EE728
Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
11η & 12η διάλεξη

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

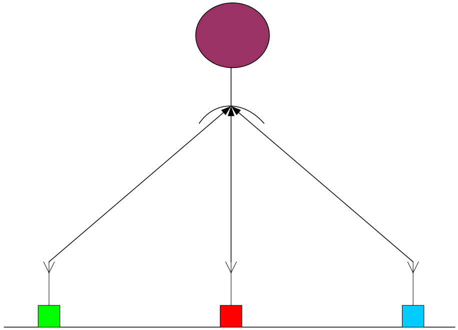
13 & 27 Μαΐου 2014

Περιεχόμενα 11ης και 12ης εβδομάδας

Αντιστοιχία με βιβλία Cover & Thomas και El Gamal & Kim

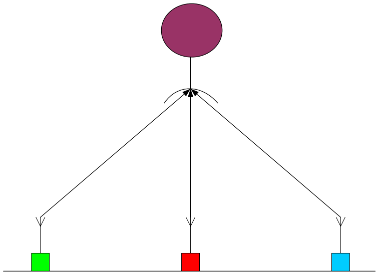
- Βιβλίο Cover & Thomas: 15.2, 15.3, σελ. 592–593.
- Βιβλίο El Gamal & Kim: Κεφ. 4, σελ. 338–339.

Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (Multiple Access Channel)



- Πολλοί χρήστες που επιθυμούν να επικοινωνήσουν με ένα κεντρικό σταθμό. Παράδειγμα: Κινητά τερματικά προς σταθμό βάσης.
- Το κανάλι πολλών χρηστών που έχει κατανοηθεί καλύτερα.

Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (MAC) (2)



- Έως τώρα, η παράμετρος που επηρέαζε την επικοινωνία ήταν ο θόρυβος (η τυχαιότητα του καναλιού). Στο MAC, επιπλέον του θορύβου, η επικοινωνία επηρεάζεται από παρεμβολές (interference).
- Πόση πληροφορία μπορούμε να μεταδώσουμε για κάθε χρήστη, και πώς σχετίζονται μεταξύ τους οι χωρητικότητες των χρηστών;

Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (MAC) – Ορισμοί

- Για απλοποίηση, θα αναφερθούμε, κατ' αρχάς, σε MAC 2 χρηστών.

Ορισμός 11.1 Διακριτό MAC χωρίς μνήμη: Αποτελείται από 3 αλφάβητα $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ και $\mathcal{Y}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $p(y|x_1, x_2)$.

Ορισμός 11.2 Κώδικας $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ για το MAC: Αποτελείται από δύο σύνολα ακεραίων $\mathcal{M}_1 = \{1, 2, \ldots, 2^{nR_1}\}$ και $\mathcal{M}_2 = \{1, 2, \ldots, 2^{nR_2}\}$ (σύνολα μηνυμάτων – message sets), δύο συναρτήσεις κωδικοποίησης (encoding functions):

$$X_1 : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{X}_1^n \text{ και}$$
$$X_2 : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{X}_2^n,$$

και μια συνάρτηση αποκωδικοποίησης (decoding function)

$$g : \mathcal{Y}^n \to \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2.$$

- Θεωρούμε *τέλειο* συγχρονισμό μεταξύ των χρηστών.

Περιοχή χωρητικότητας

Μετάδοση στο MAC

- Στο διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη ενός χρήστη, το ερώτημα που μας απασχόλησε ήταν πόσα είναι τα διαφορετικά μηνύματα που μπορούμε να μεταδώσουμε αξιόπιστα μέσα στο κανάλι.
- Στο MAC (χωρίς μνήμη) θέλουμε να βρούμε πόσα είναι τα διαφορετικά μηνύματα που μπορεί να μεταδώσει αξιόπιστα μέσα στο κανάλι κάθε χρήστης.
- Οι χρήστες δεν μπορούν να συνεργαστούν για τη μετάδοση.
- Ο χρήστης 1 επιλέγει ένα από 2^{nR_1} μηνύματα και στέλνει την αντίστοιχη κωδική λέξη στο κανάλι. Ομοίως, ο χρήστης 2 επιλέγει ένα από 2^{nR_2} μηνύματα ανεξάρτητα από το χρήστη 1 και εκπέμπει την αντίστοιχη κωδική λέξη.

Μετάδοση στο MAC (2)

- Ορισμός 11.3 Μέση Πιθανότητα Σφάλματος:

$$P_e^{(n)} = \frac{1}{2^{n(R_1+R_2)}} \sum_{(m_1,m_2)\in\mathcal{M}_1\times\mathcal{M}_2} \Pr\left\{g(Y^n) \neq (m_1,m_2) \middle| \text{εστάλη το } (m_1,m_2)\right\}$$

- Ορισμός 11.4 Ένα ζεύγος ρυθμών μετάδοσης (R_1, R_2) είναι εφικτό (achievable) για το MAC εάν υπάρχει ακολουθία κωδίκων $(2^{nR_1}, 2^{nR_2}, n)$ τέτοια ώστε $P_e^{(n)} \to 0$ για $n \to \infty$.
- Ορισμός 11.5 Η *περιοχή* χωρητικότητας (capacity region) του MAC είναι το κλειστό σύνολο (closure) της ένωσης (union) των εφικτών (R_1, R_2).

Η περιοχή χωρητικότητας του MAC είναι κυρτή

- Έστω $\mathbf{R}_1 = (R_{1,1}, R_{2,1})$ και $\mathbf{R}_2 = (R_{1,2}, R_{2,2})$ δύο ζεύγη ρυθμών μετάδοσης που ανήκουν στην περιοχή χωρητικότητας, $\mathcal{C}$, του MAC.
- Μπορούμε να μεταδώσουμε με οποιοδήποτε κυρτό συνδυασμό $\lambda\mathbf{R}_1 + (1-\lambda)\mathbf{R}_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$, μεταδίδοντας με $\mathbf{R}_1$ 100λ % του χρόνου και με $\mathbf{R}_2$ $100(1-\lambda)$ % του χρόνου (time sharing).
- Η πιθανότητα σφάλματος του κώδικα με time sharing είναι $\leq$ του αθροίσματος των πιθανοτήτων σφάλματος των επι μέρους κωδίκων (και, επομένως, μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή).
- Επομένως, η περιοχή χωρητικότητας του MAC (και κάθε καναλιού στο οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε time sharing) είναι κυρτή (convex).

Περιοχή Χωρητικότητας MAC

- Θεώρημα 11.6 (Cover 15.3.1): Η περιοχή χωρητικότητας του MAC $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, p(y|x_1, x_2), \mathcal{Y})$ είναι το <u>κλειστό σύνολο</u> (closure) του κυρτού κύτους (convex hull) όλων των (R_1, R_2) που ικανοποιούν τις σχέσεις

Περιοχή ρυθμών (rate region) MAC 2 χρηστών για δεδομένη $p(x_1)p(x_2)$

$$R_1 < I(X_1; Y|X_2),$$
$$R_2 < I(X_2; Y|X_1),$$
$$R_1 + R_2 < I(X_1, X_2; Y)$$

για κάποια κατανομή $p_1(x_1)p_2(x_2)$ στο σύνολο $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$.

Περιοχή Χωρητικότητας MAC (2)

- Δηλαδή, αν ονομάσουμε $\mathcal{R}(p_1, p_2)$ την περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης για συγκεκριμένες κατανομές $p_1 = p(X_1)$ και $p_2 = p(X_2)$ (δηλαδή την περιοχή της προηγούμενης διαφάνειας),

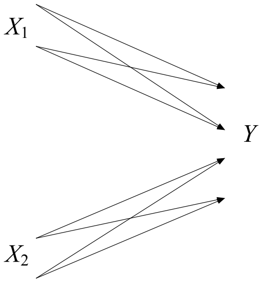
Περιοχή χωρητικότητας MAC 2 χρηστών

$$\mathcal{C} = \text{convex closure of } \cup_{p_1, p_2} \mathcal{R}(p_1, p_2).$$

- Δε θα το αποδείξουμε στο μάθημα.
- Σημείωση: Η κατανομή εισόδου είναι $p_1(x_1)p_2(x_2)$ γιατί θεωρούμε ότι οι χρήστες δεν μπορούν να συνεργαστούν.
- Υπάρχουν και άλλοι, πιο χρήσιμοι τρόποι να εκφράσουμε τη $\mathcal{C}$ (με χρήση time-sharing variable Q), αλλά δε θα επεκταθούμε (δείτε π.χ. El Gamal & Kim και Cover & Thomas).

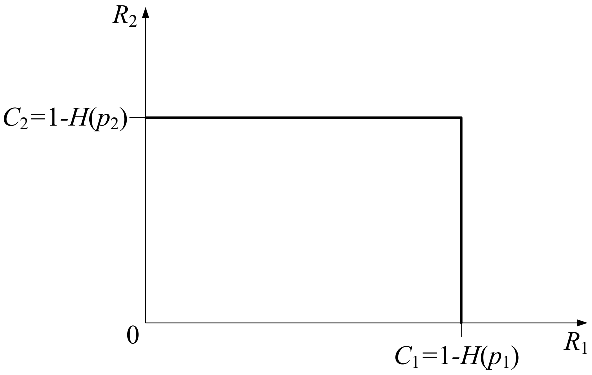
Παραδείγματα

Παράδειγμα 11.1 - Ανεξάρτητα BSC



- Μπορούμε να στείλουμε με $R_1 = 1 - H(p_1)$ από το 1ο κανάλι, και, ταυτόχρονα, με ρυθμό $R_2 = 1 - H(p_2)$ από το 2ο κανάλι.
- Τα δύο κανάλια είναι ανεξάρτητα $\longrightarrow$ δεν εμφανίζεται παρεμβολή.

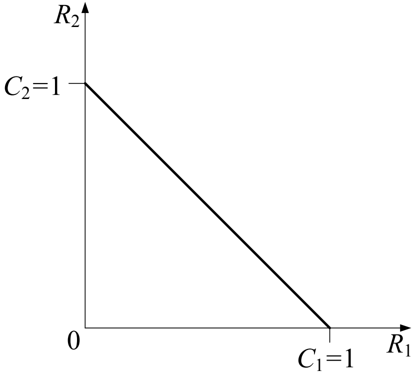
Παράδειγμα 11.1 - Ανεξάρτητα BSC – Περιοχή Χωρητικότητας



Παράδειγμα 11.2 - Δυαδικό Πολλαπλασιαστικό Κανάλι

- Οι X_1 και X_2 παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$. $Y = X_1 X_2$.
- Όταν $X_1 = 1$, μπορούμε να στείλουμε $R_2 = 1$ bit/χρήση καναλιού με χρήση ομοιόμορφης κατανομής για τη X_2. $R_1 = 0$, δεδομένου ότι η X_1 δεν αλλάζει.
- Ομοίως, όταν $X_2 = 1$, μπορούμε να στείλουμε $R_1 = 1$ bit/χρήση καναλιού με χρήση ομοιόμορφης κατανομής για τη X_1. $R_2 = 0$.
- Μπορούμε να πετύχουμε οποιοδήποτε ζεύγος $(\lambda, 1-\lambda), 0 \leq \lambda \leq 1$ με διαμέριση στο χρόνο (time sharing). Δηλαδή, "παγώνουμε" το X_2 για 100λ % του χρόνου και μεταδίδουμε με ομοιόμορφα κατανεμημένη X_1 (αντίστροφα για το υπόλοιπο $100(1-\lambda)$ %).

Παράδειγμα 11.2 - Δυαδικό Πολλαπλασιαστικό Κανάλι – Περιοχή Χωρητικότητας



Παράδειγμα 11.3 - Δυαδικό MAC Διαγραφής

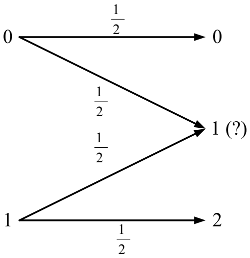
- Οι X_1 και X_2 παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$.
  $Y = X_1 + X_2$.
- Εάν $Y = 1$ δε γνωρίζουμε εάν η είσοδος ήταν $(X_1, X_2) = (1, 0)$ ή $(0, 1)$.
- Εάν θέσουμε $X_1 = 1$, μπορούμε να μεταδώσουμε με $R_2 = 1$ bit/χρήση καναλιού (με ομοιόμορφη X_2).
- Εάν θέσουμε $X_2 = 1$, μπορούμε να μεταδώσουμε με $R_1 = 1$ bit/χρήση καναλιού (με ομοιόμορφη X_1).
- Μπορούμε να στείλουμε με $R_1 + R_2 > 1$ bit/χρήση καναλιού;

Παράδειγμα 11.3 - Δυαδικό MAC Διαγραφής (2)

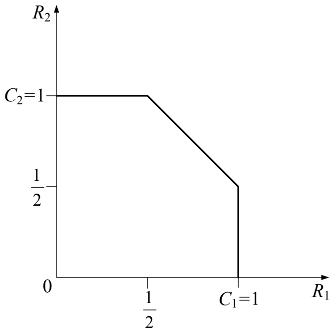
- Έστω ότι χρησιμοποιούμε ομοιόμορφη X_1. Επομένως, $R_1 = 1$ bit/χρήση καναλιού.
- Έστω, επίσης, ότι ο δέκτης αποκωδικοποιεί πρώτα το X_2. Όταν $Y = X_1 + X_2 = 0$ ή $Y = 2$, γνωρίζουμε το X_2 (ισούται με 0 και 1, αντίστοιχα).
- Αντίθετα, αν $Y = 1$, δεν μπορούμε να βρούμε άμεσα το X_2.
- Αν δούμε το X_1 ως ένα μηχανισμό διαγραφής, όταν $X_1 = X_2$ δεν εμφανίζεται διαγραφή, ενώ, αντίθετα, όταν $X_1 \neq X_2$ το X_2 διαγράφεται.
- Επομένως, από τη σκοπιά του χρήστη 2 το κανάλι είναι δυαδικό κανάλι διαγραφής με πιθανότητα διαγραφής $p = 1/2$.
- Ωστόσο, γνωρίζουμε ότι, αν $R_2 > 1 - 1/2 = 1/2$, ο χρήστης 2 μπορεί να μεταδώσει $1/2$ bit/χρήση του καναλιού.

Παράδειγμα 11.3 - Δυαδικό MAC Διαγραφής (3)

- Στη συνέχεια, ο δέκτης αφαιρεί την τιμή του X_2 (την οποία γνωρίζει με πιθανότητα σφάλματος που τείνει στο 0) από το Y, οπότε απομένει το X_1 (χωρίς θόρυβο).
- Επομένως, μπορούμε να στείλουμε 1 bit του χρήστη 1 και $1/2$ bit του χρήστη 2!
- Στο σχήμα εικονίζεται το κανάλι όπως το βλέπει ο δέκτης στο 1ο βήμα (αποκωδικοποίηση X_2).



Παράδειγμα 11.3 - Δυαδικό MAC Διαγραφής – Περιοχή Χωρητικότητας



- Μπορούμε, επίσης, να αρχίσουμε από το X_1 (οπότε το μέγιστο που μπορεί να μεταδώσει ο χρήστης 1 είναι $1/2$ bit/χρήση του καναλιού).
- Μπορούμε, τέλος, να επιτύχουμε οποιοδήποτε ζεύγος $(R_1, R_2) = (0.5+\alpha, 1-\alpha), 0 \leq \alpha \leq 0.5$ με time sharing.

Παράδειγμα 11.3 - Δυαδικό MAC Διαγραφής – Σχόλια

- Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η περιοχή χωρητικότητας επιτυγχάνεται με ομοιόμορφη $p_{X_1}(x_1)$ και ομοιόμορφη $p_{X_2}(x_2)$ (Bern$(1/2)$).
- Στη γενικότερη περίπτωση, για να μεταδώσουμε σε ένα συγκεκριμένο σημείο της περιοχής χωρητικότητας απαιτείται time sharing, δηλαδή πρέπει να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικές κατανομές για διαφορετικά ποσοστά του χρόνου.
- Όταν αρκεί μόνο μία κατανομή για να πετύχουμε *όλα* τα σημεία της περιοχής χωρητικότητας, η $\mathcal{C}$ είναι πεντάγωνο (ή τρίγωνο ή τετράγωνο σε τετριμμένες περιπτώσεις).
- Αλλιώς, η $\mathcal{C}$ προκύπτει από κυρτή ένωση πενταγώνων.
- Αποδεικνύεται, επίσης, ότι ο μέγιστος αριθμός κατανομών που απαιτείται να συνδυάσουμε για να μεταδώσουμε σε ένα οποιοδήποτε σημείο της περιοχής χωρητικότητας είναι πεπερασμένος (στην περίπτωση του MAC 2 χρηστών ίσος με 2).

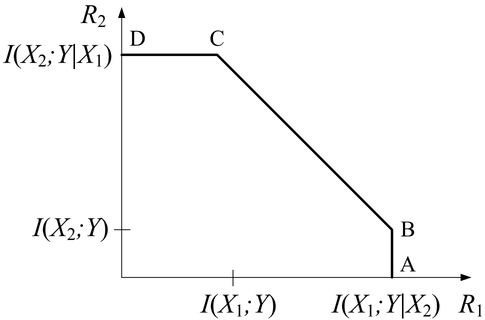
Γενική μορφή περιοχής χωρητικότητας MAC

Περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης (Rate Region)

- Υπενθυμίζεται ότι, για δεδομένη $p(x_1)p(x_2)$ στο σύνολο $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, η περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης δίνεται από τις ανισότητες

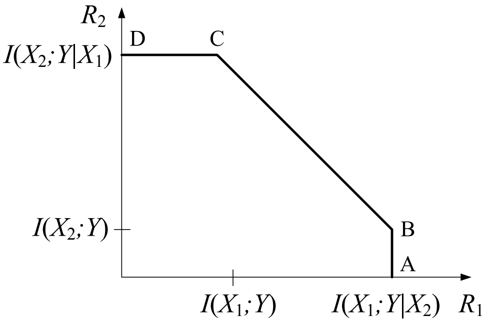
$$\begin{aligned} R_1 &< I(X_1; Y|X_2), \\ R_2 &< I(X_2; Y|X_1), \\ R_1 + R_2 &< I(X_1, X_2; Y). \end{aligned}$$

Περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης (Rate Region) (2)



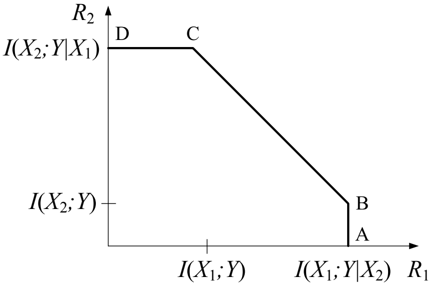
- Θεωρούμε δεδομένη $p(x_1)p(x_2)$. Η περιοχή εφικτών ρυθμών μετάδοσης (όχι η περιοχή χωρητικότητας) φαίνεται στο Σχήμα.
- Σημείο Β: Η X_1 δημιουργεί τυχαιότητα ("θόρυβο") στη μετάδοση της X_2. Ο μέγιστος ρυθμός για τη μετάδοση της X_2 ισούται με $I(X_2;Y)$. Στο δέκτη, ανιχνεύεται αρχικά η X_2.

Περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης (Rate Region) (3)



- Δεδομένης, τώρα, της τιμής x_2 της X_2, ο δέκτης προχωρά στην αποκωδικοποίηση της X_1.
- Ο R_1 ισούται με $\sum_{x_2} p(x_2) I(X_1; Y | X_2 = x_2) = I(X_1; Y | X_2)$.
- Προφανώς, μπορούμε να επιτύχουμε και οποιαδήποτε άλλη τιμή $R_2 < I(X_1; Y | X_2)$.

Περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης (Rate Region) (4)



- Σημεία C και D: Αντίστοιχα με τα A και B, αλλά με τους ρόλους των X_1 και X_2 ανεστραμμένους.
- Επιπλέον του ρυθμού μετάδοσης αλλάζει και η σειρά αποκωδικοποίησης στο δέκτη. Δηλαδή, για το σημείο B αποκωδικο-ποιείται πρώτα η X_2, ενώ για το σημείο C αποκωδικοποιείται πρώτα η X_1. Επίσης, αλλάζουν και τα βιβλία κωδίκων.

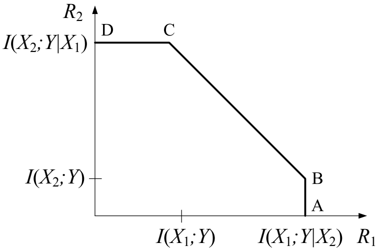
Διαδοχική Αποκωδικοποίηση (Successive Decoding) στο MAC

- Η ιδέα της διαδοχικής αποκωδικοποίησης (successive decoding ή successive interference cancellation - SIC) είναι κεντρική στο MAC (καθώς και στο degraded Broadcast Channel, όπως θα δούμε αργότερα).
- Π.χ. για το σημείο B. Αποκωδικοποιούμε τη X_2 θεωρώντας τη X_1 ως θόρυβο.
- Ανάλογα με την τιμή της X_2, από τη σκοπιά της X_1 βλέπουμε $|\mathcal{X}_2|$ διαφορετικά κανάλια. Αφού βρούμε την τιμή της X_2 επιλέγουμε το (ένα από τα $|\mathcal{X}_2|$) κανάλι που "βλέπει" η X_1 και αποκωδικοποιούμε με βάση αυτό το συγκεκριμένο κανάλι.

Διαδοχική Αποκωδικοποίηση (Successive Decoding) στο MAC (2)

- Αντιστρόφως, για το σημείο C, αποκωδικοποιείται πρώτα η X_1 και η X_2 αποκωδικοποιείται με βάση ένα από $|\mathcal{X}_1|$ διαφορετικά κανάλια.
- Στο Γκαουσιανό MAC, η επιλογή καναλιού γίνεται με αφαίρεση, όπως θα δούμε στη συνέχεια.
- Το τμήμα μεταξύ των B και C επιτυγχάνεται με time sharing.

Περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης (Rate Region) (5)



- Το ευθύγραμμο τμήμα BC έχει κλίση 45^o. (Αποδείξτε το ως άσκηση)
- Αποδεικνύεται, επίσης (δείτε π.χ. El Gamal & Kim) ότι μπορούμε να επιτύχουμε οποιοδήποτε σημείο της περιοχής επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης χωρίς να απαιτείται time sharing εφαρμόζοντας από κοινού αποκωδικοποίηση των X_1 και X_2 στο δέκτη (αντί για SIC).

Γενική Μορφή Περιοχής Χωρητικότητας MAC

- Για να βρούμε την περιοχή χωρητικότητας του MAC πρέπει να πάρουμε το κλειστό σύνολο (closure) του κυρτού κύτους όλων των περιοχών επιτεύξιμων ρυθμών (για όλες τις $p(x_1)p(x_2)$).
- Για παράδειγμα, για να μεγιστοποιήσουμε τον R_1, ενδέχεται να πρέπει να "παγώσουμε" τη X_2 σε μια τιμή x_2 για την οποία μεγιστοποιείται η $I(X_1;Y|X_2=x_2)$: $\max R_1 = \max_{p_1(x_1)p_2(x_2)} I(X_1;Y|X_2) = \max_{p_1(x_1)p_2(x_2)} \sum_{x_2} p_2(x_2) I(X_1;Y|X_2=x_2)$
$\leq \max_{p_1(x_1)} \{\max_{x_2} I(X_1;Y|X_2=x_2)\}$.
- Αν δεν υπάρχει κατανομή $p_2(x_2)$ με περισσότερες από μία μη μηδενικές μάζες η οποία μεγιστοποιεί τον R_1, τα σημεία A και B ταυτίζονται.
- Στο Παράδειγμα 11.2, για να μεγιστοποιήσουμε τον R_1 πρέπει να "παγώσουμε" τη X_2 στο 1 (και αντιστρόφως).

Γενική Μορφή Περιοχής Χωρητικότητας MAC (2)

- Ωστόσο, ενδέχεται να υπάρχει κατανομή $p_2(x_2)$ με μη μηδενική εντροπία για την οποία ισχύει ότι $\max_{p_1(x_1)p_2(x_2)} \sum_{x_2} p_2(x_2) I(X_1; Y|X_2 = x_2)$ $= \max_{p_1(x_1)} \{\max_{x_2} I(X_1; Y|X_2 = x_2)\}$.
- Στο Παράδειγμα 11.3, μπορούμε να επιτύχουμε το μέγιστο ρυθμό $R_1 = 1$ (με ομοιόμορφη X_1) και, ταυτόχρονα, $R_2 = 0.5$ bit (με ομοιόμορφη X_2).
- Παρατηρήστε ότι, ακόμα και αν είχαμε "παγώσει" τη X_2 σε μία σταθερή τιμή, δε θα μπορούσαμε να μεταδώσουμε με $R_1 > 1$.
- Παρόλο που στο Παράδειγμα 11.3 η περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών για ομοιόμορφες p_1 και p_2 ταυτίζεται με την περιοχή χωρητικότητας, στη γενική περίπτωση η περιοχή χωρητικότητας είναι ένα κυρτό σύνολο που προέρχεται από την ένωση πενταγώνων (ή εκφυλισμένων πενταγώνων).

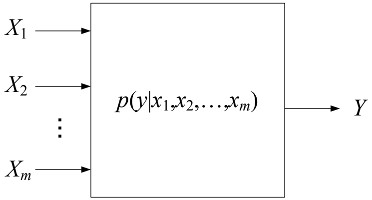
Γενική Μορφή Περιοχής Χωρητικότητας MAC (3)

- Όπως θα δούμε, μία πολύ σημαντική ειδική περίπτωση όπου όλα τα σημεία στο όριο της περιοχής χωρητικότητας επιτυγχάνονται από μία μόνο κατανομη $p_1(x_1)p_2(x_2)$ είναι το Γκαουσιανό MAC.
- Όπως προαναφέρθηκε, αποδεικνύεται ότι, για να επιτευχθεί οποιοδήποτε σημείο της περιοχής χωρητικότητας του MAC 2 χρηστών, αρκεί time sharing μεταξύ 2 το πολύ κατανομών $p_1(x_1)p_2(x_2)$.
- Για λεπτομέρειες, δείτε El Gamal & Kim.
- Αποδεικνύεται, επίσης, ότι οποιοδήποτε σημείο της περιοχής χωρητικότητας, $\mathcal{C}$, μπορεί να επιτευχθεί χωρίς time sharing με χρήση coded time sharing (για λεπτομέρειες, δείτε El Gamal & Kim).

Διευκρίνιση: 2 είδη time sharing

1. Time sharing μεταξύ βιβλίων κωδίκων για *δεδομένη* $p_1(x_1)p_2(x_2)$ (και, επομένως, δεδομένη rate region).
   - Για κάθε ένα από τα δύο σημεία χρησιμοποιούμε SIC στο δέκτη. Η σειρά SIC αλλάζει όταν αλλάζουμε σημείο.
   - Μπορούμε να μην κάνουμε timesharing αν χρησιμοποιήσουμε από κοινού (ταυτόχρονη) αποκωδικοποίηση των X_1 και X_2 στο δέκτη.
2. Time sharing μεταξύ $|\mathcal{Q}| = 2$ (για το MAC 2 χρηστών) διαφορετικών γινομένων κατανομών $p_1(x_1)p_2(x_2)$ προκειμένου να επιτύχουμε οποιοδήποτε σημείο της περιοχής χωρητικότητας.
   - Μπορούμε να μην κάνουμε time sharing αν χρησιμοποιήσουμε coded time sharing (δε θα επεκταθούμε σε αυτό το μάθημα).

Γενίκευση MAC για m χρήστες



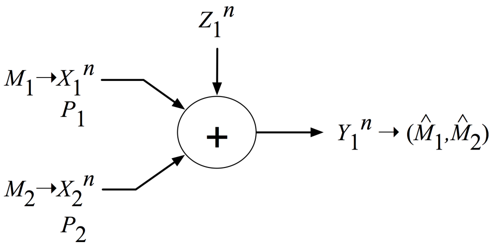
- Θεώρημα 11.7 (Cover 15.3.6): Η περιοχή χωρητικότητας του MAC m χρηστών είναι το κλειστό σύνολο (closure) του κυρτού κύτους (convex hull) των διανυσμάτων $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$ που ικανοποιούν τις σχέσεις

  $$R(S) \leq I(X(S); Y|X(S^c)) \text{ για \underline{όλα} τα σύνολα } S \subseteq \{1, 2, \ldots, m\},$$

  όπου S^c το συμπλήρωμα του S και για όλες τις κατανομές εισόδου (με ανεξάρτητα X_i).

Το Γκαουσιανό MAC

Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών



- Τη χρονική στιγμή n ο δέκτης λαμβάνει σήμα $Y_n = X_{1n} + X_{2n} + Z_n$, όπου ο θόρυβος Z είναι i.i.d $\sim \mathcal{N}(0, N)$. Επίσης, ο κάθε πομπός i υπόκειται σε περιορισμό ισχύος P_i. Οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες.

Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών (2)

- Για την $I(X_1; Y|X_2)$ μπορούμε να γράψουμε

$$
\begin{aligned}
I(X_1; Y|X_2) &= h(Y|X_2) - h(Y|X_1, X_2) \\
&= h(X_1 + X_2 + Z|X_2) - h(X_1 + X_2 + Z|X_1, X_2) \\
&= h(X_1 + Z|X_2) - h(Z|X_1, X_2) = h(X_1 + Z) - h(Z) \\
&= h(X_1 + Z) - \frac{1}{2}\log\left(2\pi e N\right) \\
&\overset{(a)}{\leq} \frac{1}{2}\log\left(2\pi e(P_1 + N)\right) - \frac{1}{2}\log\left(2\pi e N\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P_1}{N}\right).
\end{aligned}
$$

(a) γιατί;

Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών (3)

- Ομοίως, $I(X_2; Y|X_1) \leq \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P_2}{N}\right)$.
- Η X_1 και η X_2 πρέπει να ακολουθούν γκαουσιανή κατανομή ($\mathcal{N}(0, P_1)$ και $\mathcal{N}(0, P_2)$, αντίστοιχα).

Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών – Περιοχή Χωρητικότητας

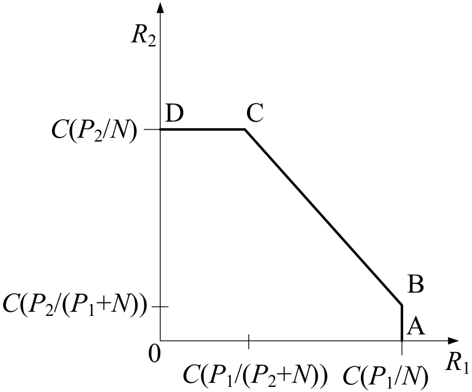
- Ορίζουμε τη χωρητικότητα του καναλιού AWGN με λόγο σήματος προς θόρυβο x ως $C(x) \triangleq \frac{1}{2}\log(1+x)$.
- Η περιοχή χωρητικότητας του γκαουσιανού MAC 2 χρηστών δίνεται από τις σχέσεις

Χωρητικότητα γκαουσιανού MAC 2 χρηστών

$$R_1 \leq C\left(\frac{P_1}{N}\right), \; R_2 \leq C\left(\frac{P_2}{N}\right) \text{ και } R_1 + R_2 \leq C\left(\frac{P_1+P_2}{N}\right)$$

και επιτυγχάνεται με $X_1 \sim \mathcal{N}(0, P_1)$ και $X_2 \sim \mathcal{N}(0, P_2)$.

Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών – Περιοχή Χωρητικότητας (2)



- Μπορούμε να επιτύχουμε ρυθμό μετάδοσης έως και $C\left(\frac{P_1+P_2}{N}\right)$, σα να είχαμε, δηλαδή, έναν πομπό που εκπέμπει με ισχύ $P_1 + P_2$.

Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών – Σχόλια

- Θεωρούμε το σημείο B. Ο δέκτης αποκωδικοποιεί πρώτα την πληροφορία του πομπού 2, θεωρώντας τη μετάδοση του πομπού 1 ως θόρυβο: $R_2 = C\left(\frac{P_2}{P_1+N}\right)$.
- Στη συνέχεια, ο δέκτης αφαιρεί από το σήμα Y το αποκωδικοποιημένο σήμα X_2. Επομένως, το μόνο άγνωστο σήμα που απομένει είναι ο θόρυβος και $R_1 = C\left(\frac{P_1}{N}\right)$.
- Για το σημείο C εφαρμόζεται η αντίθετη διαδικασία. Δηλαδή, αποκωδικοποίηση του X_1 θεωρώντας ότι το X_2 είναι θόρυβος, αφαίρεση του X_1 από το Y και αποκωδικοποίηση του X_2 παρουσία μόνο του θορύβου.
- Η διαδικασία αυτή ονομάζεται διαδοχική αποκωδικοποίηση (successive decoding), διαδοχική απαλοιφή παρεμβολών (successive interference cancellation - SIC) ή onion peeling.

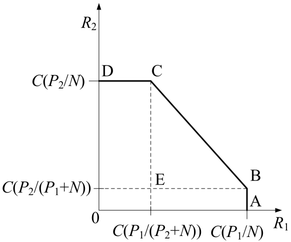
Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών – Σχόλια (2)

- Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, στην ειδική περίπτωση Γκαουσιανού MAC, μια κατανομή είσόδου (το γινόμενο δύο Γκαουσιανών) αρκεί για να επιτύχουμε οποιοδήποτε σημείο της περιοχής χωρητικότητας.
- Ωστόσο, αναλόγως με το σημείο, αλλάζουν οι κωδικές λέξεις που πρέπει να στείλουμε (και ο αριθμός τους).
- Για παράδειγμα, ένας τρόπος για να μεταδώσουμε με $\max(R, R)$ (στη μέση της ευθείας BC) είναι να μεταδίδουμε το 50% του χρόνου με βιβλίο κωδίκων που επιτυγχάνει το σημείο B και το άλλο 50% με βιβλίο κωδίκων που επιτυγχάνει το σημείο C.
- Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε καλούς κώδικες που έχουν σχεδιαστεί για το κανάλι AWGN ενός χρήστη και στο Γκαουσιανό MAC.

Σύγκριση με CDMA, TDMA και FDMA

Σύγκριση με CDMA uplink

- Uplink: Μετάδοση πληροφορίας από χρήστες σε σταθμό βάσης. Εμπίπτει στο μοντέλο του MAC (παρόλο που, στη γενική περίπτωση, είναι MAC με διαλείψεις (fading)).
- Στα συμβατικά συστήματα CDMA ο κάθε χρήστης αποκωδικοποιείται θεωρώντας την επικοινωνία των άλλων χρηστών ως παρεμβολή (σημείο E).
- Με χρήση SIC αυξάνεται ο συνολικός ρυθμός μετάδοσης και το πρόβλημα near-far παύει να υφίσταται.

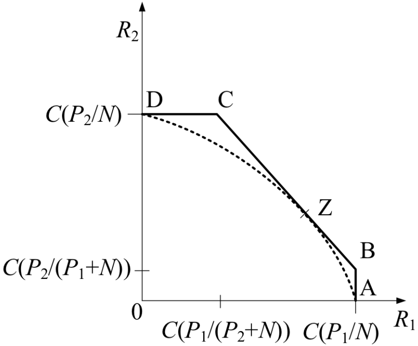


Σύγκριση με FDMA uplink

- Έστω ότι οι δύο χρήστες μοιράζονται το φάσμα. Ο χρήστης 1 χρησιμοποιεί W_1 Hz, ενώ ο χρήστης 2 χρησιμοποιεί W_2 Hz. Το συνολικό φάσμα ισούται με $W_1 + W_2 = W$ Hz.
- Ο κάθε χρήστης εκπέμπει μόνος του στο κανάλι AWGN που του αναλογεί. Επομένως,

$$
\begin{aligned}
R_1 &= W_1 \log\left(1 + \frac{P_1}{NW_1}\right) \\
R_2 &= W_2 \log\left(1 + \frac{P_2}{NW_2}\right) = (W - W_1) \log\left(1 + \frac{P_2}{N(W - W_1)}\right)
\end{aligned}
$$

Σύγκριση με FDMA uplink (2)



- Η καμπύλη εφάπτεται με το όριο της περιοχής χωρητικότητας σε ένα μόνο σημείο στο οποίο ισχύει $P_1/W_1 = P_2/W_2$.
- Επομένως, στη γενική περίπτωση, η χρήση FDMA στο MAC είναι υποβέλτιστη (suboptimal).

Σύγκριση με TDMA uplink

- Ο χρήστης 1 μεταδίδει για $\alpha 100$ % του συνολικού χρόνου. Η μέση ισχύς του κατά τη διάρκεια μετάδοσης είναι P_1/α (έτσι ώστε η συνολική του ενέργεια στη μονάδα του χρόνου να ισούται με P_1).
- Ο χρήστης 2 μεταδίδει για $(1-\alpha)100$ % του συνολικού χρόνου. Η μέση ισχύς του κατά τη διάρκεια μετάδοσης είναι $P_2/(1-\alpha)$.
- Επομένως,

$$R_1 = \alpha W \log\left(1 + \frac{P_1}{N\alpha W}\right)$$
$$R_2 = (1-\alpha) W \log\left(1 + \frac{P_2}{N(1-\alpha)W}\right)$$

- Η ίδια περιοχή, όπως και στην περίπτωση FDMA.

MAC: Σχόλια

- FDMA/TDMA υποβέλτιστες, εκτός εάν $P_i/W_i = c$ για όλους τους χρήστες i.
- CDMA υποβέλτιστη, εκτός εάν ο δέκτης χρησιμοποιεί SIC (onion peeling).
- $\sum_i R_i \leq C\left(\frac{\sum_i P_i}{N}\right)$. Επομένως, για κάθε επιπρόσθετο χρήστη που εμφανίζεται στο κανάλι η συνολική χωρητικότητα αυξάνει!
- Ωστόσο, λόγω της λογαριθμικής σχέσης μεταξύ P και C, η χωρητικότητα ανά χρήστη $\frac{1}{m}C\left(\frac{\sum_i P_i}{N}\right) \to 0$ για αριθμό χρηστών $m \to \infty$.

Διαχωρισμός πηγής-καναλιού

Εισαγωγή

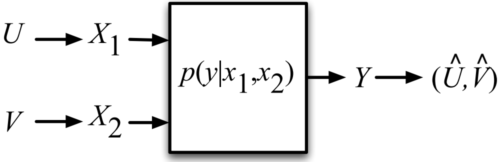
- Θα ολοκληρώσουμε την αναφορά στο MAC με τη εξέταση των διαφορών του από το κανάλι ενός πομπού και ενός δέκτη όσον αφορά
    - το διαχωρισμό πηγής-καναλιού και
    - την ανάδραση
- Θα δούμε ότι υπάρχουν διαφορές.

Διαχωρισμός πηγής-καναλιού

- Είδαμε ότι το θεώρημα διαχωρισμού καναλιού-πηγής για κανάλια ενός χρήστη μας επιτρέπει να διαχωρίσουμε τη συμπίεση πηγής από τη συμπίεση καναλιού χωρίς να υπάρχει απώλεια στον επιτεύξιμο ρυθμό μετάδοσης πληροφορίας.
- Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι αν η τομή της περιοχής χωρητικότητας του MAC με την περιοχή Slepian-Wolf δεν είναι το κενό σύνολο, είναι εφικτή η μετάδοση πληροφορίας από συσχετισμένες πηγές σε ένα δέκτη μέσω του MAC που παρεμβάλλεται ανάμεσά τους.
- Παρατηρήστε ότι, στη γενική περίπτωση, οι πηγές είναι συσχετισμένες και όχι ανεξάρτητες (όπως υποθέσαμε για τον υπολογισμό της περιοχής χωρητικότητας του MAC).

Διαχωρισμός πηγής-καναλιού (2)

- Το μοντέλο του προβλήματος φαίνεται στο σχήμα.
- Σε αντίθεση με το βασικό μοντέλο κατανεμημένης κωδικοποίησης, στη γενική περίπτωση, ο δέκτης δεν έχει απευθείας πρόσβαση στα X_1 και X_2.

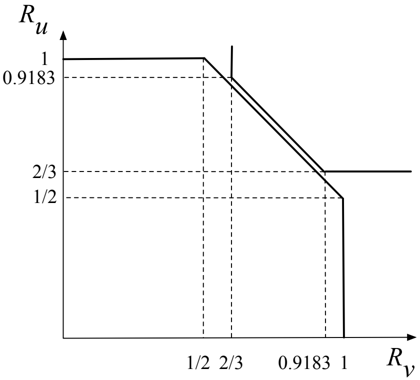


Παράδειγμα 11.4 (Cover & Thomas Example 15.4.2)

- Έστω *δυαδικές* πηγές U και V με από κοινού κατανομή $p(u,v)=0$ για $u=0$, $v=1$ και $p(u,v)=1/3$ για όλους τους άλλους συνδυασμούς u και v.
- Από το θεώρημα Slepian-Wolf γνωρίζουμε ότι, προκειμένου να μπορέσουμε να αποσυμπιέσουμε στο δέκτη με αυθαίρετα μικρή πιθανότητα σφάλματος πρέπει $R_u > H(U|V) = 2/3$ bits, $R_v > H(V|U) = 2/3$ bits και $R_u + R_v > H(U,V) = \log_2 3$ bits.
- Έστω ότι η μετάδοση γίνεται στο δυαδικό MAC διαγραφής του Παραδείγματος 11.3.

Παράδειγμα 11.4 (2)

- Η περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών συμπίεσης και η περιοχή χωρητικότητας του δυαδικού MAC διαγραφής έχουν σχεδιαστεί στο Σχήμα.
- Παρατηρούμε ότι οι περιοχές δεν τέμνονται.



Παράδειγμα 11.4 (3)

- Ωστόσο, στο συγκεκριμένο παράδειγμα μπορούμε να μεταδώσουμε την πληροφορία των U και V με μηδενική πιθανότητα σφάλματος, μεταδίδοντας απλώς την τιμή τους.
- Αν $Y = 0$, $U = V = 0$. Αν $Y = 1$, $U = 1$ και $V = 0$. Αν $Y = 2$, $U = V = 1$.
- Επομένως, το θεώρημα διαχωρισμού πηγής-καναλιού δεν ισχύει σε κανάλια πολλών χρηστών!
- Δηλαδή, το να προσπαθούμε να σχηματίζουμε ανεξάρτητη πληροφορία σε κάθε πομπό (όπως επιχειρεί η κωδικοποίηση Slepian-Wolf) και μετά να τη μεταδίδουμε, δεν είναι πάντοτε βέλτιστο.

Παράδειγμα 11.4 (4)

- Γιατί δεν ισχύει το θεώρημα διαχωρισμού πηγής-καναλιού στο MAC;
- Στο MAC υποθέτουμε ότι οι πομποί δε συνεργάζονται μεταξύ τους. Εάν επιτρέπεται συνεργασία, δηλαδή επιτρέπεται να ισχύει $p(x_1, x_2) \neq p(x_1)p(x_2)$, η περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης είναι υπερσύνολο της περιοχής χωρητικότητας του MAC.
- Επομένως, ενδέχεται ο τρόπος με τον οποίο είναι εξαρτημένες οι δύο πηγές να επιτυγχάνει μεγαλύτερη περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης. Σε αυτήν την περίπτωση είναι προτιμότερο να διατηρήσουμε αυτήν την εξάρτηση αντί να δημιουργήσουμε ανεξάρτητες τ.μ. στους πομπούς (όπως κάνει η κωδικοποίηση Slepian-Wolf).
- Για περισσότερες λεπτομέρειες στο θέμα αυτό δείτε El Gamal & Kim.

Χρήση ανάδρασης στο MAC

- Είδαμε ότι η χρήση ανάδρασης δεν αυξάνει τη χωρητικότητα καναλιών ενός χρήστη (αν και, σε κάποιες περιπτώσεις, ενδέχεται να μειώνει την πολυπλοκότητα που απαιτείται για τη μετάδοση).
- Αντίθετα, υπάρχουν περιπτώσεις MACs όπου η χρήση ανάδρασης αυξάνει τη χωρητικότητα ακόμη και όταν το κανάλι δεν έχει μνήμη.
- Δείτε, για παράδειγμα, Cover & Thomas σελ. 593–594.
- Διαισθητικά, η παροχή πληροφορίας από το δέκτη στον πομπό τού παρέχει και έμμεσα πληροφορία για άλλους πομπούς, με αποτέλεσμα να είναι δυνατή η μετάδοση εξαρτημένων συμβόλων (μεταξύ πομπών).