EE728 (22A004) - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
3η Σειρά Ασκήσεων
(Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης – MAC)

Παράδοση: Έως και 1 ημέρα πριν την εξέταση Ιουνίου

Διευκρίνιση: Η επίλυση των ασκήσεων είναι προαιρετική. Σκοπός τους είναι να λειτουργήσουν συμπληρωματικά με τις διαλέξεις. Εάν λύσετε όλες τις σειρές ασκήσεων θα σας δοθεί μία (1) μονάδα επιπλέον (εφόσον πάρετε τουλάχιστον 5 στο τελικό διαγώνισμα).

Επιτρέπεται η συνεργασία σε μικρές ομάδες, αλλά όχι η αντιγραφή.

Σημείωση: Οι λύσεις θα σας δοθούν όταν παραδώσετε τις λυμένες ασκήσεις ή εάν το ζητήσετε (οπότε και θα θεωρηθεί ότι δε σκοπεύετε να παραδώσετε λυμένες ασκήσεις).

1. **Ταυτότητα για το MAC (Cover & Thomas 15.27)**

   Έστω ότι συμβολίζουμε τη χωρητικότητα Γκαουσιανού καναλιού με SNR x με $C(x) \triangleq \frac{1}{2}\log(1+x)$. Δείξτε ότι

   $$C\left(\frac{P_1}{N}\right) + C\left(\frac{P_2}{P_1+N}\right) = C\left(\frac{P_1+P_2}{N}\right).$$

   Επομένως, δύο ανεξάρτητοι χρήστες μπορούν να στέλνουν τόση πληροφορία όση και εάν είχαν ενώσει τις ισχείς τους.

2. **Διαμοιρασμός Συχνότητας (FDMA) (Cover & Thomas 15.28)**

   Θεωρούμε ότι δύο χρήστες μοιράζονται εύρος ζώνης W με χρήση FDMA.

   Δείξτε ότι, για να μεγιστοποιήσουμε το άθροισμα ρυθμών μετάδοσης

   $$R_1 + R_2 = W_1 \log\left(1 + \frac{P_1}{NW_1}\right) + (W - W_1)\log\left(1 + \frac{P_2}{N(W-W_1)}\right)$$

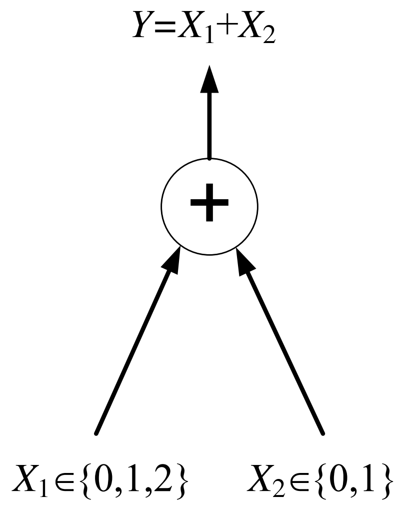
   το εύρος ζώνης W πρέπει να μοιραστεί στους χρήστες αναλόγως με τις ισχείς τους, P_i.

   Υπόδειξη: Μεγιστοποιήστε ως προς W_1. Εναλλακτικά, αντικαταστήστε με τη βέλτιστη τιμή του W_1 και δείξτε ότι βρίσκεται στο όριο της περιοχής χωρητικότητας του MAC (και, επομένως, δεν υπάρχει W_1 που επιτυγχάνει μεγαλύτερη τιμή του $R_1 + R_2$).

3. **Διακριτό MAC χωρίς θόρυβο (Τελικό διαγώνισμα – Ιούνιος 2009)**

   Στο κανάλι του Σχήματος 1, δύο χρήστες (1 και 2) επιθυμούν να επικοινωνήσουν με ένα δέκτη. Ο δέκτης λαμβάνει το άθροισμα, $Y = X_1 + X_2$, των σημάτων X_1 και X_2 του χρήστη 1 και 2, αντίστοιχα. Ο χρήστης 1 μεταδίδει ένα από τα σύμβολα 0, 1 και 2, ενώ ο χρήστης 2 το σύμβολο 0 ή το σύμβολο 1. Οι χρήστες δε συνεννοούνται μεταξύ τους πριν μεταδώσουν. Ωστόσο, θεωρούμε ότι γνωρίζουν την κατανομή $p_{X_i}(x_i)$ με την οποία πρέπει να μεταδώσουν (για παράδειγμα, μπορεί να τους την έχει γνωστοποιήσει ο δέκτης πριν αρχίσει η μετάδοση).

   Δίνεται, επίσης, ότι $\log_2 3 \approx 1.585$.



Σχήμα 1: Διακριτό MAC χωρίς θόρυβο.

   (α) Βρείτε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο ρυθμός μετάδοσης R_1 του χρήστη 1. Επαναλάβετε για το ρυθμό μετάδοσης R_2 του χρήστη 2. Βρείτε, επίσης, την κατανομή $p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$ που επιτυγχάνει το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης, R_i, σε κάθε περίπτωση.

   (β) Δώστε μια έκφραση για τη μέγιστη τιμή του *αθροίσματος* $R_1 + R_2$ των ρυθμών με τους οποίους μπορούν να μεταδώσουν *ταυτόχρονα* οι δύο χρήστες (sum capacity του καναλιού). Η έκφραση αυτή μπορεί να είναι συνάρτηση εντροπιών (ή/και δεσμευμένων εντροπιών) τυχαίων μεταβλητών και θα πρέπει να έχει όσο γίνεται λιγότερους όρους. Προς το παρόν δε χρειάζεται να βρείτε κάποια τιμή για τη sum capacity.

   (γ) Με βάση το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος δώστε ένα *άνω* φράγμα για τη sum capacity. Το φράγμα αυτό δεν είναι απαραίτητο να είναι επιτεύξιμο.

(δ) Δώστε ένα παράδειγμα κατανομής $p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$ με την οποία μπορεί να επιτευχθεί η sum capacity. Συγκρίνετε με το άνω φράγμα που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

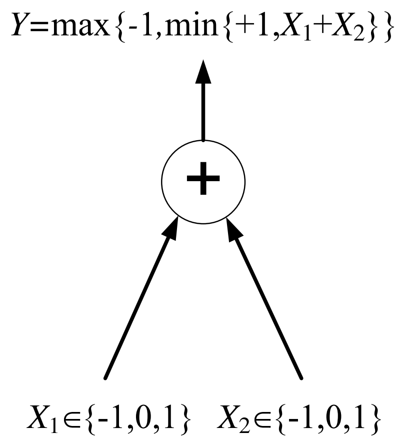
Υπόδειξη: Για να μην αναλωθείτε σε πράξεις και να απαντήσετε γρήγορα στο ερώτημα, προσπαθήστε να βρείτε εάν είναι δυνατόν ο κάθε χρήστης να μεταδίδει με $R_1 = R_2 = C_{\text{sum}}/2$.

(ε) Υπάρχει τρόπος ο χρήστης 1 να μεταδίδει με το μέγιστο ρυθμό μετάδοσής του, $R_{1,\max}$, και ο χρήστης 2 με $R_2 = C_{\text{sum}} - R_{1,\max}$; Εάν ναι, με ποια κατανομή επιτυγχάνεται αυτό; Εάν όχι, με τι ισούται η διαφορά $C_{\text{sum}} - (R_{1,\max} + R_2)$; Συγκρίνετε με την περίπτωση Γκαουσιανού MAC.

4. **Διακριτό MAC χωρίς θόρυβο (Επαναληπτική εξέταση Σεπτεμβρίου 2009)**

Στο κανάλι του Σχήματος 2, δύο χρήστες (1 και 2) επιθυμούν να επικοινωνήσουν με ένα δέκτη. Ο δέκτης λαμβάνει το άθροισμα των σημάτων X_1 και X_2 του χρήστη 1 και 2, αντίστοιχα. Ωστόσο, όταν η *απόλυτη* τιμή του αθροίσματος είναι μεγαλύτερη από 1, ο δέκτης ψαλιδίζει το σήμα. Δηλαδή, $Y = \max\{-1, \min\{1, X_1 + X_2\}\}$. Και οι δύο χρήστες χρησιμοποιούν το ίδιο αλφάβητο $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \{-1, 0, 1\}$. Οι χρήστες δε συνεννοούνται μεταξύ τους πριν μεταδώσουν. Ωστόσο, θεωρούμε ότι γνωρίζουν την κατανομή $p_{X_i}(x_i)$ με την οποία πρέπει να μεταδώσουν (για παράδειγμα, μπορεί να τους την έχει γνωστοποιήσει ο δέκτης πριν αρχίσει η μετάδοση).

Δίνεται, επίσης, ότι $\log_2 3 \approx 1.585$ και $\log_2 5 \approx 2.3219$.



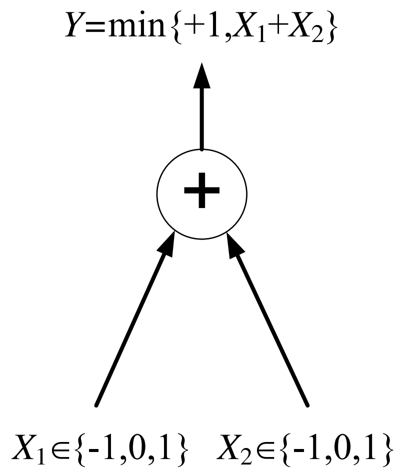
Σχήμα 2: Διακριτό MAC χωρίς θόρυβο και δίπλευρο ψαλιδισμό.

(α) Βρείτε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο ρυθμός μετάδοσης R_1 του χρήστη 1. Επαναλάβετε για το ρυθμό μετάδοσης R_2 του χρήστη 2. Βρείτε, επίσης, την κατανομή $p_{X_i}(x_i)$ που επιτυγχάνει το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης, R_i, σε κάθε περίπτωση.

(β) Υπολογίστε τη μέγιστη τιμή του *αθροίσματος* R_1+R_2 των ρυθμών με τους οποίους μπορούν να μεταδώσουν *ταυτόχρονα* οι δύο χρήστες (sum capacity του καναλιού). Για ποια κατανομή $p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$ μεγιστοποιείται το άθροισμα; Σχεδιάστε την περιοχή χωρητικότητας (capacity region), $\mathcal{C}$, του καναλιού.

(γ) Περιγράψτε έναν τρόπο με τον οποίο μπορείτε να επιτύχετε μετάδοση με *οποιοδήποτε* ζεύγος ρυθμών μετάδοσης (R_1, R_2) που ανήκει στην περιοχή χωρητικότητας, $\mathcal{C}$.

(δ) Έστω, τώρα, ότι ο δέκτης ψαλιδίζει το άθροισμα μόνο στο $+1$, δηλαδή $Y = \min\{1, X_1 + X_2\}$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Διακριτό MAC χωρίς θόρυβο και μονόπλευρο ψαλιδισμό.

Τι περιμένετε για τη νέα περιοχή χωρητικότητας, $\mathcal{C}'$, σε σχέση με την προηγούμενη; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(ε) Ποιό είναι το άνω φράγμα για το άθροισμα ρυθμών μετάδοσης (sum capacity) $C_{\text{sum}} = R_1 + R_2$;

(στ) Σχεδιάστε την περιοχή ρυθμών μετάδοσης, $\mathcal{R}$, που επιτυγχάνεται με χρήση των κατανομών που βρήκατε στα ερωτήματα (α) και (β). Συγκρίνετε με την περιοχή χωρητικότητας του ερωτήματος (β). Μπορείτε να πείτε κάτι περισσότερο σε σχέση με αυτά που συμπεράνατε στο ερώτημα (δ);

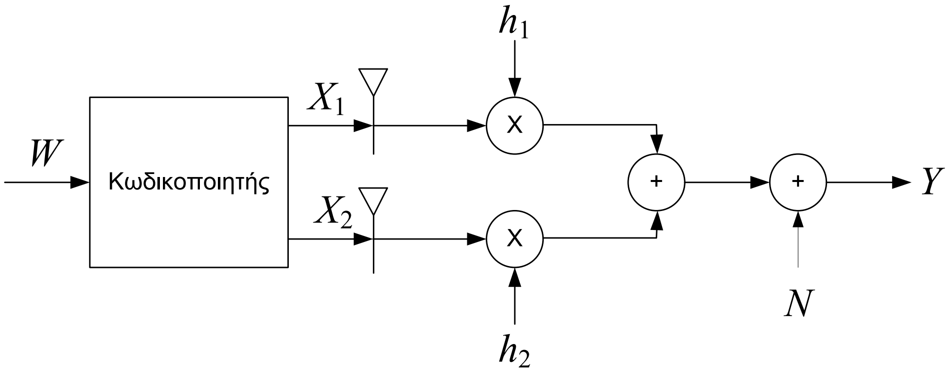
(ζ) (**Δυσκολότερο, Επιπλέον μονάδες**)

Δείξτε ότι ένα *κάτω* φράγμα για τη sum capacity είναι το 1.9772. Με βάση αυτό το φράγμα και την περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης του ερωτήματος (στ) σχεδιάστε μια περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης που είναι πιο κοντά στην περιοχή χωρητικότητας $\mathcal{C}'$ από αυτήν του ερωτήματος (στ).

Υπόδειξη: Βρείτε μια κατανομή $p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$ για την οποία $R_1 + R_2 = 1.9772$.

5. **Μία ή δύο κεραίες; (Τελικό διαγώνισμα – Ιούνιος 2008)**

Στο σύστημα του Σχήματος 4 ο πομπός χρησιμοποιεί 2 κεραίες προκειμένου να στείλει μηνύματα W στο δέκτη.



Σχήμα 4: Μετάδοση με χρήση 2 κεραιών και κοινό κωδικοποιητή.

Για κάθε χρήση καναλιού, k, το σήμα στο δέκτη ισούται με $Y_k = h_1 X_{1,k} + h_2 X_{2,k} + N_k$, όπου h_1 και h_2 (πραγματικές) σταθερές γνωστές τόσο στον πομπό όσο και στο δέκτη και N i.i.d. γκαουσιανός θόρυβος $\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες από το θόρυβο N, αλλά όχι απαραίτητα ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επίσης, υπάρχει περιορισμός ισχύος στον πομπό: Το άθροισμα των ισχύων των σημάτων που εκπέμπονται από τις δύο κεραίες δεν πρέπει να υπερβαίνει μια τιμή P. Πιο συγκεκριμένα, $\mathbb{E}[X_1^2]+\mathbb{E}[X_2^2] \le P$. Θέλουμε να βρούμε ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού και πώς πρέπει να σχεδιαστεί ο κωδικοποιητής προκειμένου να επιτύχουμε μετάδοση με τη χωρητικότητα.

(α) Θεωρήστε το κανάλι με είσοδο (X_1, X_2) και έξοδο Y. Εξηγήστε γιατί το κανάλι δεν έχει μνήμη και δώστε μια έκφραση για τη συνάρτηση μετάβασης $f(y|x_1, x_2)$. Υπενθυμίζεται ότι οι παράμετροι h_1 και h_2 θεωρούνται γνωστές και σταθερές.

(β) Δώστε μια έκφραση για την αμοιβαία πληροφορία $I(Y; X_1, X_2)$. Ποια πρέπει να είναι η κατανομή της Y ώστε να μεγιστοποιείται η $I(Y; X_1, X_2)$; Αναφέρετε απλώς την κατανομή, δε χρειάζονται περισσότερες λεπτομέρειες (προς το παρόν).

(γ) Θεωρούμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 0$. Δείξτε ότι η $\mathbb{E}[Y^2]$ μεγιστοποιείται όταν $X_1 = cX_2$, όπου c σταθερά. Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα Cauchy-Schwarz: $(\mathbb{E}[X_1 X_2])^2 \le \mathbb{E}[X_1^2]\mathbb{E}[X_2^2]$ με $=$ όταν $X_1 = cX_2$ (γενικά $X_1 = cX_2 + d$; Εδώ $d = 0$ λόγω της υπόθεσης $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 0$).

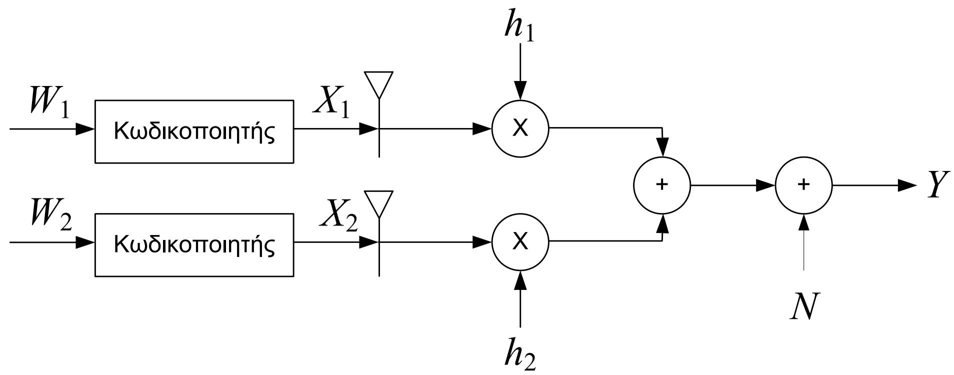
(δ) Δώστε μια έκφραση για την $\mathbb{E}[Y^2]$ όταν $X_1 = cX_2$ (συναρτήσει των c, P, h_1 και h_2). (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον περιορισμό ισχύος στον πομπό). Τι κατανομή πρέπει να ακολουθούν οι X_1 και X_2 για να μεγιστοποιείται η $I(Y; X_1, X_2)$;

(ε) Βρείτε την τιμή της c η οποία μεγιστοποιεί την $\mathbb{E}[Y^2]$. Βεβαιωθείτε ότι λαμβάνετε υπόψη σας τον περιορισμό ισχύος $\mathbb{E}[X_1^2]+\mathbb{E}[X_2^2] \le P$. Ένας τρόπος είναι να βρείτε το c που μεγιστοποιεί την έκφραση για την $\mathbb{E}[Y^2]$ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Εναλλακτικά, μπορείτε να θεωρήσετε ότι $X_1 = \alpha X$ και $X_2 = \beta X$, όπου $\mathbb{E}[X^2] = 1$ και $\alpha^2 + \beta^2 = P$ και να βρείτε τη σχέση μεταξύ α και β.

(στ) Με βάση τα παραπάνω, καθώς και τη βέλτιστη τιμή της c που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού. Συγκρίνετε με την περίπτωση που χρησιμοποιείται μόνο μια κεραία για τη μετάδοση (χωρίς απώλεια της γενικότητας, μπορείτε να θεωρήσετε ότι $h_1 \geq h_2$).

(ζ) Περιγράψτε πολύ συνοπτικά πώς θα κατασκευάζατε το βιβλίο κωδίκων σε αυτό το κανάλι και τι μεταδίδεται από κάθε κεραία εάν ακολουθήσουμε τη μέθοδο (του Shannon) που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη του θεωρήματος κωδικοποίησης για το γκαουσιανό κανάλι.

(η) Υποθέστε, τώρα, ότι η κάθε κεραία ανήκει σε διαφορετικό πομπό (χρήστη) και ότι οι δύο πομποί δεν επικοινωνούν μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5. Ωστόσο, και οι δύο πομποί γνωρίζουν τα h_1 και h_2. Υποθέστε, επίσης, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι $h_1 \geq h_2$. Οι πομποί πρέπει να μοιραστούν μεταξύ τους συνολική ισχύ P. Δηλαδή, παρόλο που, σε αντίθεση με πριν, οι κεραίες συνδέονται σε διαφορετικούς πομπούς, πρέπει $\mathbb{E}[X_1^2] + \mathbb{E}[X_2^2] \leq P$. Τέλος, θεωρούμε ότι, με χρήση καναλιού ελέγχου, υποδεικνύεται σε κάθε πομπό με πόση ισχύ πρέπει να εκπέμψει. Εάν R_1 και R_2 είναι οι ρυθμοί μετάδοσης από την κεραία 1 και 2, αντίστοιχα, πώς πρέπει να μοιραστεί η ισχύς P μεταξύ των 2 πομπών και ποιο είναι το μέγιστο άθροισμα ρυθμών μετάδοσης $R_1 + R_2$ που μπορούμε να επιτύχουμε; Συγκρίνετε με το αποτέλεσμα του ερωτήματος (στ) και σχολιάστε.



Σχήμα 5: Μετάδοση με χρήση 2 κεραιών και ανεξάρτητο κωδικοποιητή σε κάθε κεραία.