EE728 (22A004) - Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
Τελικό Διαγώνισμα

• Διάρκεια Διαγωνίσματος: 3 ώρες. 4 ασκήσεις (το φυλλάδιο έχει 5 σελίδες – ελέγξτε το!).

• Βαθμός Διαγωνίσματος $= \min\{120 \text{ μονάδες}/10, 10\}$.

• Βεβαιωθείτε ότι έχετε γράψει το όνομά σας σε όλα τα φύλλα που έχετε χρησιμοποιήσει.

• Οι απαντήσεις σας σε κάθε ερώτημα πρέπει να είναι επαρκώς αιτιολογημένες. Επιτρέπεται η χρήση (χωρίς απόδειξη) οποιουδήποτε θεωρήματος και οποιασδήποτε ιδιότητας έχει αναφερθεί στο μάθημα ή βρίσκεται στις σημειώσεις ή/και στα φυλλάδια αρκεί να το διευκρινίσετε.

• Μπορείτε να κρατήσετε τα θέματα. Οι λύσεις θα είναι διαθέσιμες μετά την ανακοίνωση των βαθμολογιών.

Καλή Επιτυχία!

1. **Εντροπία (25 μονάδες)**

   Θεωρούμε μια διακριτή τυχαία τ.μ. που παίρνει τιμές από ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων $\mathcal{X} = \{1, \ldots, |\mathcal{X}|\}$. Έστω ότι δίνεται η $p(1) = \Pr\{X = 1\}$ η οποία δεν είναι δυνατόν να μεταβληθεί.

   (α) (10 μονάδες)
   Ποιες είναι οι τιμές $p(i)$, $i = 2, \ldots, |\mathcal{X}|$, της κατανομής που μεγιστοποιεί την εντροπία $H(X)$ (για δεδομένη $p(1)$);

   (β) (10 μονάδες)
   Με τι ισούται η μέγιστη $H(X)$ για δεδομένη $p(1)$; Δώστε μια ερμηνεία της έκφρασης για την $H(X)$ με βάση τον κανόνα αλυσίδας για την εντροπία. Υπόδειξη: Χωρίστε το $\mathcal{X}$ σε δύο κατάλληλα υποσύνολα.

   (γ) (5 μονάδες)
   Εάν ένας παίκτης Α μπορεί να μεταβάλλει την $p(1)$ με σκοπό να μειώνει την εντροπία $H(X)$ όσο περισσότερο μπορεί, ενώ ένας παίκτης Β μπορεί να μεταβάλλει οποιοδήποτε υποσύνολο των υπόλοιπων $p(i)$ (αλλά όχι την $p(1)$) με σκοπό να αυξάνει την εντροπία όσο μπορεί, ποια τιμή πρέπει να επιλέξει ο Α αν παίζει πρώτος; Πώς πρέπει να απαντήσει ο Β; Αλλάζει η απάντησή σας εάν πρώτος παίζει ο Β; Θεωρούμε ότι ο τελευταίος παίκτης έχει την υποχρέωση να διαλέξει τιμές για την κατανομή $\mathbf{p}$ ώστε $\sum_{i=1}^{|\mathcal{X}|} p(i) = 1$.

2. **Τυπικές ακολουθίες (15 μονάδες)**

   Θεωρούμε την τ.μ. X με τιμές στο σύνολο $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$ και συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p(0) = 1/2$, $p(1) = p(2) = 1/4$. Ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες είναι τυπικές <u>σύμφωνα με τον ορισμό της (ασθενούς) τυπικότητας</u> που δώσαμε στο μάθημα; Θεωρήστε <u>$\epsilon = 0$. Δικαιολογήστε επαρκώς την απάντησή σας.</u>

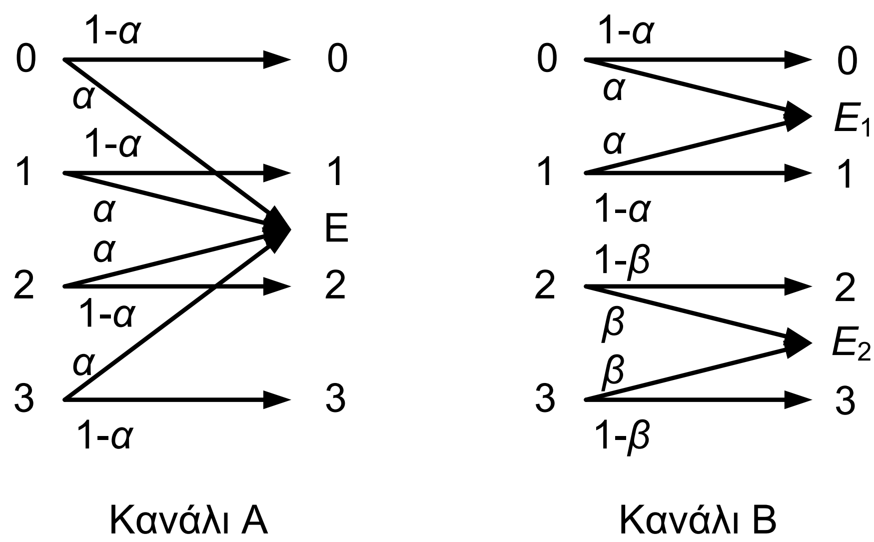
   (α) (5 μονάδες)
   1 2 0 0 0 0 2 1

   (β) (5 μονάδες)
   0 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1 2

   (γ) (5 μονάδες)
   0 1 2 0 0 2 0 0 2 0 2 2

3. **Τετραδικά Κανάλια διαγραφής (35 μονάδες)**

Θεωρήστε τα κανάλια διαγραφής χωρίς μνήμη του σχήματος. Στο κανάλι Α στέλνουμε ένα από 4 πιθανά σύμβολα. Ο δέκτης γνωρίζει πότε η μετάδοση έχει γίνει σωστά και πότε έχει προκύψει διαγραφή. Στο κανάλι Β, όπως και στο κανάλι Α, ο πομπός επιλέγει κάθε φορά να μεταδώσει ένα από 4 σύμβολα. Εάν συμβεί διαγραφή ο δέκτης γνωρίζει όχι μόνο ότι συνέβη διαγραφή, αλλά, επιπλέον, το υποσύνολο στο οποίο ανήκει το σύμβολο που μεταδόθηκε από τον πομπό ($\{0,1\}$ ή $\{2,3\}$).



(α) (10 μονάδες)

Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού Α, και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται.

(β) (10 μονάδες)

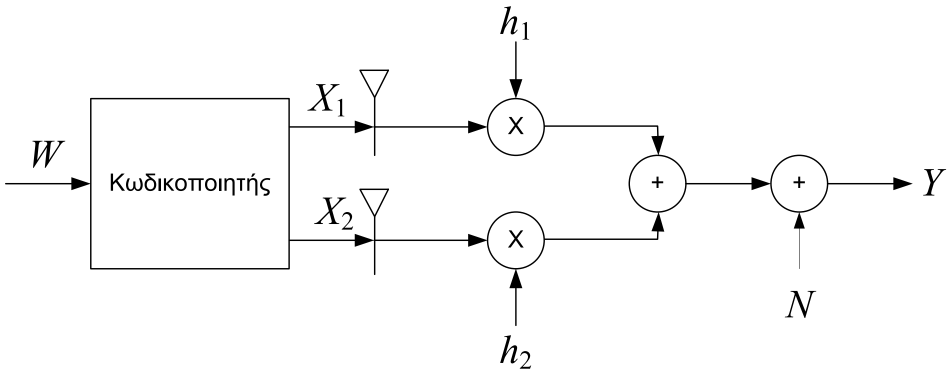
Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού Β όταν $\alpha = \beta$, και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Συγκρίνετε με την τιμή που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Σχολιάστε.

(γ) (15 μονάδες)

Βρείτε τη χωρητικότητα του καναλιού Β όταν $\alpha \neq \beta$, και την κατανομή με την οποία αυτή επιτυγχάνεται. Συγκρίνετε με την τιμή που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Σχολιάστε. Ποια είναι η χωρητικότητα στην ειδική περίπτωση όπου $\alpha = 1$ και $\beta = 0$ και με ποια κατανομή εισόδου επιτυγχάνεται;

4. **Μία ή δύο κεραίες; (45 μονάδες)**

Στο σύστημα του σχήματος ο πομπός χρησιμοποιεί 2 κεραίες προκειμένου να στείλει μηνύματα W στο δέκτη.



Για κάθε χρήση καναλιού k, το σήμα στο δέκτη ισούται με $Y_k = h_1 X_{1,k} + h_2 X_{2,k} + N_k$, όπου h_1 και h_2 (πραγματικές) σταθερές γνωστές τόσο στον πομπό όσο και στο δέκτη και N i.i.d. γκαουσιανός θόρυβος $\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες από το θόρυβο N, αλλά όχι απαραίτητα ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επίσης, υπάρχει περιορισμός ισχύος στον πομπό: Το άθροισμα των ισχύων των σημάτων που εκπέμπονται από τις δύο κεραίες δεν πρέπει να υπερβαίνει μια τιμή P. Πιο συγκεκριμένα, $E[X_1^2] + E[X_2^2] \leq P$. Θέλουμε να βρούμε ποια είναι η χωρητικότητα του καναλιού και πώς πρέπει να σχεδιαστεί ο κωδικοποιητής προκειμένου να επιτύχουμε μετάδοση με τη χωρητικότητα.

(α) (5 μονάδες)

Θεωρήστε το κανάλι με είσοδο (X_1, X_2) και έξοδο Y. Εξηγήστε γιατί το κανάλι δεν έχει μνήμη και δώστε μια έκφραση για τη συνάρτηση μετάβασης $f(y|x_1, x_2)$. Υπενθυμίζεται ότι οι παράμετροι h_1 και h_2 θεωρούνται γνωστές και σταθερές.

(β) (5 μονάδες)

Δώστε μια έκφραση για την αμοιβαία πληροφορία $I(Y; X_1, X_2)$. Ποια πρέπει να είναι η κατανομή της Y ώστε να μεγιστοποιείται η $I(Y; X_1, X_2)$; Αναφέρετε απλώς την κατανομή, δε χρειάζονται περισσότερες λεπτομέρειες (προς το παρόν).

(γ) (5 μονάδες)

Θεωρούμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι $E[X_1] = E[X_2] = 0$. Δείξτε ότι η $E[Y^2]$ μεγιστοποιείται όταν $X_1 = cX_2$, όπου c σταθερά. Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα Cauchy-Schwarz: $(E[X_1X_2])^2 \leq E[X_1^2]E[X_2^2]$ με $=$ όταν $X_1 = cX_2$ (γενικά $X_1 = cX_2 + d$· Εδώ $d = 0$ λόγω της υπόθεσης $E[X_1] = E[X_2] = 0$).

(δ) (5 μονάδες)

Δώστε μια έκφραση για την $E[Y^2]$ όταν $X_1 = cX_2$ (συναρτήσει των c, P, h_1 και h_2). (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον περιορισμό ισχύος στον πομπό). Τι κατανομή πρέπει να ακολουθούν οι X_1 και X_2 για να μεγιστοποιείται η $I(Y; X_1, X_2)$;

(ε) (5 μονάδες)

Βρείτε την τιμή της c η οποία μεγιστοποιεί την $E[Y^2]$. Βεβαιωθείτε ότι λαμβάνετε υπόψη σας τον περιορισμό ισχύος $E[X_1^2]+E[X_2^2] \leq P$. Ένας τρόπος είναι να βρείτε το c που μεγιστοποιεί την έκφραση για την $E[Y^2]$ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Εναλλακτικά, μπορείτε να θεωρήσετε ότι $X_1 = \alpha X$ και $X_2 = \beta X$, όπου $E[X^2] = 1$ και $\alpha^2 + \beta^2 = P$ και να βρείτε τη σχέση μεταξύ α και β.

(στ) (5 μονάδες)

Με βάση τα παραπάνω, καθώς και τη βέλτιστη τιμή της c που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, υπολογίστε τη χωρητικότητα του καναλιού. Συγκρίνετε με την περίπτωση που χρησιμοποιείται μόνο μια κεραία για τη μετάδοση (χωρίς απώλεια της γενικότητας, μπορείτε να θεωρήσετε ότι $h_1 \geq h_2$).

(ζ) (5 μονάδες)

Περιγράψτε πολύ συνοπτικά πώς θα κατασκευάζατε το βιβλίο κωδίκων σε αυτό το κανάλι και τι μεταδίδεται από κάθε κεραία εάν ακολουθήσουμε τη μέθοδο (του Shannon) που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη του θεωρήματος κωδικοποίησης για το γκαουσιανό κανάλι.

(η) (10 μονάδες)

Υποθέστε, τώρα, ότι η κάθε κεραία ανήκει σε διαφορετικό πομπό (χρήστη) και ότι οι δύο πομποί δεν επικοινωνούν μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ωστόσο, και οι δύο πομποί γνωρίζουν τα h_1 και h_2. Υποθέστε, επίσης, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι $h_1 \geq h_2$. Οι πομποί πρέπει να μοιραστούν μεταξύ τους συνολική ισχύ P. Δηλαδή, παρόλο που, σε αντίθεση με πριν, οι κεραίες συνδέονται σε διαφορετικούς πομπούς, πρέπει $E[X_1^2] + E[X_2^2] \leq P$. Τέλος, θεωρούμε ότι, με χρήση καναλιού ελέγχου, υποδεικνύεται σε κάθε πομπό με πόση ισχύ πρέπει να εκπέμψει. Εάν R_1 και R_2 είναι οι ρυθμοί μετάδοσης από την κεραία 1 και 2, αντίστοιχα, πώς πρέπει να μοιραστεί η ισχύς P μεταξύ των 2 πομπών και ποιο είναι το μέγιστο άθροισμα ρυθμών μετάδοσης $R_1 + R_2$ που μπορούμε να επιτύχουμε; Συγκρίνετε με το αποτέλεσμα του ερωτήματος (στ) και σχολιάστε.