

ΕΕ728

Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας

13η διάλεξη

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

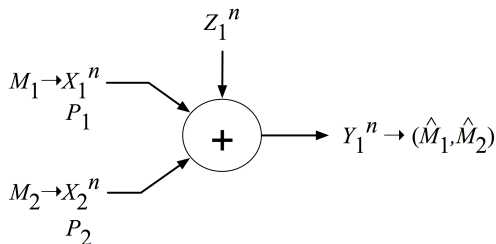
Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

21 Μαΐου 2013

Περιεχόμενα 13ης εβδομάδας

- 1 Το Γκαουσιανό MAC
 - Μοντέλο και περιοχή χωρητικότητας
 - Σύγκριση με CDMA, TDMA και FDMA
- 2 Διαχωρισμός πηγής-καναλιού
- 3 MAC με ανάδραση
- 4 Το Κανάλι Ευρυεκπομπής (Broadcast Channel - BC)
 - Εισαγωγή και Ορισμοί
 - Περιοχή Χωρητικότητας
- 5 Υποβαθμισμένο (degraded) και Γκαουσιανό BC
 - Ορισμός και περιοχή χωρητικότητας
 - Κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση
 - Το Γκαουσιανό BC

Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών



- Τη χρονική στιγμή n ο δέκτης λαμβάνει σήμα $Y_n = X_{1n} + X_{2n} + Z_n$, όπου ο θόρυβος Z είναι i.i.d $\sim \mathcal{N}(0, N)$. Επίσης, ο κάθε πομπός i υπόκειται σε περιορισμό ισχύος P_i . Οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες.

Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών (2)

- Για την $I(X_1; Y|X_2)$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
 I(X_1; Y|X_2) &= h(Y|X_2) - h(Y|X_1, X_2) \\
 &= h(X_1 + X_2 + Z|X_2) - h(X_1 + X_2 + Z|X_1, X_2) \\
 &= h(X_1 + Z|X_2) - h(Z|X_1, X_2) = h(X_1 + Z) - h(Z) \\
 &= h(X_1 + Z) - \frac{1}{2} \log(2\pi eN) \\
 &\stackrel{(a)}{\leq} \frac{1}{2} \log(2\pi e(P_1 + N)) - \frac{1}{2} \log(2\pi eN) \\
 &= \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P_1}{N}\right).
 \end{aligned}$$

(a) γιατί;

Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών (3)

- Ομοίως, $I(X_2; Y|X_1) \leq \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P_2}{N} \right)$.
- Η X_1 και η X_2 πρέπει να ακολουθούν γκαουσιανή κατανομή ($\mathcal{N}(0, P_1)$ και $\mathcal{N}(0, P_2)$), αντίστοιχα).

Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών – Περιοχή Χωρητικότητας

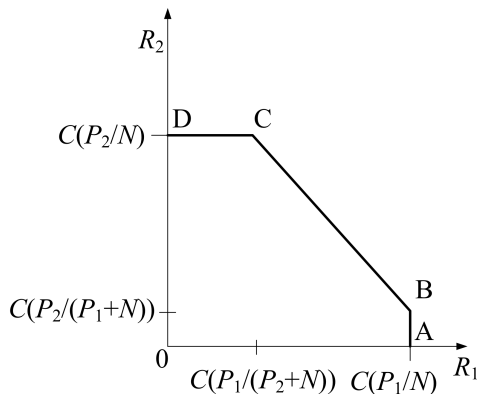
- Ορίζουμε τη χωρητικότητα του καναλιού AWGN με λόγο σήματος προς θόρυβο x ως $C(x) \triangleq \frac{1}{2} \log(1 + x)$.
- Η περιοχή χωρητικότητας του γκαουσιανού MAC 2 χρηστών δίνεται από τις σχέσεις

Χωρητικότητα γκαουσιανού MAC 2 χρηστών

$$R_1 \leq C\left(\frac{P_1}{N}\right), R_2 \leq C\left(\frac{P_2}{N}\right) \text{ και } R_1 + R_2 \leq C\left(\frac{P_1 + P_2}{N}\right)$$

και επιτυγχάνεται με $X_1 \sim \mathcal{N}(0, P_1)$ και $X_2 \sim \mathcal{N}(0, P_2)$.

Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών – Περιοχή Χωρητικότητας (2)



- Μπορούμε να επιτύχουμε ρυθμό μετάδοσης έως και $C\left(\frac{P_1+P_2}{N}\right)$, σα να είχαμε, δηλαδή, έναν πομπό που εκπέμπει με ισχύ $P_1 + P_2$.

Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών – Σχόλια

- Θεωρούμε το σημείο B. Ο δέκτης αποκωδικοποιεί πρώτα την πληροφορία του πομπού 2, θεωρώντας τη μετάδοση του πομπού 1 ως θόρυβο: $R_2 = C \left(\frac{P_2}{P_1 + N} \right)$.
- Στη συνέχεια, ο δέκτης αφαιρεί από το σήμα Y το αποκωδικοποιημένο σήμα X_2 . Επομένως, το μόνο άγνωστο σήμα που απομένει είναι ο θόρυβος και $R_1 = C \left(\frac{P_1}{N} \right)$.
- Για το σημείο C εφαρμόζεται η αντίθετη διαδικασία. Δηλαδή, αποκωδικοποίηση του X_1 θεωρώντας ότι το X_2 είναι θόρυβος, αφαίρεση του X_1 από το Y και αποκωδικοποίηση του X_2 παρουσία μόνο του θορύβου.
- Η διαδικασία αυτή ονομάζεται διαδοχική αποκωδικοποίηση (successive decoding), διαδοχική απαλοιφή παρεμβολών (successive interference cancellation - SIC) ή onion peeling.

Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών – Σχόλια (2)

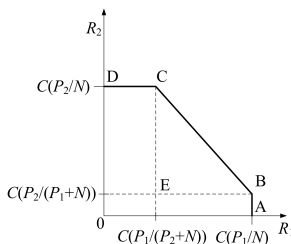
- Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, στην ειδική περίπτωση Γκαουσιανού MAC, μια κατανομή εισόδου (το γινόμενο δύο Γκαουσιανών) αρκεί για να επιτύχουμε οποιοδήποτε σημείο της περιοχής χωρητικότητας.
- Ωστόσο, ανάλογα με το σημείο, αλλάζουν οι κωδικές λέξεις που πρέπει να στείλουμε (και ο αριθμός τους).
- Για παράδειγμα, ένας τρόπος για να μεταδώσουμε με $\max(R, R)$ (στη μέση της ευθείας BC) είναι να μεταδίδουμε το 50% του χρόνου με βιβλίο κωδίκων που επιτυγχάνει το σημείο B και το άλλο 50% με βιβλίο κωδίκων που επιτυγχάνει το σημείο C.
- Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε καλούς κώδικες που έχουν σχεδιαστεί για το κανάλι AWGN ενός χρήστη και στο Γκαουσιανό MAC.

Σύγκριση με CDMA, TDMA και FDMA

- 1 Το Γκαουσιανό MAC
 - Μοντέλο και περιοχή χωρητικότητας
 - Σύγκριση με CDMA, TDMA και FDMA
- 2 Διαχωρισμός πηγής-καναλιού
- 3 MAC με ανάδραση
- 4 Το Κανάλι Ευρυεκπομπής (Broadcast Channel - BC)
 - Εισαγωγή και Ορισμοί
 - Περιοχή Χωρητικότητας
- 5 Υποβαθμισμένο (degraded) και Γκαουσιανό BC
 - Ορισμός και περιοχή χωρητικότητας
 - Κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση
 - Το Γκαουσιανό BC

Σύγκριση με CDMA uplink

- Uplink: Μετάδοση πληροφορίας από χρήστες σε σταθμό βάσης. Εμπίπτει στο μοντέλο του MAC (παρόλο που, στη γενική περίπτωση, είναι MAC με διαλείψεις (fading)).
- Στα συμβατικά συστήματα CDMA ο κάθε χρήστης αποκωδικοποιείται θεωρώντας την επικοινωνία των άλλων χρηστών ως παρεμβολή (σημείο E).
- Με χρήση SIC αυξάνεται ο συνολικός ρυθμός μετάδοσης και το πρόβλημα near-far παύει να υφίσταται.



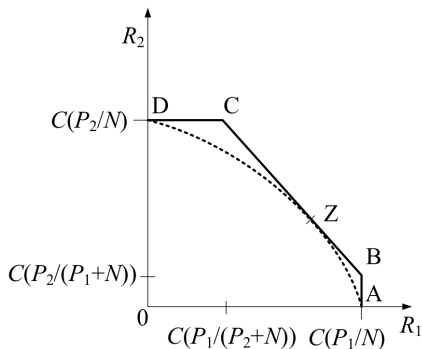
Σύγκριση με FDMA uplink

- Έστω ότι οι δύο χρήστες μοιράζονται το φάσμα. Ο χρήστης 1 χρησιμοποιεί W_1 Hz, ενώ ο χρήστης 2 χρησιμοποιεί W_2 Hz. Το συνολικό φάσμα ισούται με $W_1 + W_2 = W$ Hz.
- Ο κάθε χρήστης εκπέμπει μόνος του στο κανάλι AWGN που του αναλογεί. Επομένως,

$$R_1 = W_1 \log \left(1 + \frac{P_1}{NW_1} \right)$$

$$R_2 = W_2 \log \left(1 + \frac{P_2}{NW_2} \right) = (W - W_1) \log \left(1 + \frac{P_2}{N(W - W_1)} \right)$$

Σύγκριση με FDMA uplink (2)



- Η καμπύλη εφάπτεται με το όριο της περιοχής χωρητικότητας σε ένα μόνο σημείο στο οποίο ισχύει $P_1/W_1 = P_2/W_2$.
- Επομένως, στη γενική περίπτωση, η χρήση FDMA στο MAC είναι υποβέλτιστη (suboptimal).

Σύγκριση με TDMA uplink

- Ο χρήστης 1 μεταδίδει για $\alpha 100\%$ του συνολικού χρόνου. Η μέση ισχύς του κατά τη διάρκεια μετάδοσης είναι P_1/α (έτσι ώστε η συνολική του ενέργεια στη μονάδα του χρόνου να ισούται με P_1).
- Ο χρήστης 2 μεταδίδει για $(1 - \alpha) 100\%$ του συνολικού χρόνου. Η μέση ισχύς του κατά τη διάρκεια μετάδοσης είναι $P_2/(1 - \alpha)$.
- Επομένως,

$$R_1 = \alpha W \log \left(1 + \frac{P_1}{N\alpha W} \right)$$

$$R_2 = (1 - \alpha) W \log \left(1 + \frac{P_2}{N(1 - \alpha)W} \right)$$

- Η ίδια περιοχή, όπως και στην περίπτωση FDMA.

MAC: Σχόλια

- FDMA/TDMA υποβέλτιστες, εκτός εάν $P_i/W_i = c$ για όλους τους χρήστες i .
- CDMA υποβέλτιστη, εκτός εάν ο δέκτης χρησιμοποιεί SIC (onion peeling).
- $\sum_i R_i \leq C \left(\frac{\sum_i P_i}{N} \right)$. Επομένως, για κάθε επιπρόσθετο χρήστη που εμφανίζεται στο κανάλι η συνολική χωρητικότητα αυξάνει!
- Ωστόσο, λόγω της λογαριθμικής σχέσης μεταξύ P και C , η χωρητικότητα ανά χρήστη $\frac{1}{m} C \left(\frac{\sum_i P_i}{N} \right) \rightarrow 0$ για αριθμό χρηστών $m \rightarrow \infty$.

Διαχωρισμός πηγής-καναλιού

- 1 Το Γκαουσιανό MAC
 - Μοντέλο και περιοχή χωρητικότητας
 - Σύγκριση με CDMA, TDMA και FDMA
- 2 Διαχωρισμός πηγής-καναλιού
- 3 MAC με ανάδραση
- 4 Το Κανάλι Ευρυεκπομπής (Broadcast Channel - BC)
 - Εισαγωγή και Ορισμοί
 - Περιοχή Χωρητικότητας
- 5 Υποβαθμισμένο (degraded) και Γκαουσιανό BC
 - Ορισμός και περιοχή χωρητικότητας
 - Κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση
 - Το Γκαουσιανό BC

Εισαγωγή

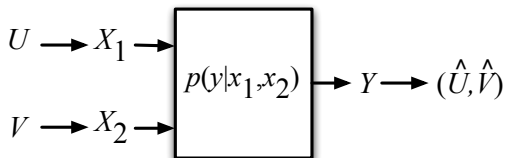
- Θα ολοκληρώσουμε την αναφορά στο MAC με τη εξέταση των διαφορών του από το κανάλι ενός πομπού και ενός δέκτη όσον αφορά
 - το διαχωρισμό πηγής-καναλιού και
 - την ανάδραση
- Θα δούμε ότι υπάρχουν διαφορές.

Διαχωρισμός πηγής-καναλιού

- Είδαμε ότι το θεώρημα διαχωρισμού καναλιού-πηγής για κανάλια ενός χρήστη μας επιτρέπει να διαχωρίσουμε τη συμπίεση πηγής από τη συμπίεση καναλιού χωρίς να υπάρχει απώλεια στον επιτεύξιμο ρυθμό μετάδοσης πληροφορίας.
- Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι αν η τομή της περιοχής χωρητικότητας του MAC με την περιοχή Slepian-Wolf δεν είναι το κενό σύνολο, είναι εφικτή η μετάδοση πληροφορίας από συσχετισμένες πηγές σε ένα δέκτη μέσω του MAC που παρεμβάλλεται ανάμεσά τους.
- Παρατηρήστε ότι, στη γενική περίπτωση, οι πηγές είναι συσχετισμένες και όχι ανεξάρτητες (όπως υποθέσαμε για τον υπολογισμό της περιοχής χωρητικότητας του MAC).

Διαχωρισμός πηγής-καναλιού (2)

- Το μοντέλο του προβλήματος φαίνεται στο σχήμα.
- Σε αντίθεση με το βασικό μοντέλο κατανεμημένης κωδικοποίησης, στη γενική περίπτωση, ο δέκτης δεν έχει απευθείας πρόσβαση στα X_1 και X_2 .

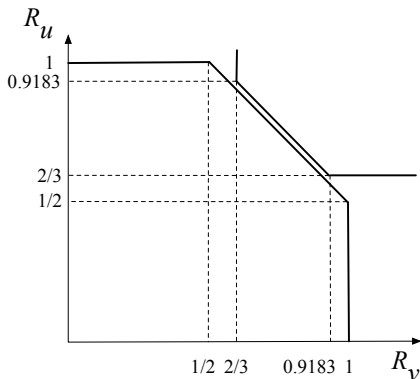


Παράδειγμα 13.1 (Cover & Thomas Example 15.4.2)

- Έστω δυαδικές πηγές U και V με από κοινού κατανομή $p(u, v) = 0$ για $u = 0, v = 1$ και $p(u, v) = 1/3$ για όλους τους άλλους συνδυασμούς u και v .
- Από το θεώρημα Slepian-Wolf γνωρίζουμε ότι, προκειμένου να μπορέσουμε να αποσυμπιέσουμε στο δέκτη με αυθαίρετα μικρή πιθανότητα σφάλματος πρέπει $R_u > H(U|V) = 2/3$ bits, $R_v > H(V|U) = 2/3$ bits και $R_u + R_v > H(U, V) = \log_2 3$ bits.
- Έστω ότι η μετάδοση γίνεται στο δυαδικό MAC διαγραφής του Παραδείγματος 12.3.

Παράδειγμα 13.1 (2)

- Η περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών συμπίεσης και η περιοχή χωρητικότητας του δυαδικού MAC διαγραφεί στο Σχήμα.
- Παρατηρούμε ότι οι περιοχές δεν τέμνονται.



Παράδειγμα 13.1 (3)

- Ωστόσο, στο συγκεκριμένο παράδειγμα μπορούμε να μεταδώσουμε την πληροφορία των U και V με μηδενική πιθανότητα σφάλματος, μεταδίδοντας απλώς την τιμή τους.
- Αν $Y = 0$, $U = V = 0$. Αν $Y = 1$, $U = 1$ και $V = 0$. Αν $Y = 2$, $U = V = 1$.
- Επομένως, το θεώρημα διαχωρισμού πηγής-καναλιού δεν ισχύει πάντοτε σε κανάλια πολλών χρηστών!
- Δηλαδή, το να προσπαθούμε να σχηματίζουμε ανεξάρτητη πληροφορία από κάθε πομπό (όπως επιχειρεί η κωδικοποίηση Slepian-Wolf) και μετά να τη μεταδίδουμε, δεν είναι πάντοτε βέλτιστο.

Παράδειγμα 13.1 (4)

- Γιατί δεν ισχύει το θεώρημα διαχωρισμού πηγής-καναλιού στο MAC;
- Στο MAC υποθέτουμε ότι οι πομποί δε συνεργάζονται μεταξύ τους. Εάν επιτρέπεται συνεργασία, δηλαδή επιτρέπεται να ισχύει $p(x_1, x_2) \neq p(x_1)p(x_2)$, η περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης είναι υπερσύνολο της περιοχής χωρητικότητας του MAC.
- Επομένως, ενδέχεται ο τρόπος με τον οποίο είναι εξαρτημένες οι δύο πηγές να επιτυγχάνει μεγαλύτερη περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης. Σε αυτήν την περίπτωση είναι προτιμότερο να διατηρήσουμε αυτήν την εξάρτηση αντί να δημιουργήσουμε ανεξάρτητες τ.μ. στους πομπούς (όπως κάνει η κωδικοποίηση Slepian-Wolf).
- Για περισσότερες λεπτομέρειες στο θέμα αυτό δείτε El Gamal & Kim.

MAC με ανάδραση

- 1 Το Γκαουσιανό MAC
 - Μοντέλο και περιοχή χωρητικότητας
 - Σύγκριση με CDMA, TDMA και FDMA
- 2 Διαχωρισμός πηγής-καναλιού
- 3 **MAC με ανάδραση**
- 4 Το Κανάλι Ευρυεκπομπής (Broadcast Channel - BC)
 - Εισαγωγή και Ορισμοί
 - Περιοχή Χωρητικότητας
- 5 Υποβαθμισμένο (degraded) και Γκαουσιανό BC
 - Ορισμός και περιοχή χωρητικότητας
 - Κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση
 - Το Γκαουσιανό BC

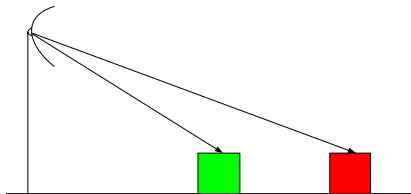
Χρήση ανάδρασης στο MAC

- Είδαμε ότι η χρήση ανάδρασης δεν αυξάνει τη χωρητικότητα καναλιών ενός χρήστη χωρίς μνήμη (αν και, σε κάποιες περιπτώσεις, ενδέχεται να μειώνει την πολυπλοκότητα που απαιτείται για τη μετάδοση).
- Αντίθετα, υπάρχουν περιπτώσεις MACs όπου η χρήση ανάδρασης αυξάνει τη χωρητικότητα ακόμη και όταν το κανάλι δεν έχει μνήμη.
- Δείτε, για παράδειγμα, Cover & Thomas σελ. 593–594.
- Διαισθητικά, η παροχή πληροφορίας από το δέκτη στον πομπό του παρέχει και έμμεσα πληροφορία για άλλους πομπούς, με αποτέλεσμα να είναι δυνατή η μετάδοση εξαρτημένων συμβόλων (μεταξύ πομπών).

Το Κανάλι Ευρυεκπομπής (Broadcast Channel - BC)

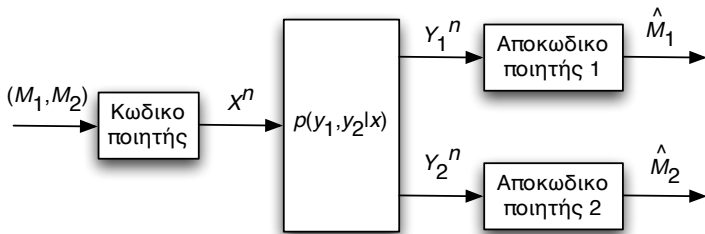
- 1 Το Γκαουσιανό MAC
 - Μοντέλο και περιοχή χωρητικότητας
 - Σύγκριση με CDMA, TDMA και FDMA
- 2 Διαχωρισμός πηγής-καναλιού
- 3 MAC με ανάδραση
- 4 Το Κανάλι Ευρυεκπομπής (Broadcast Channel - BC)
 - Εισαγωγή και Ορισμοί
 - Περιοχή Χωρητικότητας
- 5 Υποβαθμισμένο (degraded) και Γκαουσιανό BC
 - Ορισμός και περιοχή χωρητικότητας
 - Κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση
 - Το Γκαουσιανό BC

Κανάλι Ευρυεκπομής (Broadcast Channel - BC)



- Ένας κεντρικός σταθμός που στέλνει διαφορετική πληροφορία (στη γενική περίπτωση) σε πολλούς χρήστες. Παράδειγμα: Σταθμός βάσης προς κινητά τερματικά (downlink).
- Η περιοχή χωρητικότητας του BC δεν έχει βρεθεί για τη γενική περίπτωση. Ωστόσο, έχει βρεθεί η περιοχή χωρητικότητας για την περίπτωση του υποβαθμισμένου (degraded) BC.

Broadcast Channel - BC – Ορισμοί



- **Ορισμός 13.1** Το κανάλι ευρυεκπομπής (2 χρηστών) αποτελείται από ένα αλφάβητο εισόδου, \mathcal{X} , 2 αλφάβητα εξόδου \mathcal{Y}_1 και \mathcal{Y}_2 και ένα πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $p(y_1, y_2 | x)$.

BC – Ορισμοί (2)

- Το BC δεν έχει μνήμη όταν $p(y_1^n, y_2^n | x^n, m) = \prod_{i=1}^n p(y_{1i}, y_{2i} | x_i)$.
- Ένας κώδικας $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ για το BC με ανεξάρτητη πληροφορία ανά χρήση αποτελείται από έναν κωδικοποιητή (encoder) $X : (\{1, 2, \dots, 2^{nR_1}\} \times \{1, 2, \dots, 2^{nR_2}\}) \rightarrow \mathcal{X}^n$ και 2 αποκωδικοποιητές (decoders) $g_1 : \mathcal{Y}_1^n \rightarrow \{1, 2, \dots, 2^{nR_1}\}$ και $g_2 : \mathcal{Y}_2^n \rightarrow \{1, 2, \dots, 2^{nR_2}\}$.
- Μέση πιθανότητα σφάλματος: $P_e^{(n)} = \Pr\{g_1(Y_1^n) \neq M_1 \text{ ή } g_2(Y_2^n) \neq M_2\}$, όπου τα (M_1, M_2) θεωρούνται ομοιόμορφα κατανομημένα στο σύνολο $2^{nR_1} \times 2^{nR_2}$.
- **Ορισμός 13.2** Ένα ζεύγος ρυθμών μετάδοσης (R_1, R_2) είναι επιτεύξιμο για το BC όταν υπάρχει ακολουθία κωδίκων $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ με $P_e^{(n)} \rightarrow 0$.

BC – Ορισμοί (3)

- Εάν μέρος της πληροφορίας που στέλνει ο πομπός είναι κοινή και για τους δύο δέκτες, οι ορισμοί τροποποιούνται ως εξής:

- Ένας κώδικας $((2^{nR_0}, 2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ για το BC αποτελείται από έναν κωδικοποιητή (encoder)

$$X : (\{1, 2, \dots, 2^{nR_0}\} \times \{1, 2, \dots, 2^{nR_1}\} \times \{1, 2, \dots, 2^{nR_2}\}) \rightarrow \mathcal{X}^n$$

και 2 αποκωδικοποιητές (decoders)

$$g_1 : \mathcal{Y}_1^n \rightarrow \{1, 2, \dots, 2^{nR_0}\} \times \{1, 2, \dots, 2^{nR_1}\} \text{ και}$$

$$g_2 : \mathcal{Y}_2^n \rightarrow \{1, 2, \dots, 2^{nR_0}\} \times \{1, 2, \dots, 2^{nR_2}\}.$$

- Μέση πιθανότητα σφάλματος:

$P_e^{(n)} = \Pr\{g_1(Y_1^n) \neq (M_0, M_1) \text{ ή } g_2(Y_2^n) \neq (M_0, M_2)\}$, όπου τα (M_0, M_1, M_2) θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένα στο σύνολο $2^{nR_0} \times 2^{nR_1} \times 2^{nR_2}$.

- **Ορισμός 13.3** Μια τριάδα ρυθμών μετάδοσης (R_0, R_1, R_2) είναι εφικτή για το BC όταν υπάρχει ακολουθία κωδίκων $((2^{nR_0}, 2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ με $P_e^{(n)} \rightarrow 0$.

BC – Περιοχή Χωρητικότητα

- **Ορισμός 13.4** Η περιοχή χωρητικότητας (capacity region) του BC είναι το κλειστό σύνολο (closure) του συνόλου όλων των επιφύλιων ρυθμών μετάδοσης.
- **Θεώρημα 13.5** (Cover & Thomas 15.6.1): Η περιοχή χωρητικότητας του BC εξαρτάται μόνο από τις υπό συνθήκη περιθώριες κατανομές $p(y_1|x)$ και $p(y_2|x)$.
 - Για την απόδειξη δείτε π.χ. El Gamal & Kim.
- Όπως προαναφέρθηκε, η περιοχή χωρητικότητας του BC δεν είναι γνωστή, στη γενική περίπτωση.

Κάτω φράγμα περιοχής χωρητικότητας

- Αποδεικνύεται ότι (δείτε π.χ. El Gamal & Kim) ότι η παρακάτω περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης είναι υποσύνολο της περιοχής χωρητικότητας.

Κάτω φράγμα χωρητικότητας BC (Κωδικοποίηση με υπέρθεση)

$$R_1 < I(X; Y_1 | U),$$

$$R_2 < I(U; Y_2),$$

$$R_1 + R_2 < I(X; Y_1)$$

για κάποια $p(u, x)$.

- Αποδεικνύεται ότι η περιοχή είναι κυρτή.

Κάτω φράγμα περιοχής χωρητικότητας – Κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση

- Για δεδομένη $p(u, x) = p(u)p(x|u)$, δημιουργούμε 2^{nR_2} “κέντρα συννέφων”, $u^n(m_2)$, με χρήση της $p(u)$.
- Για κάθε κέντρο σύννεφου, $u^n(m_2)$, δημιουργούμε 2^{nR_1} υπό συνθήκη ανεξάρτητες “δορυφορικές” κωδικές λέξεις $x^n(m_1, m_2)$ με χρήση της $p(x|u)$.
- Ο κωδικοποιητής στέλνει στη κανάλι την κωδική λέξη $x^n(m_1, m_2)$.
- Ο αποκωδικοποιητής 2 αποκωδικοποιεί το κέντρο του σύννεφου, $u^n(m_2)$.
- Ο αποκωδικοποιητής 1 αποκωδικοποιεί τη δορυφορική λέξη $x^n(m_1, m_2)$.

Κάτω φράγμα περιοχής χωρητικότητας (2)

- Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο με αντιστροφή των χρηστών. Δηλαδή,

Κάτω φράγμα χωρητικότητας BC (Κωδικοποίηση με υπέρθεση)

$$R_1 < I(U; Y_1),$$

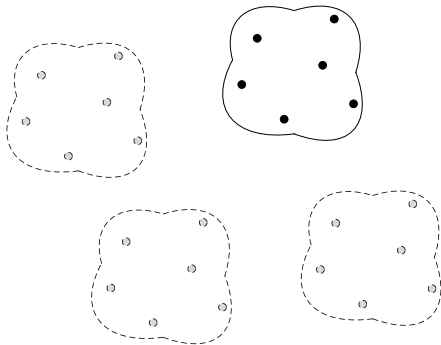
$$R_2 < I(X; Y_2|U),$$

$$R_1 + R_2 < I(X; Y_2)$$

για κάποια $p(u, x)$.

- Το κυρτό κύτος (convex hull) της ένωσης των δύο αυτών κάτω φραγμάτων αποτελεί *κάτω φράγμα* της περιοχής χωρητικότητας του BC.

Κωδικοποίηση Υπέρθεσης – Superposition Coding



- Ο ένας δέκτης εκτιμά μόνο ποιο από τα “σύννεφα” έχει σταλεί.
- Ο άλλος δέκτης εκτιμά το σύννεφο και την κωδική λέξη μέσα στο σύννεφο.

Υποβαθμισμένο (degraded) BC

- 1 Το Γκαουσιανό MAC
 - Μοντέλο και περιοχή χωρητικότητας
 - Σύγκριση με CDMA, TDMA και FDMA
- 2 Διαχωρισμός πηγής-καναλιού
- 3 MAC με ανάδραση
- 4 Το Κανάλι Ευρυεκπομπής (Broadcast Channel - BC)
 - Εισαγωγή και Ορισμοί
 - Περιοχή Χωρητικότητας
- 5 Υποβαθμισμένο (degraded) και Γκαουσιανό BC
 - Ορισμός και περιοχή χωρητικότητας
 - Κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση
 - Το Γκαουσιανό BC

Υποβαθμισμένο (degraded) BC

- **Ορισμός 13.6** Ένα BC είναι φυσικώς υποβαθμισμένο (physically degraded) εάν $p(y_1, y_2|x) = p(y_1|x)p(y_2|y_1)$.
- Δηλαδή, αν $X \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_2$.

Υποβαθμισμένο (degraded) BC (2)

- **Ορισμός 13.7** Ένα BC είναι *στοχαστικώς υποβαθμισμένο* (stochastically degraded) εάν οι υπό συνθήκη περιθώριες κατανομές είναι οι ίδιες με αυτές ενός φυσικώς υποβαθμισμένου BC. Δηλαδή, εάν υπάρχει κατανομή $p'(y_2|y_1)$ τέτοια ώστε

$$p(y_2|x) = \sum_{y_1} p(y_1|x)p'(y_2|y_1).$$

- Δηλαδή, αν υπάρχει τ.μ. \tilde{Y}_1 με την ίδια κατανομή με την Y_1 δεδομένης της X και $X \rightarrow \tilde{Y}_1 \rightarrow Y_2$.
- Δεδομένου ότι, σύμφωνα με το Θεώρημα 15.6.1, η περιοχή χωρητικότητας του BC εξαρτάται μόνο από τις υπό συνθήκη περιθώριες κατανομές, η περιοχή χωρητικότητας του φυσικώς υποβαθμισμένου BC ταυτίζεται με αυτήν του στοχαστικώς υποβαθμισμένου BC.

Περιοχή Χωρητικότητας degraded BC


- **Θεώρημα 13.8** (Cover & Thomas 15.6.2): Η περιοχή χωρητικότητας για την αποστολή ανεξάρτητης πληροφορίας στο υποβαθμισμένο BC (private message-only capacity region) είναι το κυρτό κύτος (convex hull) του κλειστού συνόλου (closure) όλων των (R_1, R_2) που ικανοποιούν τις σχέσεις

Περιοχή εφικτών ρυθμών μετάδοσης υποβαθμισμένου BC

$$R_2 \leq I(U; Y_2),$$

$$R_1 \leq I(X; Y_1 | U),$$

για κάποια από κοινού κατανομή $p(u)p(x|u)p(y_1, y_2|x)$, όπου για τον αριθμό στοιχείων (cardinality) του συνόλου της βοηθητικής τ.μ. U ισχύει $|\mathcal{U}| \leq \min\{|\mathcal{X}|, |\mathcal{Y}_1|, |\mathcal{Y}_2|\}$.

- Αποδεικνύεται ότι η σχέση $R_1 + R_2 < I(X; Y_1)$ ικανοποιείται στο degraded BC όταν ικανοποιούνται οι άλλες δύο. 

Κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση στο degraded BC

Η βασική ιδέα:

- Ο δέκτης 1 γνωρίζει όλη την πληροφορία που γνωρίζει ο δέκτης 2. Αντίθετα, ο δέκτης 2 γνωρίζει λιγότερη πληροφορία από το δέκτη 1.
- Επομένως, ο δέκτης 1 μπορεί να αποκωδικοποιήσει την πληροφορία που προορίζεται για το δέκτη 2.
- Κωδικοποιούμε το μήνυμα M_2 που προορίζεται για το δέκτη 2 με χρήση της τ.μ. U (2^{nR_2} πιθανές κωδικές λέξεις).
- Ανάλογα με την τιμή της U , από τη σκοπιά του χρήστη 1 βλέπουμε ένα από 2^{nR_2} πιθανά κανάλια. Ανάλογα με το κανάλι και το μήνυμα M_1 επιλέγουμε την τιμή της τ.μ. $X(M_1, M_2)$ (2^{nR_1} πιθανές κωδικές λέξεις για δεδομένη $U(M_2)$, $2^{n(R_1+R_2)}$ συνολικά) → κωδικοποίηση υπέρθεσης (superposition coding).

Κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση στο degraded BC (2)

- Ο (υποβαθμισμένος) δέκτης 2 μπορεί να αποκωδικοποιήσει το M_2 , αλλά όχι το M_1 . Δεδομένης της ληφθείσας ακολουθίας y_2^n , αποκωδικοποιεί στο μήνυμα \hat{m}_2 αν υπάρχει μοναδικό από κοινού τυπικό ζεύγος $(u^n(\hat{m}_2), y_2^n)$.
- Δεδομένης της ληφθείσας ακολουθίας y_1^n , ο (καλύτερος) δέκτης 1 αποκωδικοποιεί στο μήνυμα \hat{m}_1 αν είναι το μοναδικό \hat{m}_1 για το οποίο η τριάδα $(u^n(m_2), x^n(\hat{m}_1, m_2), y_1^n)$ είναι από κοινού τυπική για κάποια τιμή του m_2 .
- Η τιμή του m_2 δεν ενδιαφέρει το δέκτη 1, δεδομένου ότι δεν επηρεάζει την πιθανότητα σφάλματος της εκτίμησης του m_1 .

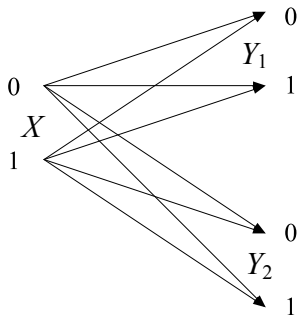
Κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση στο degraded BC (3)

- Αποδεικνύεται ότι, ακόμα και αν επιθυμούμε αποκωδικοποίηση του m_2 στο δέκτη 1, η περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης παραμένει η ίδια (δείτε π.χ. El Gamal & Kim).
- Επομένως, ένας τρόπος αποκωδικοποίησης στο δέκτη 1 είναι να εκτιμηθεί πρώτα το m_2 και στη συνέχεια το m_1 .
- Αυτό οδηγεί σε απλοποίηση του δέκτη, επειδή μπορούν να χρησιμοποιηθούν δέκτες για κανάλια ενός χρήστη (θα δούμε ένα παράδειγμα στο Γκαουσιανό BC).
- Διαφορά με το MAC: όταν εφαρμόζεται διαδοχική αποκωδικοποίηση στο BC, ξεκινά πάντοτε από την πληροφορία του χειρότερου χρήστη. Επίσης, ο αριθμός των αποκωδικοποιήσεων διαφέρει σε κάθε δέκτη.

Degraded BC: Μετάδοση κοινής πληροφορίας

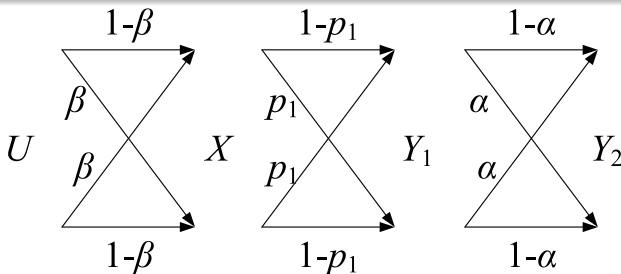
- **Θεώρημα 13.9** (Cover & Thomas 15.6.4): Εάν το ζεύγος ρυθμών μετάδοσης (R_1, R_2) είναι εφικτό σε degraded BC όπου αποστέλλεται ανεξάρτητη πληροφορία, τότε η τριάδα $(R_0, R_1, R_2 - R_0)$ είναι εφικτή όταν στέλνονται R_0 bits κοινής πληροφορίας, εφόσον $R_0 < R_2$.

Παράδειγμα 13.2 (Cover & Thomas 15.6.5)



- Το κανάλι μπορεί να εκφραστεί ως degraded BC. Έστω, χωρίς απώλεια γενικότητας, ότι $p_1 < p_2 < 0.5$. Μπορούμε να εκφράσουμε το κανάλι ως διαδοχή δύο BSC, όπως φαίνεται στην επόμενη διαφάνεια.

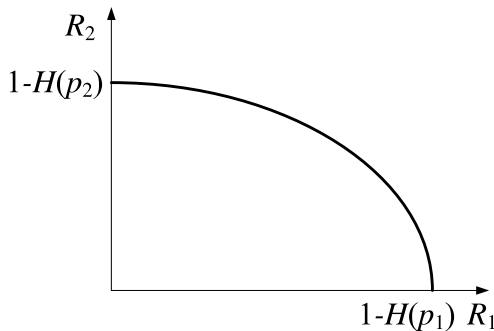
Παράδειγμα 13.2 (Cover & Thomas 15.6.5) (2)



- Πρέπει να ισχύει $p_1(1 - \alpha) + (1 - p_1)\alpha = p_2 \Rightarrow \alpha = \frac{p_2 - p_1}{1 - 2p_1}$.
- Από το Θεώρημα 15.6.2, $|\mathcal{U}| \leq 2$. Επομένως, επιλέγουμε δυαδική U . $\Pr\{X = U\} = 1 - \beta$.
- $I(U; Y_2) = H(Y_2) - H(Y_2|U)$. Η εντροπία της Y_2 μεγιστοποιείται με χρήση ομοιόμορφης U . Επομένως, $I(U; Y_2) = 1 - H(\beta * p_2)$, με $\beta * p_2 = \beta(1 - p_2) + (1 - \beta)p_2$.

Παράδειγμα 13.2 (Cover & Thomas 15.6.5) (3)

- Ομοίως, $I(X; Y_1|U) = H(Y_1|U) - H(Y_1|X, U) = H(Y_1|U) - H(Y_1|X) = H(\beta * p_1) - H(p_1)$.
- Μεταβάλλοντας την τιμή της β μπορούμε να σχεδιάσουμε την περιοχή χωρητικότητας.



Το Γκαουσιανό BC

- 1 Το Γκαουσιανό MAC
 - Μοντέλο και περιοχή χωρητικότητας
 - Σύγκριση με CDMA, TDMA και FDMA
- 2 Διαχωρισμός πηγής-καναλιού
- 3 MAC με ανάδραση
- 4 Το Κανάλι Ευρυεκπομπής (Broadcast Channel - BC)
 - Εισαγωγή και Ορισμοί
 - Περιοχή Χωρητικότητας
- 5 Υποβαθμισμένο (degraded) και Γκαουσιανό BC
 - Ορισμός και περιοχή χωρητικότητας
 - Κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση
 - Το Γκαουσιανό BC

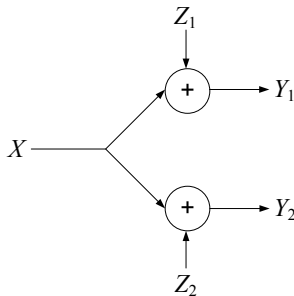
Γκαουσιανό BC

- Θεωρούμε το κανάλι 2 χρηστών

$$Y_1 = X + Z_1,$$

$$Y_2 = X + Z_2,$$

όπου $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, N_1)$ και $Z_2 \sim \mathcal{N}(0, N_2)$, $N_2 \geq N_1$. Οι Z_i είναι ανεξάρτητες από τις X_i .



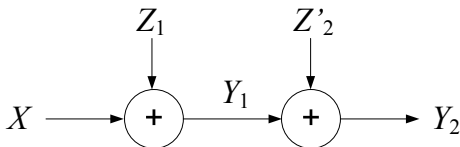
Γκαουσιανό BC (2)

- Μπορεί να αποδειχτεί ότι το Γκαουσιανό BC είναι ισοδύναμο με το degraded BC

$$Y_1 = X + Z_1,$$

$$Y_2 = Y_1 + Z'_2,$$

με $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, N_1)$ και $Z'_2 \sim \mathcal{N}(0, N_2 - N_1)$.



- Η περιοχή χωρητικότητας παραμένει η ίδια ακόμα και αν οι Z_1 και Z_2 είναι συσχετισμένες (γιατί;)

Περιοχή Χωρητικότητας Γκαουσιανού BC

- Για το Γκαουσιανό Κανάλι 2 χρηστών, οι ανισότητες που ορίζουν την περιοχή χωρητικότητας παίρνουν τη μορφή

Περιοχή χωρητικότητας Γκαουσιανού BC

$$R_1 < C \left(\frac{\alpha P}{N_1} \right) \text{ και}$$
$$R_2 < C \left(\frac{(1 - \alpha)P}{\alpha P + N_2} \right),$$

με $0 \leq \alpha \leq 1$.

- Αποδεικνύεται (δείτε π.χ. El Gamal & Kim) ότι η χρήση γκαουσιανών βιβλίων κωδίκων από όλους τους χρήστες αρκεί για να επιτευχθεί οποιοδήποτε σημείο της περιοχής χωρητικότητας.

Κωδικοποίηση και Αποκωδικοποίηση στο Γκαουσιανό BC

Κωδικοποίηση:

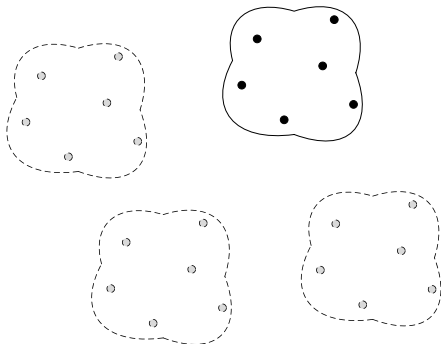
- Ο πομπός δημιουργεί 2 βιβλία κωδικών: Ένα με ισχύ αP και ρυθμό μετάδοσης R_1 και ένα με ισχύ $(1 - \alpha)P$ και ρυθμό R_2 (το ζεύγος (R_1, R_2) πρέπει να βρίσκεται μέσα στην περιοχή χωρητικότητας).
- Στην ειδική περίπτωση του Γκαουσιανού BC, οι κωδικές λέξεις για κάθε χρήστη δημιουργούνται *ανεξάρτητα*.
- Πλεονέκτημα Γκαουσιανού BC: Όπως και στο MAC, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε καλούς κώδικες που έχουν σχεδιαστεί για το κανάλι AWGN.
- Αν m_1 και m_2 είναι τα μηνύματα που στέλνονται στο χρήστη 1 και 2, αντίστοιχα, ο πομπός στέλνει στο κανάλι το άθροισμα των κωδικών λέξεων $x_1^n(m_1) + x_2^n(m_2)$.

Κωδικοποίηση και Αποκωδικοποίηση στο Γκαουσιανό BC (2)

Αποκωδικοποίηση:

- Ο (χειρότερος) δέκτης 2 βρίσκει την κωδική λέξη $\hat{x}_2^n(m_2)$ η οποία βρίσκεται πιο κοντά στο ληφθέν σήμα y_2^n (ή αποκωδικοποιεί με χρήση από κοινού τυπικότητας). Το μήνυμα του δέκτη 1 αποτελεί θόρυβο για το δέκτη 2.
- Ο (καλύτερος) δέκτης 1 αρχίζει βρίσκοντας την κωδική λέξη $\hat{x}_2^n(m_2)$ η οποία βρίσκεται πιο κοντά στο ληφθέν σήμα y_1^n . Μπορεί να ανιχνεύσει τη $\hat{x}_2^n(m_2)$ γιατί ο θόρυβος είναι μικρότερος από το δέκτη 2. Στη συνέχεια, αφαιρεί τη $\hat{x}_2^n(m_2)$ από το ληφθέν σήμα y_1^n και βρίσκει την κωδική λέξη $\hat{x}_1^n(m_1)$ η οποία βρίσκεται πιο κοντά στο σήμα $y_1^n - \hat{x}_2^n(m_2)$ (ή αποκωδικοποιεί με χρήση από κοινού τυπικότητας).
- Στο Γκαουσιανό BC (και, γενικά, στο degraded BC) κάθε δέκτης μπορεί, αν το επιθυμεί, να βρει την πληροφορία που προορίζεται για τους δέκτες που είναι χειρότεροι από αυτόν.

Superposition Coding για το Γκαουσιανό BC

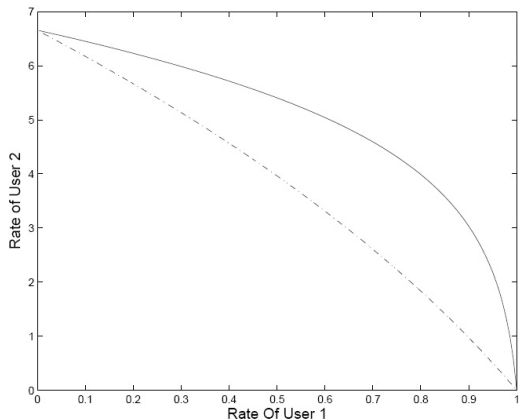


- Ο κακός δέκτης εκτιμά μόνο ποιο από τα “σύννεφα” έχει σταλεί.
- Ο καλός δέκτης εκτιμά το σύννεφο και, στη συνέχεια, την κωδική λέξη μέσα στο σύννεφο.

FDMA/TDMA downlink

- Ποια είναι η απόδοση ορθογώνιων τρόπων πολύπλεξης στο Γκαουσιανό BC;
- Αποδεικνύεται ότι η μετάδοση με FDMA/TDMA είναι υποβέλτιστη, εκτός από 2 περιπτώσεις:
 1. Τα ακραία σημεία της περιοχής χωρητικότητας όπου μεταδίδεται πληροφορία μόνο σε ένα χρήστη
 2. Στην περίπτωση που ο θόρυβος είναι ο ίδιος και στους 2 δέκτες.
- Η διαφορά στην απόδοση μεγαλώνει όσο μεγαλώνει και η διαφορά μεταξύ των ισχύων θορύβου των χρηστών.

FDMA/TDMA downlink (2)



D. Tse & P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communication*

Ανακεφαλαίωση MAC και BC

- Multiple Access Channel: Η περιοχή χωρητικότητας είναι κυρτή και, στη γενική περίπτωση, μια ένωση πενταγώνων.
 - Μετάδοση επάνω στο όριο της περιοχής χωρητικότητας επιτυγχάνεται με ταυτόχρονη μετάδοση των χρηστών.
 - Στο δέκτη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαδοχική αποκωδικοποίηση: οι χρήστες αποκωδικοποιούνται σειριακά και το αποκωδικοποιημένο σήμα αφαιρείται (onion peeling). Η σειρά αποκωδικοποίησης εξαρτάται από το σημείο της περιοχής χωρητικότητας στο οποίο γίνεται η μετάδοση.

Ανακεφαλαίωση MAC και BC (2)

- *Degraded Broadcast Channel*: Η περιοχή χωρητικότητας είναι κυρτή.
 - Μετάδοση επάνω στο όριο της περιοχής χωρητικότητας επιτυγχάνεται με κωδικοποίηση υπέρθεσης (superposition coding).
 - Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαδοχική αποκωδικοποίηση σε κάθε δέκτη. Ο κάθε δέκτης αποκωδικοποιεί την πληροφορία που προορίζεται για όλους τους χειρότερους δέκτες και εφαρμόζει ονιον peeling πριν αποκωδικοποιήσει τη δική του πληροφορία.
- Τόσο στο Γκαουσιανό MAC όσο και στο Γκαουσιανό BC, μετάδοση με ορθογώνια πολυπλεξία (FDMA/TDMA) είναι, στη γενική περίπτωση, υποβέλπιστα.