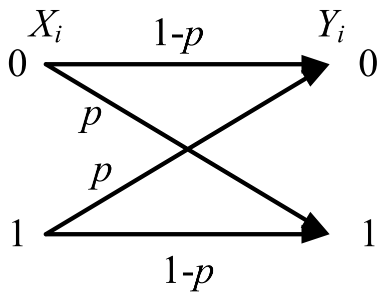
ΕΕ728 (22Α004) - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
Ενδεικτικές λύσεις 2ης Σειράς Ασκήσεων

1. ***Τα κανάλια με μνήμη έχουν μεγαλύτερη χωρητικότητα – Cover & Thomas 7.3 (τροποποιημένη)**

   Θεωρήστε το κανάλι $Y_i = X_i \oplus Z_i$, όπου $\oplus$ πρόσθεση modulo-2 (XOR). Οι μεταβλητές X_i και Y_i είναι δυαδικές, αλλά όχι, κατ' ανάγκη, ομοίως κατανεμημένες. Έστω, επίσης, ότι η Z_i έχει σταθερή μάζα πυκνότητας πιθανότητας $\Pr\{Z_i = 1\} = p = 1 - \Pr\{Z_i = 0\}$. Ωστόσο, οι $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ *δεν* είναι, κατ' ανάγκη, ανεξάρτητες.

   (α) Δώστε ένα σχεδιάγραμμα του καναλιού. Μοιάζει με κάποιο γνωστό σας κανάλι; Σε τι διαφέρει (αν διαφέρει);

   Απάντηση:



   Ένα σχεδιάγραμμα του καναλιού δίνεται στο σχήμα. Πρόκειται για το δυαδικό συμμετρικό κανάλι, με τη διαφορά ότι στο δυαδικό συμμετρικό κανάλι οι πιθανότητες αναστροφής είναι ανεξάρτητες μεταξύ διαφορετικών χρήσεων του καναλιού.

   (β) Εάν οι Z_i είναι ανεξάρτητες, αν, δηλαδή, το κανάλι δεν έχει μνήμη, ποια είναι η χωρητικότητά του και με ποια κατανομή $p(x)$ επιτυγχάνεται; Ονομάστε αυτή τη χωρητικότητα C.

   Απάντηση:

   Εάν το κανάλι δεν έχει μνήμη, ταυτίζεται, δηλαδή, με το δυαδικό συμμετρικό κανάλι, η χωρητικότητά του ισούται με $C = 1 - H(p)$.

   (γ) Επιστρέφοντας στη γένική περίπτωση όπου οι $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ δεν είναι, κατ' ανάγκη, ανεξάρτητες, δείξτε ότι, εάν η είσοδος είναι ανεξάρτητη και ομοίως κατανεμημένη $Bern(1/2)$,

$$I(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \geq nC,$$

όπου C η χωρητικότητα του καναλιού χωρίς μνήμη του Ερωτήματος (β).

Απάντηση:

Μπορούμε να γράψουμε

$$
\begin{aligned}
I(X_1, X_2, \dots, X_n; Y_1, Y_2, \dots, Y_n) &= H(X_1, X_2, \dots, X_n) - H(X_1, X_2, \dots, X_n | Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \\
&\overset{(\alpha)}{=} H(X_1, X_2, \dots, X_n) - H(Z_1, Z_2, \dots, Z_n | Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \\
&\overset{(\beta)}{\geq} H(X_1, X_2, \dots, X_n) - H(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) \\
&\overset{(\gamma)}{\geq} H(X_1, X_2, \dots, X_n) - \sum H(Z_i) \\
&= H(X_1, X_2, \dots, X_n) - nH(p) \\
&\overset{(\delta)}{=} n - nH(p) = nC.
\end{aligned}
$$

(α) $Y_i = X_i \oplus Z_i \Rightarrow X_i = Y_i \oplus Z_i$, (β) η υπό συνθήκη εντροπία δεν υπερβαίνει την εντροπία, (γ) η από κοινού εντροπία δεν υπερβαίνει το άθροισμα των επί μέρους εντροπιών, (δ) Οι X_i είναι i.i.d και ακολουθούν κατανομή Bernoulli(1/2).

(δ) Με βάση το Ερώτημα (γ), συμπεράνετε ότι, για τη χωρητικότητα του καναλιού με μνήμη $C' \triangleq \frac{1}{n} \max_{p(x)} I(X_1, X_2, \dots, X_n; Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, ισχύει $C' \geq C$.

Απάντηση:

Στο προηγούμενο ερώτημα δείξαμε ότι, για X_i i.i.d, Bern(1/2), $I(X_1, X_2, \dots, X_n; Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \geq nC$. Επομένως,

$$
\begin{aligned}
C' &= \frac{1}{n} \max_{p(\mathbf{x})} I_p(X_1, X_2, \dots, X_n; Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \\
&\geq \frac{1}{n} I_{p(\mathbf{x})=\text{i.i.d Bern}(1/2)}(X_1, X_2, \dots, X_n; Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \geq C.
\end{aligned}
$$

(ε) Δώστε μια διαισθητική δικαιολόγηση για το αποτέλεσμα που αποδείξατε στο (δ), ότι, δηλαδή, η χωρητικότητα των καναλιών χωρίς μνήμη δεν μπορεί να υπερβεί τη χωρητικότητα των αντίστοιχων καναλιών με μνήμη.

Απάντηση:

Σε κανάλια χωρίς μνήμη, γνώση των εξόδων κατά τις χρονικές στιγμές $1, 2, \dots, n-1$ δε μας παρέχει καμία πληροφορία για τη χρονική στιγμή n. Αντίθετα, η συμπεριφορά καναλιών με μνήμη εξαρτάται σε κάποιο βαθμό από τις προηγούμενες εισόδους (και εξόδους). Επομένως, έχουμε κάποια πληροφορία για το πώς θα συμπεριφερθεί το κανάλι, γεγονός το οποίο οδηγεί σε αύξηση της χωρητικότητας.

2. **Υποβέλτιστοι κώδικες – Cover & Thomas 7.9**

   Θεωρήστε το κανάλι Z με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad x, y \in \{0, 1\}.$$

   Έστω ότι κατασκευάζουμε τυχαίο κώδικα $\left(2^{nR}, n\right)$ με ρίψεις *αμερόληπτου* κέρματος. Με τον τρόπο αυτό δεν επιτυγχάνουμε μετάδοση με τη χωρητικότητα (γιατί;). Βρείτε το μέγιστο εφικτό ρυθμό μετάδοσης, R, ώστε η *μέση* τιμή της πιθανότητας σφάλματος $P_e^{(n)}$ επί όλων των κωδίκων που κατασκευάζονται τυχαία με αμερόληπτες ρίψεις να τείνει στο 0 καθώς το μήκος, n, του κώδικα τείνει στο άπειρο.

   Απάντηση:

   Στο μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας" βρήκαμε ότι το κανάλι Z με $f \triangleq \Pr\{Y = 0|X = 1\} = 1/2$ έχει χωρητικότητα $C = H(1/5) - 2/5$ η οποία επιτυγχάνεται με $p = \Pr\{X = 1\} = 2/5$. Αν μεταδώσουμε με $p = 1/2$ (αμερόληπτο κέρμα),

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= H\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\approx 0.8113 - \frac{1}{2} = 0.3113 < 0.322 \approx C. \end{aligned}$$

   Συνεπώς, ο ρυθμός μετάδοσης που επιτυγχάνεται αν χρησιμοποιήσουμε αμερόληπτο κέρμα για τη δημιουργία του κώδικα είναι μικρότερος από τη χωρητικότητα του καναλιού Z με $f = 1/2$.

   Ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης που μπορούμε να επιτύχουμε είναι $R = 0.3113$.

3. **Κανάλι διακριτών εισόδων, συνεχών εξόδων – Cover & Thomas 9.15**

   Έστω $\Pr\{X = 1\} = p$, $\Pr\{X = 0\} = 1-p$ και $Y = X+Z$, όπου η Z είναι κατανεμημένη *ομοιόμορφα* στο διάστημα $[0, a]$, $a > 1$. Επίσης, η Z είναι ανεξάρτητη της X.

   (α) Υπολογίστε την $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$.

   Απάντηση:

   $H(X) = H(p)$.

   Για τον υπολογισμό της $H(X|Y)$ διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

   (a) $Y < 1$: $X = 0$ με πιθανότητα 1.

   (b) $Y > a$: $X = 1$ με πιθανότητα 1.

   (c) $1 \leq Y \leq a$: $X = 0$ ή 1 με πιθανότητα $1 - p$ και p, αντίστοιχα.

Συνεπώς, $H(X|Y) = \Pr\{Y \in [1,a]\} H(X|Y \in [1,a]) = \frac{a-1}{a} H(p) = \left(1 - \frac{1}{a}\right) H(p)$.
Άρα, $I(X;Y) = H(p) + H(p)\left(\frac{1}{a} - 1\right) = \frac{1}{a} H(p)$.
Παρατηρήστε ότι, για $a = 1$, $I(X;Y) = H(p)$. Επίσης, η σχέση δεν ισχύει για $a < 1$. Στην περίπτωση αυτή $H(X|Y) = 0$ και $I(X;Y) = H(p)$. Καθώς το a αυξάνει, αυξάνει και η περιοχή "επικάλυψης" των εξόδων που αντιστοιχούν σε $X = 0$ και 1, με αποτέλεσμα να ελαττώνεται και η πληροφορία που μπορούμε να μεταδώσουμε μέσα στο κανάλι.

(β) Υπολογίστε, τώρα, την $I(X;Y)$ με διαφορετικό τρόπο, με χρήση της $I(X;Y) = h(Y) - h(Y|X)$.

Απάντηση:

$h(Y|X) = h(Z) = -\int_0^a \frac{1}{a} \log \frac{1}{a} da = \log a$.
Για να βρούμε την $h(Y)$ υπολογίζουμε τη σ.π.π. της Y:

$$f_Y(y) = \begin{cases} (1-p)/a & \text{για} \quad 0 \le y < 1 \\ 1/a & \text{για} \quad 1 \le y < a \\ p/a & \text{για} \quad a \le y < 1+a \end{cases}$$

Με πράξεις,

$$h(Y) = -\int_0^{1+a} f_Y(y) \log_2 f_Y(y) dy = \frac{1}{a} H(p) + \log a.$$

Επομένως, και πάλι, όπως περιμέναμε, $I(X;Y) = \frac{1}{a} H(p)$.

(γ) Υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού μεγιστοποιώντας ως προς p.

Απάντηση:

Παρατηρούμε εύκολα ότι, για οποιοδήποτε a, η χωρητικότητα επιτυγχάνεται με $p = 1/2$. $C = \frac{1}{a}$ bits/χρήση του καναλιού.

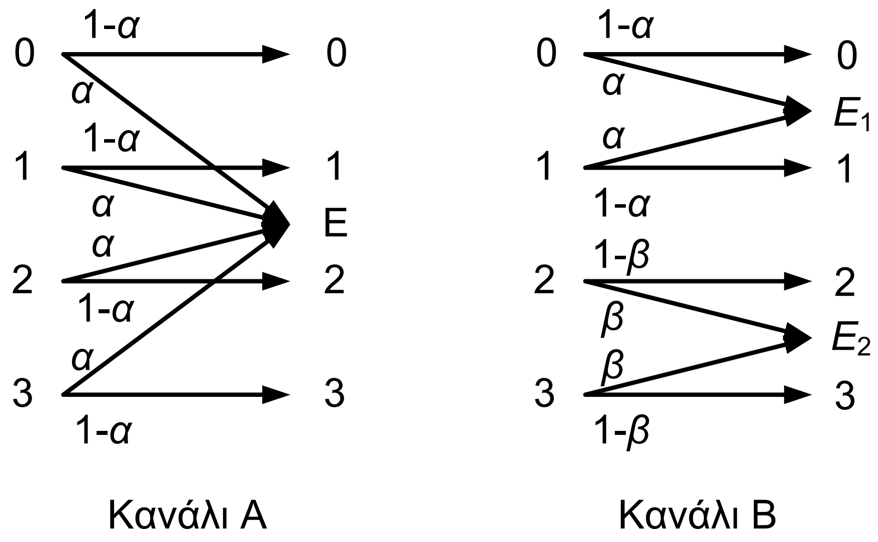
4. **Τετραδικά Κανάλια διαγραφής (Προχωρημένα Θέματα Θ.Π., Τελική Εξέταση Ιουνίου 2008)**

Θεωρήστε τα κανάλια διαγραφής χωρίς μνήμη του Σχήματος 1. Στο κανάλι Α στέλνουμε ένα από 4 πιθανά σύμβολα. Ο δέκτης γνωρίζει πότε η μετάδοση έχει γίνει σωστά και πότε έχει προκύψει διαγραφή. Στο κανάλι Β, όπως και στο κανάλι Α, ο πομπός επιλέγει κάθε φορά να μεταδώσει ένα από 4 σύμβολα. Εάν συμβεί διαγραφή ο δέκτης γνωρίζει όχι μόνο ότι συνέβη διαγραφή, αλλά, επιπλέον, το υποσύνολο στο οποίο ανήκει το σύμβολο που μεταδόθηκε από τον πομπό ($\{0,1\}$ ή $\{2,3\}$).

(α) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού Α, και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται.

Απάντηση:

Από τον ορισμό της χωρητικότητας,



Σχήμα 1: Τετραδικά Κανάλια Διαγραφής

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)}\{H(Y) - H(Y|X)\} = \max_{p(x)} H(Y) - H(\alpha).$$

Ανεξάρτητα από την κατανομή της X, $\Pr\{E\} = \alpha$. Προκειμένου να μεγιστοποιήσουμε την εντροπία της Y, επιλέγουμε ομοιόμορφη κατανομή για τα υπόλοιπα ενδεχόμενα Y και, επομένως, ομοιόμορφη κατανομή για τη X. Συνεπώς,

$$C = \max_{p(x)}\{H(X)-H(X|Y)\} = \log 4-\alpha H(X|Y=E)-(1-\alpha)H(X|Y \neq E) = 2-2\alpha.$$

Η άσκηση μπορούσε, επίσης, να λυθεί παρατηρώντας ότι το κανάλι είναι ασθενώς συμμετρικό και, επομένως, η χωρητικότητα επιτυγχάνεται με χρήση ομοιόμορφης κατανομής στην είσοδο. Επίσης, μπορούσε να λυθεί υποθέτοντας γενικές τιμές για τις πιθανότητες εισόδου $p(X = i)$ και μεγιστοποιώντας την $C = H(Y) - H(Y|X)$. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή, την οποία χρησιμοποίησαν κάποιοι, ήταν και πιο χρονοβόρα.

(β) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού B όταν $\alpha = \beta$, και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Συγκρίνετε με την τιμή που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Σχολιάστε.

Απάντηση:

Από το δυαδικό κανάλι διαγραφής γνωρίζουμε ότι η χωρητικότητα επιτυγχάνεται με ομοιόμορφη κατανομή εισόδου. Επομένως, τα σύμβολα 0 και 1 πρέπει να μεταδίδονται με την ίδια πιθανότητα. Το ίδιο ισχύει και για τα 2 και 3. Αυτό μπορεί να δειχτεί και πιο αυστηρά με χρήση του ορισμού της χωρητικότητας. Όταν $\alpha = \beta$, από τη συμμετρία του προβλήματος (ή με την παρατήρηση ότι και αυτό το κανάλι, όπως και το κανάλι του προηγούμενου ερωτήματος, είναι ασθενώς συμμετρικό), όλα τα σύμβολα πρέπει να μεταδίδονται με την ίδια πιθανότητα. Συνεπώς, $p(x) = \frac{1}{4}$ για όλα τα x.

$$C = \max_{p(x)}\{H(X) - H(X|Y)\} = \log 4 - \frac{\alpha}{2}H(X|Y = E_1) - \frac{\alpha}{2}H(X|Y = E_2) = 2 - \alpha.$$

Παρατηρούμε ότι η χωρητικότητα του καναλιού B με $\alpha = \beta$ είναι μεγαλύτερη από τη χωρητικότητα του καναλιού A. Διαισθητικά το αποτέλεσμα είναι σωστό, δεδομένου ότι στο κανάλι B υπάρχουν δύο είδη διαγραφών οπότε έχουμε περισσότερη πληροφορία για το μεταδοθέν σύμβολο (γνωρίζουμε ότι είναι ένα από 2 πιθανά σύμβολα, σε αντίθεση με το κανάλι A όπου δε γνωρίζουμε τίποτα άλλο πλην του ότι έχει προκύψει διαγραφή).

Κάποιοι θεώρησαν εσφαλμένα ότι το κανάλι αποτελείται από δύο κανάλια που χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα. Παρόλο που τα δύο ''υπο-κανάλια'' δεν παρεμβάλλονται το ένα στο άλλο, κάθε χρονική στιγμή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο ένα σύμβολο εισόδου και, επομένως, μπορούμε να μεταδώσουμε μόνο σε ένα ''υποκανάλι''.

(γ) Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού B όταν $\alpha \neq \beta$, και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Συγκρίνετε με την τιμή που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Σχολιάστε. Ποια είναι η χωρητικότητα στην ειδική περίπτωση όπου $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ και με ποια κατανομή εισόδου επιτυγχάνεται;

Απάντηση:

Όταν $\alpha \neq \beta$, το κανάλι δεν είναι πλέον συμμετρικό. Ωστόσο, τα επιμέρους κανάλια είναι συμμετρικά. Επομένως, γενικά, η $p(x)$ έχει κατανομή $\{\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}, \frac{1-\delta}{2}, \frac{1-\delta}{2}\}$.

$$\begin{aligned}
C &= \max_{p(x)}\{H(X) - H(X|Y)\} \\
&\max_{\delta}\left\{-2 \times \frac{\delta}{2}\log\frac{\delta}{2} - 2 \times \frac{1-\delta}{2}\log\frac{1-\delta}{2} - \delta\alpha - (1-\delta)\beta\right\} \\
&= \max_{\delta}\left\{-\delta\log\frac{\delta}{2} - (1-\delta)\log\frac{1-\delta}{2} - \delta\alpha - (1-\delta)\beta\right\},
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $H(X|Y) = 0 \cdot H(X|Y \neq \{E_1, E_2\}) + \alpha\delta H(X|Y = E_1) + \beta(1-\delta)H(X|Y = E_2)$.

Το όρισμα της max είναι κοίλη ($\cap$) συνάρτηση της παραμέτρου δ, (άθροισμα κοίλων και γραμμικών συναρτήσεων). Για να βρούμε το μέγιστο παίρνουμε την παράγωγο ως προς δ:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\delta}\left\{-\delta\log\frac{\delta}{2}-(1-\delta)\log\frac{1-\delta}{2}-\delta\alpha-(1-\delta)\beta\right\}\\
=&\frac{\partial}{\partial\delta}\left\{-\delta\log e\ln\frac{\delta}{2}-(1-\delta)\log e\ln\frac{1-\delta}{2}-\delta\alpha-(1-\delta)\beta\right\}\\
=&-\log e\ln\frac{\delta}{2}-\log e+\log e\ln\frac{1-\delta}{2}+\log e-\alpha+\beta\\
=&\log e\ln\frac{1-\delta}{\delta}-\alpha+\beta=0\\
\Rightarrow&\log\frac{1-\delta}{\delta}=\alpha-\beta\Rightarrow\frac{1-\delta}{\delta}=2^{\alpha-\beta}\\
\Rightarrow&\delta^*=\frac{1}{1+2^{\alpha-\beta}}.
\end{aligned}
$$

Η χωρητικότητα ισούται με

$$
\begin{aligned}
C&=-\delta^*\log\frac{\delta^*}{2}-(1-\delta^*)\log\frac{1-\delta^*}{2}-\delta^*\alpha-(1-\delta^*)\beta\\
&=-\delta^*\log\delta^*-(1-\delta^*)\log(1-\delta^*)+\log 2-\delta^*\alpha-(1-\delta^*)\beta\\
&=1+H(\delta^*)-\delta^*\alpha-(1-\delta^*)\beta.
\end{aligned}
$$

Με πράξεις,

$$
C=1+\log(1+2^{\alpha-\beta})-\alpha=1+\log(1+2^{\beta-\alpha})-\beta.
$$

Παρατηρούμε ότι, για δεδομένο α, καθώς το β αυξάνει, η χωρητικότητα ελαττώνεται. Η χωρητικότητα αυξάνει καθώς το β τείνει στο 0. Για $\beta=0$, $C=1+\log(1+2^{\alpha})-\alpha$. Για $\alpha=1$ και $\beta=0$, $C=\log 3$ και $\delta=\frac{1}{3}$. Το αποτέλεσμα έχει νόημα: Όταν τα 0 και 1 πάντα διαγράφονται, ενώ τα 2 και 3 φτάνουν πάντοτε στο δέκτη ως έχουν, μπορούμε να στείλουμε $\log 3$ bits πληροφορίας. Για να στείλουμε τα μηνύματα 2 και 3 χρησιμοποιούμε τα σύμβολα 2 και 3, αντίστοιχα. Για να στείλουμε το μήνυμα 1 χρησιμοποιούμε τα σύμβολα 0 και 1 με οποιαδήποτε αναλογία, αρκεί το άθροισμά των πιθανοτήτων εκπομπής να ισούται με $p(0)+p(1)=\frac{1}{3}$.
Παρατηρούμε, επίσης, ότι, για $\alpha=\beta$, $C=1+1-\alpha=1+1-\beta$, το οποίο συμφωνεί με το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος.

5. **Το δυαδικό συμμετρικό κανάλι διαγραφής (BSEC) (Προχωρημένα Θέματα Θ. Π., Τελική Εξέταση, Ιούνιος 2010)**

Σε αυτό το πρόβλημα θα θεωρήσουμε ένα πιο ρεαλιστικό *δυαδικό* κανάλι διαγραφής, το BSEC. Στο BSEC, επιπλέον των διαγραφών, ενδέχεται να έχουμε και αναστροφή ψηφίου.

Συγκεκριμένα, ο πίνακας μετάβασης του BSEC είναι ο

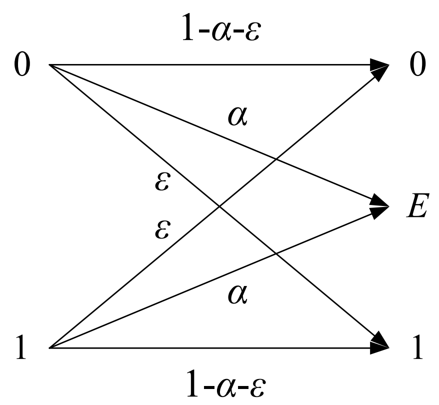
$$P_{Y|X} = \begin{bmatrix} 1-\epsilon-\alpha & \alpha & \epsilon \\ \epsilon & \alpha & 1-\epsilon-\alpha \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{X} = \{0, 1\}$ και $\mathcal{Y} = \{0, E, 1\}$.

(α) Σχεδιάστε το διάγραμμα μεταβάσεων του καναλιού. Είναι το κανάλι συμμετρικό; Είναι ασθενώς συμμετρικό;

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Το διάγραμμα μεταβάσεων του καναλιού έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 2. Το κανάλι δεν είναι συμμετρικό ούτε ασθενώς συμμετρικό για γενικές τιμές των α και ϵ.



Σχήμα 2: Κανάλι για υπολογισμό C_{UB}.

(β) Βρείτε τη χωρητικότητα του BSEC, καθώς και την κατανομή εισόδου, p^*, με την οποία επιτυγχάνεται η χωρητικότητα. Συγκρίνετε με τη χωρητικότητα του BEC ($\epsilon = 0$).

Υπόδειξη: Ένας τρόπος για να αποφύγετε τις πολλές πράξεις είναι να χρησιμοποιήσετε την αρχή διαχωρισιμότητας της εντροπίας (2 φορές).

$\boxed{\text{Απάντηση:}}$

Από τον ορισμό της χωρητικότητας,

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \{H(Y) - H(Y|X)\}.$$

Παρατηρούμε, κατ' αρχάς, ότι η $H(Y|X)$ δεν εξαρτάται από την $p(x)$. Έστω τ.μ. V που ισούται με 1 στην περίπτωση διαγραφής, αλλιώς με 0. Από την αρχή διαχωρισιμότητας της εντροπίας,

$$\begin{aligned}
H(Y|X) &= H(1-\alpha-\epsilon, \alpha, \epsilon) \\
&= H(V|X) + \alpha H(Y|X, V=1) + (1-\alpha) H(Y|X, V=0) \\
&= H(\alpha) + (1-\alpha) H\left(\frac{1-\alpha-\epsilon}{1-\alpha}, \frac{\epsilon}{1-\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Θέτοντας $\Pr\{X=0\} = p$, $\Pr\{Y=0\} = p(1-\alpha-\epsilon) + (1-p)\epsilon = p(1-\alpha-2\epsilon)+\epsilon$. $\Pr\{Y=1\} = 1 - \Pr\{Y=0\} - \alpha = 1-\alpha-\epsilon-p(1-\alpha-2\epsilon)$.
Χρησιμοποιώντας, και πάλι, την αρχή διαχωρισιμότητας της εντροπίας,

$$\begin{aligned}
H(Y) &= H(V) + \alpha H(Y|V=1) + (1-\alpha) H(Y|V=0) \\
&= H(V) + (1-\alpha) H(Y|V=0) \\
&= H(\alpha) + (1-\alpha) H\left(\frac{p(1-\alpha-2\epsilon)+\epsilon}{1-\alpha}, \frac{1-\alpha-\epsilon-p(1-\alpha-2\epsilon)}{1-\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι μόνο ο δεύτερος όρος εξαρτάται από την κατανομή, p. Αρκεί να επιλέξουμε την p έτσι ώστε $\frac{p(1-\alpha-2\epsilon)+\epsilon}{1-\alpha} = \frac{1}{2}$. Με πράξεις, $p^* = \frac{1}{2}$. Συνεπώς,

$$H(Y) = H(\alpha) + (1-\alpha).$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση για τη χωρητικότητα,

$$\begin{aligned}
C &= \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \{H(Y) - H(Y|X)\} = \max_{p(x)} H(Y) - H(Y|X) \\
&= H(\alpha) + (1-\alpha) - H(\alpha) - (1-\alpha) H\left(\frac{1-\alpha-\epsilon}{1-\alpha}, \frac{\epsilon}{1-\alpha}\right) \\
&= (1-\alpha) - (1-\alpha) H\left(\frac{1-\alpha-\epsilon}{1-\alpha}, \frac{\epsilon}{1-\alpha}\right). \\
&= 1-\alpha + (1-\alpha)\left[\frac{1-\alpha-\epsilon}{1-\alpha} \log \frac{1-\alpha-\epsilon}{1-\alpha} + \frac{\epsilon}{1-\alpha} \log \frac{\epsilon}{1-\alpha}\right] \\
&= 1-\alpha + (1-\alpha-\epsilon) \log(1-\alpha-\epsilon) + \epsilon \log \epsilon - (1-\alpha) \log(1-\alpha).
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, στη γενική περίπτωση, η χωρητικότητα του BSEC είναι μικρότερη από τη χωρητικότητα του BEC. Επίσης, η κατανομή που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα του BSEC είναι η ομοιόμορφη για οποιαδήποτε τιμή του α και του ϵ.

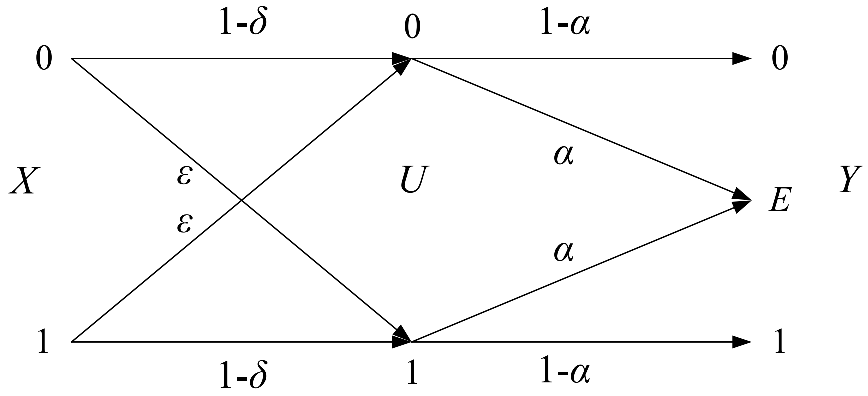
Σημείωση: Θα μπορούσατε (όπως έκαναν κάποιοι και στο διαγώνισμα) να χρησιμοποιήσετε τη συμμετρία του διαγράμματος μετάβασης του καναλιού για να συμπεράνετε απευθείας ότι η ομοιόμορφη κατανομή εισόδου επιτυγχάνει τη χωρητικότητα χωρίς να το αποδείξετε με πράξεις. Στη συγκεκριμένη περίπτωση (του BSEC), η ομοιόμορφη κατανομή εισόδου είναι η μόνη που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα, αλλά αυτό δεν ισχύει πάντοτε (ένα παράδειγμα είναι η ενθόρυβη γραφομηχανή).

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τη χωρητικότητα του BSEC με έναν εναλλακτικό τρόπο.

(γ) Δείξτε ότι το BSEC ισοδυναμεί με ένα BSC με πιθανότητα αναστροφής ψηφίου $\delta = \frac{\epsilon}{1-\alpha}$ το οποίο ακολουθείται από ένα BEC με πιθανότητα διαγραφής α.

Απάντηση:

Η διαδοχή των δύο καναλιών έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 3. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\Pr\{Y = 0|X = 0\} = \Pr\{Y = 1|X = 1\} = (1 - \delta)(1 - \alpha) = 1 - \alpha - \epsilon$, $\Pr\{Y = 1|X = 0\} = \Pr\{Y = 0|X = 1\} = \delta(1 - \alpha) = \epsilon$ και $\Pr\{Y = E|X = 0\} = \Pr\{Y = E|X = 1\} = 1 - (1 - \alpha - \epsilon) - \epsilon = \alpha$.



Σχήμα 3: BSEC ως διαδοχή BSC και BEC.

(δ) Εάν X είναι η είσοδος στο BSEC, Y η έξοδός του και U η (ενδιάμεση) έξοδος του BSC, χρησιμοποιήστε τα βήματα της απόδειξης της ανισότητας επεξεργασίας δεδομένων για να εκφράσετε την $I(X;Y)$ συναρτήσει μόνο της $I(X;U)$ και της παραμέτρου α.

Απάντηση:

Δεδομένου ότι $X \to U \to Y$, από την ανισότητα επεξεργασίας δεδομένων,

$$\begin{aligned} I(X;U,Y) &= I(X;U) + I(X;Y|U) = I(X;Y) + I(X;U|Y) \Rightarrow \\ I(X;Y) &= I(X;U) - I(X;U|Y). \end{aligned}$$

Για την $I(X;U|Y)$ ισχύει $I(X;U|Y) = \alpha I(X;U|Y = E) + (1-\alpha)I(X;U|Y \neq E)$. Όταν $Y \neq E$, $Y = U$. Συνεπώς, $I(X;U|Y \neq E) = H(U|Y \neq E) - H(U|X,Y \neq E) = H(U|Y = U) - H(U|X,Y = U) = 0$. Αντίθετα, όταν $Y = E$, η αβεβαιότητά μας για την U παραμένει η ίδια όπως και στην έξοδο, U του BSC (λόγω της συμμετρίας του BEC). Επομένως, $I(X;U|Y = E) = H(U|Y = E) - H(U|X,Y = E) = H(U) - H(U|X) = I(X;U)$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι

$$I(X;Y) = I(X;U) - I(X;U|Y) = I(X;U) - \alpha I(X;U) = (1 - \alpha)I(X;U).$$

Σημείωση: Εδώ θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε απευθείας το αποτέλεσμα της Άσκησης 7.27 των Cover & Thomas. Η διαδοχή BSC και BEC είναι μια ειδική περίπτωση της Άσκησης.

(ε) Βρείτε τη χωρητικότητα του BSEC μεγιστοποιώντας την $I(X;U)$ του BSC ως προς την κατανομή της X.

Απάντηση:

Κατά τα γνωστά, $C_{\text{BSC}} = 1 - H(\delta)$ και επιτυγχάνεται με $p^* = \frac{1}{2}$. Επομένως,

$$
\begin{aligned}
C_{\text{BSEC}} &= (1-\alpha)\,(1-H(\delta)) \\
&= (1-\alpha)\left(1 + \frac{1-\alpha-\epsilon}{1-\alpha}\log\frac{1-\alpha-\epsilon}{1-\alpha} + \frac{\epsilon}{1-\alpha}\log\frac{1-\alpha-\epsilon}{1-\alpha}\right) \\
&= 1-\alpha + (1-\alpha-\epsilon)\log\frac{1-\alpha-\epsilon}{1-\alpha} + \epsilon\log\frac{1-\alpha-\epsilon}{1-\alpha} \\
&= 1-\alpha + (1-\alpha-\epsilon)\log(1-\alpha-\epsilon) + \epsilon\log\epsilon - (1-\alpha)\log(1-\alpha).
\end{aligned}
$$

Καταλήξαμε, επομένως, όπως ήταν αναμενόμενο, στην ίδια έκφραση για τη χωρητικότητα και στην ίδια κατανομή εισόδου, p^*.

6. **Waterfilling με περιορισμό μέγιστης ισχύος (Προχωρημένα Θέματα Θ. Π., Τελική Εξέταση, Ιούνιος 2010)**

Σε ορισμένες περιπτώσεις, ενδέχεται να μη θέλουμε να υπερβούμε μια συγκεκριμένη τιμή ισχύος στον πομπό, ακόμα και εάν η ισχύς είναι διαθέσιμη (για παράδειγμα, για λόγους λειτουργίας του ενισχυτή ή για να μην προκαλέσουμε παρεμβολές σε γειτονικές συνδέσεις). Στο πρόβλημα αυτό θα εξετάσουμε πώς πρέπει να μεταβάλουμε τη λύση waterfilling για να ικανοποιήσουμε και ένα περιορισμό μέγιστης ισχύος εκπομπής, $P_{\max,k}$, για κάθε χρήστη, k.

Θεωρούμε K παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια και *συνολική* διαθέσιμη ισχύ P. Η διασπορά του θορύβου σε κάθε κανάλι ισούται με N_k. Η διαθέσιμη ισχύς μπορεί να κατανεμηθεί στα κανάλια όπως επιθυμούμε, αρκεί, σε κάθε κανάλι, η ισχύς να μην υπερβαίνει μια μέγιστη τιμή $P_{\max,k}$. Διευκρινίζεται ότι, στη γενική περίπτωση, η $P_{\max,k}$ δεν είναι η ίδια για όλα τα κανάλια.

(α) Θεωρούμε, κατ' αρχάς, την περίπτωση 2 χρηστών, δηλαδή $K = 2$. Επίσης, *μόνο* σε αυτό το ερώτημα, θεωρούμε ότι *δεν* υπάρχει περιορισμός ισχύος, ή, ισοδύναμα, ότι $P_{\max,k} = P$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι $N_2 \geq N_1$.

Δώστε μια έκφραση σε κλειστή μορφή για τη χωρητικότητα του καναλιού που αποτελείται από τα 2 παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια.

Υπόδειξη: Πρέπει να διακρίνετε περιπτώσεις, ανάλογα με την τιμή της P.

Απάντηση:

Για $P \leq N_2 - N_1$, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μόνο το κανάλι 1. Συνεπώς, $C = C_1(P_1) = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P}{N_1}\right)$.

Για $P > N_2 - N_1$, χρησιμοποιούμε και τα δύο κανάλια: $P_1 = \nu - N_1$ και $P_2 = \nu - N_2$. $P = P_1 + P_2 = 2\nu - N_1 - N_2 \Rightarrow \nu = \frac{P+N_1+N_2}{2}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} C &= C_1(P_1) + C_2(P_2) \\ &= \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P_1}{N_1}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P_2}{N_2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{\nu-N_1}{N_1}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{\nu-N_2}{N_2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\nu}{N_1}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\nu}{N_2}\right). \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας,

$$C = \begin{cases} \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P}{N_1}\right) & \text{όταν} \quad P \leq N_2 - N_1 \\ \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P-N_1+N_2}{2N_1}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P+N_1-N_2}{2N_2}\right) & \text{όταν} \quad P > N_2 - N_1 \end{cases}$$

(β) Θεωρήστε, τώρα, ότι ενδέχεται κάποιες από τις $P_{\max,k}$ (ή όλες) να είναι μικρότερες από P. Για το κανάλι 2 χρηστών ($K = 2$) βρείτε ποιες συνθήκες πρέπει να ισχύουν για τις $P_{\max,1}$ και $P_{\max,2}$ συναρτήσει των P, N_1 και N_2, ώστε οι περιορισμοί να μην επηρεάζουν τη χωρητικότητα, δηλαδή η χωρητικότητα για *δεδομένες* τιμές των P, N_1 και N_2 να ισούται με την τιμή που βρήκατε στο Ερώτημα (α).

Μπορείτε και πάλι να θεωρήσετε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $N_2 \geq N_1$.

Απάντηση:

Για να μην υπεισέρχονται οι περιορισμοί στη χωρητικότητα, πρέπει να βρίσκονται επάνω από το τελικό "επίπεδο" του νερού μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας waterfilling. Επομένως, πρέπει $P_{\max,i} \geq (\nu - N_i)^+$.

Επομένως, αν $P \leq N_2 - N_1$, πρέπει $P_{\max,1} \geq P$. Η τιμή της $P_{\max,2}$ δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα.

Όταν $P > N_2 - N_1$, πρέπει $P_{\max,1} \geq \nu - N_1 = \frac{P+N_2-N_1}{2}$ και $P_{\max,2} \geq \nu - N_2 = \frac{P+N_1-N_2}{2}$.

(γ) Στη συνέχεια, για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις, θεωρούμε ότι $P_{\max,1} = P_{\max,2} = P_{\max}$. Επίσης, θεωρούμε ότι $P_{\max,1} + P_{\max,2} = 2P_{\max} \geq P$, δηλαδή ότι όλη η συνολική ισχύς κατανέμεται, τελικά στα κανάλια.

Βρείτε τη χωρητικότητα των 2 παράλληλων καναλιών για οποιαδήποτε τιμή του $P_{\max}$ (δηλαδή, ακόμα και για τιμές που ενδέχεται να αλλάζουν τη βέλτιστη λύση του Ερωτήματος (α)).

Απάντηση:

Ο περιορισμός είναι η $P_{\max,1}$, δεδομένου ότι το κανάλι 1 έχει χαμηλότερο θόρυβο.

Εάν $P \leq N_2 - N_1$,

$$C = \begin{cases} \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P}{N_1}\right) & \text{όταν} \quad P_{\max,1} \geq P \\ \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P_{\max}}{N_1}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P-P_{\max}}{N_2}\right) & \text{όταν} \quad P_{\max} < P. \end{cases}$$

Εάν $P > N_2 - N_1$,

$$C = \begin{cases} \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P-N_1+N_2}{2N_1}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P+N_1-N_2}{2N_2}\right) & \text{όταν} \quad P_{\max} \geq \frac{P-N_1+N_2}{2} \\ \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P_{\max}}{N_1}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P-P_{\max}}{N_2}\right) & \text{όταν} \quad P_{\max} < \frac{P-N_1+N_2}{2}. \end{cases}$$

(δ) Στη συνέχεια, θεωρούμε τη γενική περίπτωση K χρηστών. Υποθέστε ότι, αρχικά, εκτελούμε τον αλγόριθμο waterfilling χωρίς περιορισμούς. Μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου παρατηρούμε ότι σε κάποια κανάλια έχουμε υπερβεί την $P_{\max,k}$. Υποθέστε ότι, μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου waterfilling έχει κατανεμηθεί μη μηδενική ισχύς σε όλα τα K κανάλια (δηλαδή $P_k > 0$ για όλα τα k). Υποθέστε, επίσης, ότι στα κανάλια όπου δεν έχουμε υπερβεί την $P_{\max,k}$ δεν υπάρχει περιορισμός ισχύος. Πώς πρέπει να κατανείμουμε την πλεονάζουσα ισχύ $\sum_{k\in\mathcal{O}}(P_k - P_{\max,k})$ στα υπόλοιπα κανάλια ώστε να μεγιστοποιήσουμε το άθροισμα ρυθμών μετάδοσης; ($\mathcal{O}$ είναι το σύνολο των καναλιών όπου ο αλγόριθμος waterfilling υπερέβη τις $P_{\max,k}$ και P_k οι λύσεις του αλγορίθμου waterfilling χωρίς περιορισμούς).

Απάντηση:

Σχηματικά, αν προσθέσουμε την πλεονάζουσα ισχύ στα κανάλια που απομένουν αν βγάλουμε τα κανάλια όπου υπερβήκαμε την $P_{\max,k}$, το επίπεδο του νερού θα ανέβει κατά την ίδια ποσότητα σε όλα τα κανάλια που απομένουν. Επομένως, η ισχύς μοιράζεται ισόποσα σε όλα τα κανάλια του $\mathcal{O}$. Ένας άλλος τρόπος (στην ουσία, ο ίδιος), είναι από τις σχέσεις $P_k = \nu - N_k$. Επειδή χρησιμοποιούνται όλα τα κανάλια, $P_{k,new} = \nu_{new} - N_k = \nu + \nu_{add} - N_k = \nu_{add} + P_k$. Τέλος, ένας τρόπος είναι με βάση την παράγωγο της $\frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P_k}{N_k}\right)$: $\frac{d}{dP_k}\frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P_k}{N_k}\right) = \frac{1}{2}\frac{N_k}{N_k+P_k}\frac{1}{N_k} = \frac{1}{2(P_k+N_k)} = \frac{1}{2\nu}$. Επομένως, όλα τα κανάλια έχουν το ίδιο κόστος ανά μονάδα επιπρόσθετης ισχύος και η ισχύς πρέπει να κατανεμηθεί σε αυτά ισόποσα.

(ε) Προτείνετε έναν τροποποιημένο αλγόριθμο waterfilling για την περίπτωση που έχουμε περιορισμούς ισχύος, $P_{\max,k}$, σε κάθε κανάλι. Σε αυτό το ερώτημα θεωρήστε τη γενική περίπτωση, δηλαδή ότι υπάρχουν περιορισμοί σε όλα τα κανάλια. Επίσης, σε αντίθεση με το προηγούμενο ερώτημα, υπάρχει περίπτωση μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου waterfilling χωρίς περιορισμούς ισχύος κάποια κανάλια να μη χρησιμοποιούνται (δηλαδή να έχουμε $P_k = 0$).

Απάντηση:

Η βασική παρατήρηση είναι αυτή που έγινε στο Ερώτημα (δ), ότι, δηλαδή, μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου waterfilling χωρίς περιορισμούς, όσα κανάλια χρησιμοποιούνται έχουν το ίδιο επίπεδο "θορύβου". Εφαρμόζουμε, αρχικά, τον αλγόριθμο waterfilling χωρίς περιορισμούς. Στη συνέχεια, αν υπάρχουν κανάλια στα οποία έχουμε υπερβεί τον περιορισμό ισχύος, περιορίζουμε την ισχύ τους στις τιμές $P_{\max,k}$ και υπολογίζουμε την πλεονάζουσα ισχύ $\sum_{k\in\mathcal{O}}(P_k - P_{\max,k})$. Αφαιρούμε τα κανάλια του συνόλου $\mathcal{O}$ και εφαρμόζουμε waterfilling (χωρίς περιορισμούς) στα εναπομείναντα κανάλια με την εναπομείνουσα ισχύ. Στα κανάλια που χρησιμοποιήθηκαν από τον αλγόριθμο waterfilling χωρίς περιορισμούς, $N_k = \nu$, ενώ στα κανάλια που δε χρησιμοποιήθηκαν, διατηρούμε τον αρχικό θόρυβο (ο οποίος είναι μεγαλύτερος από ν). Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία έως ότου κατανείμουμε όλη την ισχύ, P, ή έως ότου δεν μπορούμε να κατανείμουμε ισχύ σε κανένα κανάλι λόγω των περιορισμών.