ΕΕ728 (22Α004) - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
1η Σειρά Ασκήσεων
(Εντροπία, Αμοιβαία Πληροφορία, Ανισότητα Fano, AEP)

Διευκρίνιση: Η επίλυση των ασκήσεων είναι προαιρετική. Σκοπός τους είναι να λειτουργήσουν συμπληρωματικά με τις διαλέξεις.

1. **Επεξεργασία Δεδομένων**

   Έστω ότι οι τ.μ. $X_1 \to X_2 \to X_3 \to \ldots \to X_n$ σχηματίζουν αλυσίδα Markov, δηλαδή $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(x_1)p(x_2|x_1)\ldots p(x_n|x_{n-1})$. Βρείτε την πιο απλή έκφραση που μπορείτε για την $I(X_1; X_2, X_3, \ldots, X_n)$.

2. **Εντροπία (Τελικό διαγώνισμα, Ιούνιος 2008)**

   Θεωρούμε μια διακριτή τ.μ. που παίρνει τιμές από ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων $\mathcal{X} = \{1, \ldots, |\mathcal{X}|\}$. Έστω ότι δίνεται η $p(1) = \Pr\{X = 1\}$ η οποία δεν είναι δυνατόν να μεταβληθεί.

   (α) Ποιες είναι οι τιμές $p(i)$, $i = 2, \ldots, |\mathcal{X}|$, της κατανομής που μεγιστοποιεί την εντροπία $H(X)$ (για δεδομένη $p(1)$);

   (β) Με τι ισούται η μέγιστη $H(X)$ για δεδομένη $p(1)$; Δώστε μια ερμηνεία της έκφρασης για την $H(X)$ με βάση τον κανόνα αλυσίδας για την εντροπία.
   Υπόδειξη: Χωρίστε το $\mathcal{X}$ σε δύο κατάλληλα υποσύνολα.

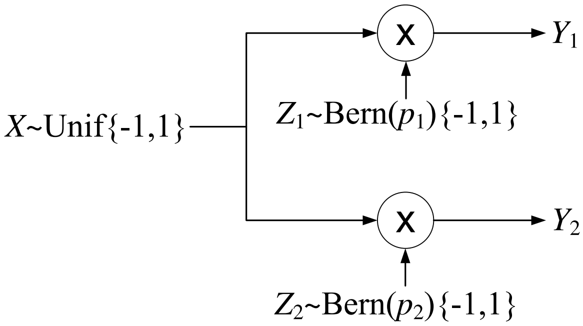
   (γ) Εάν ένας παίκτης Α μπορεί να μεταβάλλει την $p(1)$ με σκοπό να μειώνει την εντροπία $H(X)$ όσο περισσότερο μπορεί, ενώ ένας παίκτης Β μπορεί να μεταβάλλει οποιοδήποτε υποσύνολο των υπόλοιπων $p(i)$ (αλλά όχι την $p(1)$) με σκοπό να αυξάνει την εντροπία όσο μπορεί, ποια τιμή πρέπει να επιλέξει ο Α αν παίζει πρώτος; Πώς πρέπει να απαντήσει ο Β; Αλλάζει η απάντησή σας εάν πρώτος παίζει ο Β; Θεωρούμε ότι ο τελευταίος παίκτης έχει την υποχρέωση να διαλέξει τιμές για την κατανομή $\mathbf{p}$ ώστε $\sum_{i=1}^{|\mathcal{X}|} p(i) = 1$.

3. **Σύστημα με δύο εξόδους (Τελικό διαγώνισμα "Θεωρία Πληροφορίας", Φεβρουάριος 2009)**

   Θεωρούμε το σύστημα του Σχήματος 1. Η πηγή X *δεν* έχει μνήμη και παίρνει τιμές -1 ή $+1$ με την ίδια πιθανότητα $1/2$. Οι *πολλαπλασιαστικοί* θόρυβοι Z_1 και Z_2 παίρνουν, επίσης, τιμές στο σύνολο $\{-1,1\}$, αλλά ακολουθούν κατανομή Bernoulli. Δηλαδή,

$$Z_i = \begin{cases} +1 & \text{με πιθανότητα} \quad p_i \\ -1 & \text{με πιθανότητα} \quad 1-p_i \end{cases}.$$

Οι τ.μ. Z_1 και Z_2 είναι ανεξάρτητες της X. Ωστόσο, στη γενική περίπτωση, **δεν** είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.



Σχήμα 1: Σύστημα με δύο εξόδους.

(α) Βρείτε την $H(X)$ και τις $H(Z_i)$ (συναρτήσει των p_i).

(β) Για *δεδομένα* p_1 και p_2, βρείτε ένα άνω φράγμα για την $H(Z_1, Z_2)$, καθώς και την από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p(z_1, z_2)$ η οποία επιτυγχάνει το άνω φράγμα.

(γ) Βρείτε τις $I(X;Y_1)$ και $I(X;Y_2)$. Για δεδομένα p_1 και p_2 υπάρχει τρόπος να αυξήσετε τις $I(X;Y_1)$ και $I(X;Y_2)$ αλλάζοντας την κατανομή της X; Επιτρέπεται να αλλάξετε μόνο τις πιθανότητες με τις οποίες $X = 1$ ή -1. Δεν μπορείτε να αυξήσετε το πλήθος τιμών, $|\mathcal{X}|$, της πηγής.

(δ) Συγκρίνετε την $I(X;Y_1,Y_2)$ με τις $I(X;Y_i)$. Είναι μικρότερη; Μεγαλύτερη; Ίση; Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή (σε bits) που μπορεί να πάρει η $I(X;Y_1,Y_2)$;

Υπόδειξη: Στο ερώτημα αυτό μπορείτε να απαντήσετε χωρίς να βρείτε την τιμή της $I(X;Y_1,Y_2)$.

(ε) Υποθέστε, τώρα, ότι οι Z_1 και Z_2 είναι *ανεξάρτητες* μεταξύ τους. Βρείτε μια έκφραση για την $I(X;Y_1,Y_2)$ συναρτήσει των p_1 και p_2.

Υπόδειξη: Ενδέχεται να σας φανεί χρήσιμη η αντικατάσταση $\alpha \triangleq p_1 + p_2 - 2p_1p_2$.

4. **Ανισότητα Fano**

Έστω η εξής από κοινού κατανομή μάζας πιθανότητας για τις τ.μ. (X,Y)

		Y		
		a	b	c
X	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
	2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
	3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

Έστω, επίσης, $\hat{X}(Y)$ εκτιμητής για τη X με βάση την Y και $P_e = \Pr\{\hat{X}(Y) \neq X\}$.

(α) Βρείτε το βέλτιστο εκτιμητή $\hat{X}(Y)$, καθώς και την P_e που αντιστοιχεί στο βέλτιστο εκτιμητή.

(β) Βρείτε το φράγμα για την P_e που προκύπτει από την ανισότητα Fano και συγκρίνετε.

5. **Όριο γινομένου**

Έστω η ακολουθία $X_1, X_2, \ldots, X_n$ η οποία αποτελείται από ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες (i.i.d.) τ.μ. οι οποίες ακολουθούν την κατανομή

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{με πιθανότητα} \quad \frac{1}{2} \\ 2 & \text{με πιθανότητα} \quad \frac{1}{4} \\ 3 & \text{με πιθανότητα} \quad \frac{1}{4} \end{cases}$$

Να βρεθεί το $\lim_{n\to\infty}(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdots X_{n-1} \cdot X_n)^{1/n}$.

6. **AEP και Σχετική Εντροπία**

Έστω ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες (i.i.d) διακριτές τ.μ. $X_1, X_2, \ldots$ που ακολουθούν κατανομή μάζας πιθανότητας $p(x)$ και $|\mathcal{X}| < \infty$. Επομένως, $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i)$. Είδαμε ότι $-\frac{1}{n}\log p(X_1, X_2, \ldots, X_n) \to H(X)$ κατά πιθανότητα. Έστω, τώρα, μια άλλη συνάρτηση μάζας πιθανότητας $q(x)$ ορισμένη στον <u>ίδιο</u> δειγματικό χώρο $\mathcal{X}$ με την $p(x)$, και $q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} q(x_i)$.

(α) Βρείτε την τιμή του ορίου $-\frac{1}{n}\log q(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ εάν οι $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες (i.i.d) με κατανομή $p(x)$.

(β) Βρείτε την τιμή του ορίου $-\frac{1}{n}\log \frac{q(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{p(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$ (log-likelihood), όπου, και πάλι, οι $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες (i.i.d) με κατανομή $p(x)$. Επομένως, η πιθανότητα να θεωρήσουμε ότι οι X_i ακολουθούν κατανομή $q(x)$ (αντί για $p(n)$) ελαττώνεται εκθετικά με το n και με ρυθμό ανάλογο της $D(p||q)$.