EE728 (22A004) - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
1η Σειρά Ασκήσεων
(Εντροπία, Αμοιβαία Πληροφορία, Ανισότητα Fano, AEP)

Παράδοση: Έως 8/4/2011 5 μ.μ. – Στο γραφείο μου

Διευκρίνιση: Η επίλυση των ασκήσεων είναι προαιρετική. Σκοπός τους είναι να λειτουργήσουν συμπληρωματικά με τις διαλέξεις.

Επιτρέπεται η συνεργασία σε μικρές ομάδες, αλλά όχι η αντιγραφή.

1. **Επεξεργασία Δεδομένων (Cover & Thomas 2.15)**

   Έστω ότι οι τ.μ. $X_1 \to X_2 \to X_3 \to \ldots \to X_n$ σχηματίζουν αλυσίδα Markov, δηλαδή $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(x_1)p(x_2|x_1)\ldots p(x_n|x_{n-1})$. Βρείτε την πιο απλή έκφραση που μπορείτε για την $I(X_1; X_2, X_3, \ldots, X_n)$.

2. **Μια εναλλακτική απόδειξη της ανισότητας $D(p||q) \geq 0$ (Cover & Thomas 2.26)**

   (α) Δείξτε ότι, για $0 < x < \infty$, $\ln x \leq x - 1$.

   (β) Δικαιολογήστε τα παρακάτω βήματα

   $$\begin{aligned} -D(p||q) &= \sum_x p(x) \ln \frac{q(x)}{p(x)} \\ &\overset{(i)}{\leq} \sum_x p(x) \left(\frac{q(x)}{p(x)} - 1 \right) \\ &\overset{(ii)}{\leq} 0. \end{aligned}$$

   (γ) Πότε ισχύει η ισότητα;

3. **Ανισότητα Fano (Cover & Thomas 2.32)**

   Έστω η εξής από κοινού κατανομή μάζας πιθανότητας για τις τ.μ. (X, Y)

		Y		
		a	b	c
X	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
	2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
	3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

Έστω, επίσης, $\hat{X}(Y)$ εκτιμητής για τη X με βάση την Y και $P_e = \Pr\{\hat{X}(Y) \neq X\}$.

(α) Βρείτε το βέλτιστο εκτιμητή $\hat{X}(Y)$, καθώς και την P_e που αντιστοιχεί στο βέλτιστο εκτιμητή.

(β) Βρείτε το φράγμα για την P_e που προκύπτει από την ανισότητα Fano και συγκρίνετε.

4. **Όριο γινομένου (Cover & Thomas 3.8)**

Έστω η ακολουθία $X_1, X_2, \ldots, X_n$ η οποία αποτελείται από ανεξάρτητες και ομοίως κατανεμημένες (i.i.d.) τ.μ. οι οποίες ακολουθούν την κατανομή

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{2} \\ 2 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{4} \\ 3 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{4} \end{cases}$$

Να βρεθεί το $\lim_{n\to\infty}(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdots X_{n-1} \cdot X_n)^{1/n}$.

5. **AEP και Σχετική Εντροπία (Cover & Thomas 3.9)**

Έστω ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες (i.i.d) διακριτές τ.μ. $X_1, X_2, \ldots$ που ακολουθούν κατανομή μάζας πιθανότητας $p(x)$ και $|\mathcal{X}| < \infty$. Επομένως, $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n p(x_i)$. Είδαμε ότι $-\frac{1}{n}\log p(X_1, X_2, \ldots, X_n) \to H(X)$ κατά πιθανότητα. Έστω, τώρα, μια άλλη συνάρτηση μάζας πιθανότητας $q(x)$ ορισμένη στον <u>ίδιο</u> δειγματικό χώρο $\mathcal{X}$ με την $p(x)$, και $q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n q(x_i)$.

(α) Βρείτε την τιμή του ορίου $-\frac{1}{n}\log q(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ εάν οι $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες (i.i.d) με κατανομή $p(x)$.

(β) Βρείτε την τιμή του ορίου $-\frac{1}{n}\log\frac{q(X_1,X_2,\ldots,X_n)}{p(X_1,X_2,\ldots,X_n)}$ (log-likelihood), όπου, και πάλι, οι $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες (i.i.d) με κατανομή $p(x)$. Επομένως, η πιθανότητα να θεωρήσουμε ότι οι X_i ακολουθούν κατανομή $q(x)$ (αντί για $p(n)$) ελαττώνεται εκθετικά με το n και με ρυθμό ανάλογο της $D(p||q)$.

6. **AEP (Τελική Εξέταση Ιουνίου 2008)**

Θεωρούμε την τ.μ. X με τιμές στο σύνολο $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$ και συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p(0) = 1/2$, $p(1) = p(2) = 1/4$. Ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες είναι τυπικές <u>σύμφωνα με τον ορισμό της (ασθενούς) τυπικότητας</u> που δώσαμε στο μάθημα; Θεωρήστε $\epsilon = 0$. Δικαιολογήστε επαρκώς την απάντησή σας.

(α) (5 μονάδες)

1 2 0 0 0 0 2 1

(β) (5 μονάδες)

0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2

(γ) (5 μονάδες)

0 1 2 0 0 2 0 0 2 0 2 2

7. **Αποταμίευση (Τελική Εξέταση Ιουνίου 2009)**

Ένας καταθέτης ανοίγει λογαριασμό με αρχικό κεφάλαιο $X_0 = 1000$ και *μηνιαίο* επιτόκιο 1%. Θεωρούμε ότι το επιτόκιο αυτό είναι εγγυημένο για όσο παραμένει ανοιχτός ο λογαριασμός, δηλαδή δε μεταβάλλεται. Επίσης, θεωρούμε ότι ο τόκος υπολογίζεται στο τέλος κάθε μήνα. Στο τέλος κάθε μήνα ο καταθέτης έχει την επιλογή να εισπράξει τον τόκο ή να τον αφήσει στο λογαριασμό, οπότε αυτός προστίθεται στο υπάρχον κεφάλαιο. Θεωρούμε, τέλος, ότι δεν επιτρέπεται στον καταθέτη να εισπράξει ποσό διαφορετικό από τον τόκο στο τέλος κάθε μήνα (ούτε μεγαλύτερο ούτε μικρότερο). Δηλαδή ο καταθέτης πρέπει να εισπράξει είτε τον τόκο του μήνα ή τίποτα.

(α) Εάν σε σύνολο N μηνών ο καταθέτης έχει εισπράξει τον τόκο K φορές, δώστε μια έκφραση για το κεφάλαιο, X_N, στο τέλος του $N-$οστού μήνα. Θεωρούμε ότι η X_N ισούται με το κεφάλαιο που απομένει *μετά* από την είσπραξη του τόκου, εφόσον αυτή γίνει. Εάν ο καταθέτης δεν εισπράξει ποτέ τους τόκους, μετά από πόσους μήνες θα έχει διπλασιάσει το αρχικό κεφάλαιο; Δίνεται ότι $1/\log_2(1.01) \approx 69.66$.

(β) Θεωρούμε, τώρα, ότι ο καταθέτης ενδέχεται να έχει ανάγκη από τους τόκους, με αποτέλεσμα να τους εισπράττει στο τέλος κάθε μήνα με πιθανότητα $1/4$. Η απόφαση αν θα εισπράξει τους τόκους το μήνα i είναι ανεξάρτητη από την απόφασή του το μήνα $j \neq i$.

Με τι ισούται η από κοινού εντροπία $H(X_0, X_1, \ldots, X_N)$;

Με τι ισούται ο ρυθμός εντροπίας, $H(\mathcal{X})$;

Με τι ισούται η από κοινού εντροπία $H(X_0, X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_N)$, για κάποιο $0 < j < N$;

Δίνεται $\log_2 3 \approx 1.585$.

(γ) Δύο φοιτήτριες προσπαθούν να εκτιμήσουν πόσοι μήνες θα χρειαστούν ώστε ο καταθέτης να καταφέρει να *οκταπλασιάσει* το αρχικό του κεφάλαιο. Η εκτίμηση της πρώτης είναι ότι αυτό θα έχει συμβεί σχεδόν σίγουρα σε 209 μήνες. Η δεύτερη ισχυρίζεται ότι η εκτίμηση αυτή είναι παρακινδυνευμένη και υποθέτει ότι θα πρέπει να περιμένουμε τουλάχιστον 279 μήνες. Ποια από τις δύο εκτιμήσεις είναι ορθότερη; Δικαιολογήστε επαρκώς την απάντησή σας. Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, θεωρούμε ότι, στο τέλος κάθε μήνα, ο καταθέτης εισπράττει τους τόκους με πιθανότητα $1/4$.

(*δ) Δώστε μια έκφραση για την τιμή της $H(X^N)$ για $N \to \infty$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κεντρικό οριακό θεώρημα. Η έκφραση που θα προκύψει είναι συνάρτηση του N.