ , βρείτε τα σημεία  $a$  και  $b$  όπου η περιοχή χωρητικότητας τέμνει τους άξονες  $R_1$  και  $R_2$ , αντίστοιχα (Σχήμα 4).



Σχήμα 4: Περιοχή χωρητικότητας υποβαθμισμένου BC.

(β) Δείξτε ότι  $b \leq a$ .