# ΕΕ728
# Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
# 9η διάλεξη
# (2η έκδοση, 22/4/2013)

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

16 Απριλίου 2013

# Περιεχόμενα 9ης διάλεξης

# Θεώρημα Διαχωρισμού Πηγής - Καναλιού
## Απόδειξη αντιστρόφου

- Θα δείξουμε ότι, για οποιαδήποτε μέθοδο κωδικοποίησης (ακόμα και τυχαία) $X^n(V^n) : \mathcal{V}^n \to \mathcal{X}^n$ και αποκωδικοποίησης $g(Y^n) : \mathcal{Y}^n \to \mathcal{V}^n$, εάν $\Pr\{\hat{V}^n \neq V^n\} \to 0$, τότε $H(\mathcal{V}) \leq C$.
- Από την ανισότητα Fano,

$$H\left(V^n|\hat{V}^n\right) \leq 1+\Pr\left\{\hat{V}^n \neq V^n\right\}\log|\mathcal{V}^n| = 1+n\Pr\left\{\hat{V}^n \neq V^n\right\}\log|\mathcal{V}|.$$

- Θα υπολογίσουμε άνω φράγμα για την $H(\mathcal{V})$

$$H(\mathcal{V}) \overset{(a)}{\leq} \frac{H(V_1, V_2, \ldots, V_n)}{n} = \frac{H(V^n)}{n} = \frac{1}{n}H(V^n|\hat{V}^n) + \frac{1}{n}I(V^n;\hat{V}^n)$$
$$\overset{(b)}{\leq} \frac{1}{n}\left(1 + n\Pr\left\{\hat{V}^n \neq V^n\right\}\log|\mathcal{V}|\right) + \frac{1}{n}I(V^n;\hat{V}^n)$$

$(a)$ Ρυθμός εντροπίας για στάσιμες στοχαστικές διαδικασίες, $(b)$ Ανισότητα Fano

# Θεώρημα Διαχωρισμού Πηγής - Καναλιού
# Απόδειξη αντιστρόφου (συνέχεια)

$$\begin{aligned} H(\mathcal{V}) &\leq \frac{1}{n}\left(1 + n\Pr\left\{\hat{V}^n \neq V^n\right\}\log|\mathcal{V}|\right) + \frac{1}{n}I(V^n;\hat{V}^n) \\ &\overset{(a)}{\leq} \frac{1}{n}\left(1 + n\Pr\left\{\hat{V}^n \neq V^n\right\}\log|\mathcal{V}|\right) + \frac{1}{n}I(X^n;Y^n) \\ &\overset{(b)}{\leq} \frac{1}{n} + \Pr\left\{\hat{V}^n \neq V^n\right\}\log|\mathcal{V}| + C. \end{aligned}$$

$(a)$ Ανισότητα Επεξεργασίας Δεδομένων, $(b)$ το κανάλι δεν έχει μνήμη.

- Για $n \to \infty$, $\Pr\left\{\hat{V}^n \neq V^n\right\} \to 0$ και, επομένως,

$$H(\mathcal{V}) \leq C.$$

# Συνεχείς τ.μ. και Διαφορική Εντροπία

# Διαφορική Εντροπία – Εισαγωγή

- Έως τώρα θεωρούσαμε διακριτές τ.μ. με τιμές με πεπερασμένο και διακριτό αλφάβητο.
- Τα αποτελέσματα της Θεωρίας Πληροφορίας εφαρμόζονται και για συνεχείς τ.μ., με κατάλληλες τροποποιήσεις και με χρήση της διαφορικής εντροπίας (differential entropy).
- Γενικά, όσα ισχύουν για διακριτές τ.μ. ισχύουν (με κατάλληλες τροποποιήσεις) και για συνεχείς τ.μ. Ωστόσο, η διαφορική εντροπία είναι πιο "προβληματικό" μέγεθος σε σχέση με την εντροπία και υπάρχουν κάποιες διαφορές που θα πρέπει να προσεχτούν.
- Θα αναφερθούμε στις συνεχείς τ.μ. πιο επιγραμματικά, φροντίζοντας, όμως, να επισημαίνουμε τις διαφορές, όπου υπάρχουν.

# Διαφορική Εντροπία – Ορισμός

- Ορισμός 9.1. Η Διαφορική Εντροπία $h(X)$ συνεχούς τ.μ $X$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$, εάν η $f$ υπάρχει, ορίζεται ως

$$h(X) = -\int_S f(x)\log f(x)dx,$$

όπου $S$ είναι το πεδίο ορισμού της τ.μ.

- Υποθέτουμε ότι η $f(x)\log f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.

# Παράδειγμα 9.1. – Δεν ισχύει, κατ' ανάγκη, $h(X) \geq 0$!

- Έστω συνεχής τ.μ. $X$, ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0, a]$.

$$h(X) = -\int_S f(x) \log f(x) dx = -\int_0^a \frac{1}{a} \log \frac{1}{a} dx = \log a.$$

- Για $a < 1$, $h(X) < 0$.
- Ωστόσο, η ποσότητα $2^{h(X)}$ είναι πάντοτε μη αρνητική.
- Η διαφορική εντροπία διακριτής τ.μ. ισούται με $-\infty$ ($2^{-\infty} = 0$).

# Παράδειγμα 9.2. – Εντροπία Γκαουσιανής τ.μ.

- Έστω συνεχής τ.μ. $X$ η οποία ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $\sigma^2$.

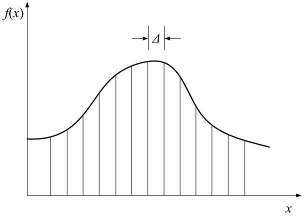
$$X \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

- Με χρήση του ορισμού της διαφορικής εντροπίας,

$$\begin{aligned}
h(X) &= -\int_S f(x) \ln f(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln f(x) dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left[ -\frac{x^2}{2\sigma^2} - \ln\left(\sqrt{2\pi\sigma}\right) \right] dx \\
&= \frac{\mathbb{E}X^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) = \frac{1}{2}\ln e + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(2\pi e\sigma^2\right) \text{ nats} = \frac{1}{2}\log\left(2\pi e\sigma^2\right) \text{ bits}
\end{aligned}$$

# Παράδειγμα 9.3. – Εντροπία διακριτής αναπαράστασης συνεχούς τ.μ.

- Έστω συνεχής τ.μ. $X$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$. Χωρίζουμε την $f(X)$ σε διαστήματα πλάτους $\Delta$, όπως φαίνεται στο Σχήμα.




- Για κάθε διάστημα πλάτους $\Delta$ υπάρχει $x_i$ τέτοιο ώστε $f(x_i)\Delta = \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} f(x)dx$.
- Θεωρούμε τη διακριτή αναπαράσταση, $X^\Delta$, της συνεχούς τ.μ. $X$:

$$X^\Delta = x_i, \quad \text{όταν } i\Delta \leq X < (i+1)\Delta.$$

# Παράδειγμα 9.3. – Εντροπία διακριτής αναπαράστασης συνεχούς τ.μ. (2)

- $p_i \triangleq \Pr\left\{X^{\Delta} = x_i\right\} = \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} f(x)dx = f(x_i)\Delta.$
- Επομένως, για την εντροπία της (διακριτής) $X^{\Delta}$ ισχύει

$$
\begin{aligned}
H(X^{\Delta}) &= -\sum_{-\infty}^{\infty} p_i \log p_i = -\sum_{-\infty}^{\infty} (f(x_i)\Delta) \log (f(x_i)\Delta) = \\
&= -\sum_{-\infty}^{\infty} f(x_i)\Delta \log f(x_i) - \sum_{-\infty}^{\infty} f(x_i)\Delta \log \Delta \\
&= -\sum_{-\infty}^{\infty} f(x_i)\Delta \log f(x_i) - \log \Delta.
\end{aligned}
$$

# Παράδειγμα 9.3. – Εντροπία διακριτής αναπαράστασης συνεχούς τ.μ. (3)

$$H\left(X^{\Delta}\right) = -\sum_{-\infty}^{\infty} f(x_i)\Delta \log f(x_i) - \log \Delta.$$

- Όταν $\Delta \to 0$, $H\left(X^{\Delta}\right) \to h(X) - \log \Delta$, εάν η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.
- Παρατηρούμε ότι η ποσότητα $\log \Delta$ είναι ανάλογη του αριθμού $n$ των bits που χρησιμοποιούνται για τη διακριτοποίηση (κβάντιση) της συνεχούς τ.μ. $X$. Επομένως, $H\left(X^{\Delta}\right) \approx h(X) + n$.
- Η ακριβής (μη κβαντισμένη) τιμή συνεχούς τ.μ. απαιτεί άπειρα bits για την περιγραφή της (διαισθητικά λογικό).

# Από κοινού και υπό συνθήκη Διαφορική Εντροπία

Οι ορισμοί είναι παρόμοιοι με αυτούς για διακριτές τ.μ.

- Ορισμός 9.2. Από κοινού διαφορική εντροπία: $h(X_1, X_2, \ldots, X_n) = -\int f(x^n) \log f(x^n) dx^n$ (εάν υπάρχει), όπου $f(x^n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- Ορισμός 9.3. Υπό συνθήκη διαφορική εντροπία: $h(X|Y) = -\int f(x, y) \log f(x|y) dxdy$ (εάν υπάρχει).

- Όπως και στην περίπτωση διακριτών τ.μ., εάν όλες οι ποσότητες είναι πεπερασμένες,

$$h(X|Y) = h(X, Y) - h(Y).$$

# Παράδειγμα 9.4. – Διαφορική Εντροπία πολυμεταβλητής Γκαουσιανής τ.μ.

- Έστω τ.μ. που ακολουθεί πολυμεταβλητή Γκαουσιανή κατανομή:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n |K|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T K^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})},$$

όπου $(\cdot)^T$ υποδηλώνει αναστροφή (διανύσματος ή πίνακα), $K$ είναι ο πίνακας συσχέτισης και $|K|$ η ορίζουσα του $K$.

- Αποδεικνύεται (με χρήση του ορισμού και πράξεις – Cover & Thomas Theorem 8.4.1) ότι

$$h(X_1, X_2, \ldots, X_n) = h\left(\mathcal{N}_n(\mathbf{m}, K)\right) = \frac{1}{2}\log(2\pi e)^n |K| \text{ bits.}$$

- Για πραγματική τ.μ. $X \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mathbf{m})^2}{2\sigma^2}}$, $h(X) = \frac{1}{2}\log\left(2\pi e\sigma^2\right)$ bits.

# Σχετική Εντροπία και Αμοιβαία Πληροφορία για συνεχείς τ.μ.

- **Ορισμός 9.4.** Σχετική Εντροπία (Απόσταση Kullback-Leibler): $D(f||g) = \int f \log \frac{f}{g}$. Πεπερασμένη μόνο εφόσον το πεδίο ορισμού της $f$ περιέχεται στο πεδίο ορισμού της $g$.
- **Ορισμός 9.5.** Εάν ορίζεται από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τις τ.μ. $X$ και $Y$, η Αμοιβαία Πληροφορία ορίζεται ως

$$I(X;Y) = D(f(x,y)||f(x)f(y)) = \int f(x,y) \log \frac{f(x,y)}{f(x)f(y)} dxdy.$$

- Όπως και για τις διακριτές τ.μ., $I(X;Y) = h(X) - h(X|Y) = h(Y) - h(Y|X) = h(X) + h(Y) - h(X,Y)$.

# Σχετική Εντροπία και Αμοιβαία Πληροφορία για συνεχείς τ.μ. (2)

- Εάν δεν ορίζεται $f(x, y)$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο πλέον γενικός ορισμός της Αμοιβαίας Πληροφορίας

$$I(X;Y) = \sup_{\text{όλες οι } \mathcal{P},\mathcal{Q}} I\left([X]_{\mathcal{P}}; [Y]_{\mathcal{Q}}\right),$$

όπου $\mathcal{P}$ και $\mathcal{Q}$ πεπερασμένες διαμερίσεις (partitions) των $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ και $[X]_{\mathcal{P}}$, $[Y]_{\mathcal{Q}}$ οι κβαντίσεις των $X$ και $Y$ ως προς τις διαμερίσεις $\mathcal{P}$ και $\mathcal{Q}$, αντίστοιχα (περισσότερες λεπτομέρειες στο βιβλίο των Cover & Thomas).

# Ιδιότητες Σχετικής Εντροπίας και Αμοιβαίας Πληροφορίας για συνεχείς τ.μ.

- $D(f||g) \geq 0$, με ισότητα όταν $f = g$ σχεδόν παντού.
  Απόδειξη: Εάν $S$ είναι το πεδίο ορισμού της $f$,
  $$-D(f||g) = \int_S f \log \frac{g}{f} \overset{(a)}{\leq} \log \int_S f \frac{g}{f} = \log \int_S g \overset{(b)}{\leq} \log 1 = 0.$$
  $(a)$ γιατί; $(b)$ $S$ υποσύνολο του πεδίου ορισμού της $g$.
- $I(X;Y) \geq 0$ με $=$ εάν και μόνο εάν $X$ και $Y$ ανεξάρτητες. Γιατί;

# Ιδιότητες Σχετικής Εντροπίας και Αμοιβαίας Πληροφορίας για συνεχείς τ.μ. (2)

- $h(X|Y) \leq h(X)$ με $=$ εάν και μόνο εάν $X$ και $Y$ ανεξάρτητες.
- Κανόνας αλυσίδας για τη Διαφορική Εντροπία: $h(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} h(X_i|X_1, X_2, \ldots, X_{i-1})$. Αποδεικνύεται εύκολα από τον ορισμό της Από Κοινού Διαφορικής Εντροπίας.
- $h(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \sum h(X_i)$, με $=$ εάν και μόνο εάν οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες.

# Άλλες Ιδιότητες Διαφορικής Εντροπίας

- $h(X+c) = h(X)$. Προκύπτει απευθείας από τον ορισμό.
    - Η διαφορική εντροπία είναι αναλλοίωτη σε μετάθεση.
    - Αντίστοιχη ιδιότητα για διακριτές τ.μ.: η εντροπία διακριτών τ.μ. εξαρτάται μόνο από την κατανομή τους και όχι από τις τιμές τους.
- $h(aX) = h(X) + \log|a|$. Για την απόδειξη δείτε π.χ. Cover & Thomas Theorem 8.6.4.
    - Διαισθητικά λογικό: Η τ.μ. παίρνει, πλέον, τιμές, σε διάστημα διαφορετικού μήκους.
- $h(A\mathbf{X}) = h(\mathbf{X}) + \log|\det(A)|$, όπου $\det(A)$ η ορίζουσα του $A$.

# Μεγιστοποίηση Διαφορικής Εντροπίας

- Θεώρημα 9.6. Έστω τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^n$ με μέση τιμή $\mathbf{m} = 0$ και πίνακα συσχέτισης $K = \mathbb{E}\left[\mathbf{X}\mathbf{X}^T\right]$ (δηλαδή $K_{ij} = \mathbb{E}\left[X_i X_j\right],\ 1 \leq i, j \leq n$).
  Για τη διαφορική εντροπία της $\mathbf{X}$ ισχύει
  $h(\mathbf{X}) \leq \frac{1}{2}\log(2\pi e)^n |K|$, με $=$ εάν και μόνο εάν $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(0, K)$.
- Επομένως, για δεδομένο πίνακα συσχέτισης $K$, η συνεχής κατανομή που μεγιστοποιεί την εντροπία είναι η Γκαουσιανή!
- Θα μας χρησιμεύσει στον υπολογισμό της χωρητικότητας του Γκαουσιανού Καναλιού.

# Μεγιστοποίηση Διαφορικής Εντροπίας (2)

- Πόρισμα 9.7. Για βαθμωτή συνεχή τ.μ. $X$ με μέση τιμή $m = 0$ και διασπορά $\sigma^2$, η κατανομή που μεγιστοποιεί την $h(X)$ είναι η $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
- Δεδομένου ότι $h(X + c) = h(X)$, μπορούμε να επεκτείνουμε το αποτέλεσμα και σε τ.μ. με μη μηδενική μέση τιμή.
- Μεταξύ συνεχών τ.μ. με την ίδια ισχύ (=$\sum_i \mathbb{E}|X_i|^2 = \mathbb{E}\left[\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right] =$ tr$\{\mathbb{E}\left[\mathbf{X}\mathbf{X}^T\right]\} =$ tr$\{K\}$), οι πιο "αβέβαιες" είναι αυτές που ακολουθούν Γκαουσιανή κατανομή $\mathcal{N}(\mathbf{m}, K)$.

# Μεγιστοποίηση Διαφορικής Εντροπίας – Απόδειξη

- Έστω $g(\mathbf{x})$ οποιαδήποτε συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που ικανοποιεί τον περιορισμό συσχέτισης $\mathbb{E}_{g(\mathbf{x})}[X_i X_j] = \int g(\mathbf{x}) x_i x_j d\mathbf{x} = K_{ij}$ για όλα τα $i, j$. Έστω, επίσης $\phi_K(\mathbf{x})$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας διανύσματος που ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή $\mathcal{N}(0, K)$:

$$\phi_K(\mathbf{x}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n |K|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T K^{-1}\mathbf{x}} \Rightarrow \log \phi_K(\mathbf{x}) = A - \frac{1}{2} \log_2 e \cdot \mathbf{x}^T K^{-1} \mathbf{x}$$

- Επίσης, $\int \phi_K(\mathbf{x}) x_i x_j d\mathbf{x} = K_{ij}$. Επομένως,

$$0 \leq D(g||\phi_K) = \int g \log \left(\frac{g}{\phi_K}\right) = -h(g) - \int g \log \phi_K$$
$$\stackrel{(a)}{=} -h(g) - \int \phi_K \log \phi_K = -h(g) + h(\phi_K).$$

$(a)$ Προκύπτει από την παρατήρηση ότι η $\log \phi_K(\mathbf{x})$ είναι τετραγωνική μορφή (άθροισμα όρων της μορφής $a_{ij} x_i x_j$), και από την υπόθεση ότι $\int g(\mathbf{x}) x_i x_j d\mathbf{x} = \int \phi_K(\mathbf{x}) x_i x_j d\mathbf{x}$.

# AEP για συνεχείς τ.μ.

1. Θεώρημα Διαχωρισμού Πηγής - Καναλιού (αντίστροφο)
   - Απόδειξη αντιστρόφου
2. Συνεχείς τ.μ. και Διαφορική Εντροπία
   - Εισαγωγή, ορισμοί και ιδιότητες
   - Μεγιστοποίηση Διαφορικής Εντροπίας
3. AEP για συνεχείς τ.μ.

# AEP για συνεχείς τ.μ.

- Για την περίπτωση συνεχών τ.μ. το AEP μπορεί να αποδειχτεί με παρόμοιο τρόπο όπως στην περίπτωση διακριτών τυχαίων μεταβλητών. Πιο συγκεκριμένα,
    1. $\Pr\left\{A_\epsilon^{(n)}\right\} > 1-\epsilon$ για $n > n_0$.
    2. $\mathrm{Vol}\left(A_\epsilon^{(n)}\right) \leq 2^{n(h(X)+\epsilon)}$ για όλα τα $n$.
    3. $\mathrm{Vol}\left(A_\epsilon^{(n)}\right) \geq (1-\epsilon)2^{n(h(X)-\epsilon)}$ για $n > n_0$.
- Παρατηρήστε ότι, για συνεχείς τ.μ., η ποσότητα που αντιστοιχεί στον αριθμό στοιχείων του τυπικού συνόλου $\left|A_\epsilon^{(n)}\right|$ είναι ο όγκος $\mathrm{Vol}(A)$ του συνόλου $A$:

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_A dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

# AEP για συνεχείς τ.μ. (συνέχεια)

- Όσο μικρότερη είναι η εντροπία μιας συνεχούς τ.μ., τόσο μικρότερος είναι ο μέσος όγκος που καταλαμβάνει το σύνολο που περιέχει σχεδόν όλη την πιθανότητα (για δεδομένο $n$).
- Για $n$ σύμβολα (διαστάσεις), Vol$\left(A_\epsilon^{(n)}\right) \approx 2^{nh(X)}$. Επομένως, ο "χώρος" στον οποίο περιέχονται οι τυπικές ακολουθίες έχει πλευρά μήκους $\approx 2^{h(X)}$ *ανά διάσταση*.