EE728
Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
8η διάλεξη

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

12 Απριλίου 2011

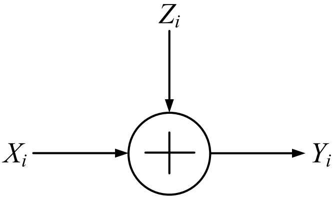
Περιεχόμενα 8ης διάλεξης

Το Γκαουσιανό Κανάλι – Εισαγωγή

- Κανάλι διακριτού χρόνου με συνεχές αλφάβητο.
- Δίνεται από τη σχέση

$$Y_i = X_i + Z_i, \quad Z_i \sim \mathcal{N}(0, N),$$

  όπου οι τ.μ. Z_i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ανεξάρτητες από τις X_i.
- Αποτελεί πολύ καλό και ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο για συστήματα επικοινωνιών.



Το Γκαουσιανό Κανάλι – Εισαγωγή (2)

- Ποια είναι η χωρητικότητα του Γκαουσιανού Καναλιού; Εξαρτάται από τις υποθέσεις!
- Εάν η διασπορά του θορύβου ισούται με 0, η έξοδος του καναλιού ισούται με την είσοδό του. Επομένως, μπορούμε να μεταδώσουμε με άπειρο ρυθμό (χρησιμοποιώντας συνεχές η άπειρο διακριτό αλφάβητο για τη X).
- Το ίδιο ισχύει εάν ο θόρυβος έχει πεπερασμένη διασπορά, αλλά δεν υπάρχει περιορισμός πλάτους ή ισχύος της εισόδου. Μπορούμε πάντα να χρησιμοποιήσουμε είσοδο τέτοιου πλάτους ώστε να μπορούμε να ανακτήσουμε το μεταδοθέν σήμα στην έξοδο με πιθανότητα σφάλματος που τείνει στο 0.
- Στην πράξη, ο θόρυβος Z έχει μη μηδενική διασπορά (ισχύ). Επίσης, υπάρχει περιορισμός ως προς τη διαθέσιμη ισχύ της X.

Το Γκαουσιανό Κανάλι – Εισαγωγή (3)

- Στο μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας" είδαμε ότι, για την περίπτωση πεπερασμένης ισχύος εισόδου $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq P$, η χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού ισούται με

Χωρητικότητα Γκαουσιανού Καναλιού

$$C = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{N}\right) \text{ bits/χρήση καναλιού.}$$

Χωρητικότητα Γκαουσιανού Καναλιού με περιορισμό ισχύος

- Ορισμός 8.1. Η "πληροφοριακή" χωρητικότητα του Γκαουσιανού Καναλιού με περιορισμό ισχύος (power contraint) P ορίζεται ως

$$C = \max_{f_X(x):\mathbb{E}[X^2]\leq P} I(X;Y).$$

- Θα επαναλάβουμε τον υπολογισμό της πληροφοριακής χωρητικότητας Γκαουσιανού καναλιού που παρουσιάστηκε στο μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας".

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= h(Y) - h(Y|X) = h(Y) - h(X+Z|X) \\ &= h(Y) - h(Z|X) \overset{(a)}{=} h(Y) - h(Z) = h(Y) - \frac{1}{2}\log 2\pi e N. \end{aligned}$$

(a) η Z (θόρυβος) είναι ανεξάρτητη της X.

Χωρητικότητα Γκαουσιανού Καναλιού με περιορισμό ισχύος (2)

- Για τη διασπορά της Y, και δεδομένου ότι $\mathbb{E}[Z] = 0$, ισχύει

$$\mathbb{E}\left[Y^2\right] = \mathbb{E}\left[(X+Z)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Z] + \mathbb{E}\left[Z^2\right] = P + N.$$

- Επομένως, $h(Y) \leq \frac{1}{2}\log 2\pi e(P+N)$, με $=$ όταν η Y ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= h(Y) - \frac{1}{2}\log 2\pi eN \\ &\leq \frac{1}{2}\log 2\pi e(P+N) - \frac{1}{2}\log 2\pi eN \Rightarrow \\ C &\leq \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{N}\right). \end{aligned}$$

Χωρητικότητα Γκαουσιανού Καναλιού με περιορισμό ισχύος (3)

- $Y = X + N$. Από τη Θεωρία Πιθανοτήτων, ο γραμμικός συνδυασμός δύο Γκαουσιανών τ.μ. ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή. Συνεπώς, όταν η Y ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή, το ίδιο ισχύει και για τη X.
- Άρα, η πληροφοριακή χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού επιτυγχάνεται με χρήση Γκαουσιανής εισόδου και $C = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{N}\right)$.
- Απομένει να αποδείξουμε ότι η "πληροφοριακή" χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού ισούται με τη "λειτουργική" του χωρητικότητα.

Θεώρημα κωδικοποίησης (ευθύ)

Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό κανάλι

- Σημείωση: Η απόδειξη του ευθέος είναι παρόμοια με αυτή για το διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη και δίνεται στο Κεφάλαιο 9.1 του βιβλίου των Cover & Thomas. Θα επισημάνουμε μόνο τις διαφορές.
- Όπως και για το διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη, κατασκευάζονται κωδικές λέξεις μήκους n. Η μόνη διαφορά είναι ότι πρέπει να ικανοποιούν τον περιορισμό ισχύος: $\sum_{i=1}^{n} x_i^2(w) \leq nP$, $w = 1, 2, \ldots, M$, όπου M ο αριθμός των μηνυμάτων (και ίσος με 2^{nR}).
- Εάν κατασκευάσουμε τα σύμβολα των κωδικών λέξεων με βάση Γκαουσιανή κατανομή $\mathcal{N}(0, P - \epsilon)$, για μεγάλο n, $\frac{1}{n} \sum X_i^2 \to P - \epsilon$ και, επομένως, ο περιορισμός ικανοποιείται με πιθανότητα που τείνει στο 1.

Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό κανάλι (2)

- Μετά την κατασκευή του τυχαίου κώδικα, αυτός αποκαλύπτεται τόσο στον πομπό όσο και στο δέκτη. Θεωρούμε ότι η αποκωδικοποίηση στο δέκτη γίνεται με χρήση από κοινού τυπικότητας.
- Σε σύγκριση με τα διακριτά κανάλια χωρίς μνήμη, υπάρχει ένα επιπλέον ενδεχόμενο που συμβάλλει στην πιθανότητα σφάλματος: Το ενδεχόμενο η κωδική λέξη που έχει αποσταλεί να μην ικανοποιεί τον περιορισμό ισχύος. Ωστόσο, για μεγάλα n η πιθανότητα αυτή μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή. Συνεπώς, και η συνολική πιθανότητα σφάλματος μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή, όπως και στην περίπτωση του διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη.

Θεώρημα κωδικοποίησης (αντίστροφο)

Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό κανάλι (αντίστροφο)

- Και για το αντίστροφο, η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή για το αντίστροφο του Θεωρήματος Κωδικοποίησης για διακριτά κανάλια χωρίς μνήμη.
- Θεωρούμε ότι οι κωδικές λέξεις ικανοποιούν τον περιορισμό ισχύος, δηλαδή ότι $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2(w) \leq P$.
- Επιπλέον, θεωρούμε ότι η κατανομή των 2^{nR} μηνυμάτων είναι ομοιόμορφη και χρησιμοποιούμε την ανισότητα Fano.

$$H(W|\hat{W}) \leq H\left(P_e^{(n)}\right) + P_e^{(n)} \log|\mathcal{X}|$$
$$= 1 + nP_e^{(n)}R = n\left(\frac{1}{n} + P_e^{(n)}R\right) = n\epsilon_n,$$

όπου $\epsilon_n \to 0$ καθώς $P_e^{(n)} \to 0$.

Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό κανάλι (αντίστροφο) (2)

- Όπως και στην περίπτωση διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη, $I(X^n; Y^n) \leq \sum_{i=1}^n I(X_i; Y_i)$.

$$\begin{aligned} I(X^n; Y^n) &= h(Y^n) - h(Y^n|X^n) = h(Y^n) - h(Z^n) \\ &\leq \sum_{i=1}^n h(Y_i) - h(Z^n) \\ &= \sum_{i=1}^n h(Y_i) - \sum_{i=1}^n h(Z_i) = \sum_{i=1}^n I(X_i, Y_i). \end{aligned}$$

Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό κανάλι (αντίστροφο) (3)

$$
\begin{aligned}
H(W|\hat{W}) &\leq H\left(P_e^{(n)}\right) + P_e^{(n)} \log |\mathcal{X}| = 1 + nP_e^{(n)} R \\
&= n\left(\frac{1}{n} + P_e^{(n)} R\right) = n\epsilon_n,
\end{aligned}
$$

- Επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$$
\begin{aligned}
nR = H(W) = I(W;\hat{W}) + H(W|\hat{W}) &\overset{(a)}{\leq} I(W;\hat{W}) + n\epsilon_n \\
&\overset{(b)}{\leq} I(X^n;Y^n) + n\epsilon_n \leq \sum_{i=1}^{n} I(X_i,Y_i) + n\epsilon_n.
\end{aligned}
$$

(a) Ανισότητα Fano, (b) Ανισότητα Επεξεργασίας Δεδομένων

Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό κανάλι (αντίστροφο) (4)

- Ορίζουμε $P_i = \frac{1}{2^{nR}} \sum_w x_i^2(w)$, δηλαδή τη μέση ισχύ του $i-$οστού συμβόλου των κωδικών λέξεων. Επομένως, $\mathbb{E}\left[Y_i^2\right] = P_i + N$ και $h(Y_i) \leq \frac{1}{2}\log 2\pi e(P_i + N)$.
- Συνεπώς,

$$nR \leq \sum_i I(X_i; Y_i) + n\epsilon_n \leq \sum_i \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P_i}{N}\right) + n\epsilon_n.$$

Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό κανάλι (αντίστροφο) (5)

$$nR \leq \sum_i \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_i}{N}\right) + n\epsilon_n \Rightarrow$$

$$R \leq \sum_i \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_i}{N}\right)\right\} + \epsilon_n \overset{(a)}{\leq} \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{N}\right)$$

$$\overset{(b)}{\leq} \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right).$$

(a) από την ανισότητα Jensen. (b) δεδομένου ότι οι κωδικές λέξεις ικανοποιούν τον περιορισμό ισχύος, $\frac{1}{n}\sum_i P_i \leq P$.

- Συνεπώς, για $P_e^{(n)} \to 0$, $R \leq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right)$ και δεν υπάρχει κώδικας που να ικανοποιεί τον περιορισμό ισχύος και να επιτυγχάνει $R > C$.

Κωδικοποίηση καναλιού με κόστος

- Η μετάδοση στο Γκαουσιανό κανάλι με περιορισμό ισχύος είναι ειδική περίπτωση της κωδικοποίησης με κόστος.
- Στην κωδικοποίηση με κόστος, σε κάθε σύμβολο $x \in \mathcal{X}$ της πηγής αντιστοιχεί μία τιμή κόστους $b(x) \geq 0$ και επιβάλλεται ο περιορισμός $\sum_{i=1}^{n} b(x_i(m)) \leq nB$ για κάθε κωδική λέξη $x^n(m)$.
- Αποδεικνύεται (δείτε π.χ. El Gamal & Kim, *Lecture Notes on Network Information Theory*) ότι η χωρητικότητα Διακριτού Καναλιού Χωρίς Μνήμη με περιορισμό κόστους B ισούται με

$$C(B) = \max_{p(x):\mathbb{E}[b(X)]\leq B} I(X;Y).$$

- Αποδεικνύεται, επίσης, ότι η $C(B)$ (η οποία ονομάζεται συνάρτηση χωρητικότητας-κόστους (cost-capacity function)) είναι αύξουσα, κοίλη $\cap$ και συνεχής συνάρτηση του κόστους B.

Sphere packing

Γεωμετρικό Επιχείρημα (Sphere Packing Argument)

- Διαισθητικά, το Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού για Γκαουσιανά κανάλια μπορεί περιγραφεί με το ακόλουθο γεωμετρικό επιχείρημα.
- Μια κωδική λέξη x^n αποτελεί ένα διάνυσμα στο $n-$διάστατο χώρο. Επομένως, η ακολουθία y^n που λαμβάνεται στο δέκτη και αντιστοιχεί στο x^n βρίσκεται μέσα σε μια $n-$διάστατη σφαίρα με κέντρο x^n και ακτίνα $\approx \sqrt{n(N+\epsilon)}$. Καθώς το n αυξάνει, η y^n βρίσκεται μέσα στη σφαίρα με ολοένα αυξανόμενη πιθανότητα (και με $\epsilon \to 0$).

Γεωμετρικό Επιχείρημα (Sphere Packing Argument) (2)

- Μάλιστα, με πιθανότητα που τείνει στο 1, το διάνυσμα βρίσκεται στο φλοιό της σφαίρας (δείτε και Φυλλάδιο 8).
- Έστω σφαίρα n διαστάσεων. Ο όγκος της δίνεται από τη σχέση $C_n r^n$. Επομένως, ο λόγος του όγκου του φλοιού πάχους $\epsilon > 0$ προς τον όγκο της σφαίρας ισούται με

$$\frac{r^n - (r-\epsilon)^n}{r^n} = 1 - \left(1 - \frac{\epsilon}{r}\right)^n \to 1 \text{ για } n \to \infty.$$

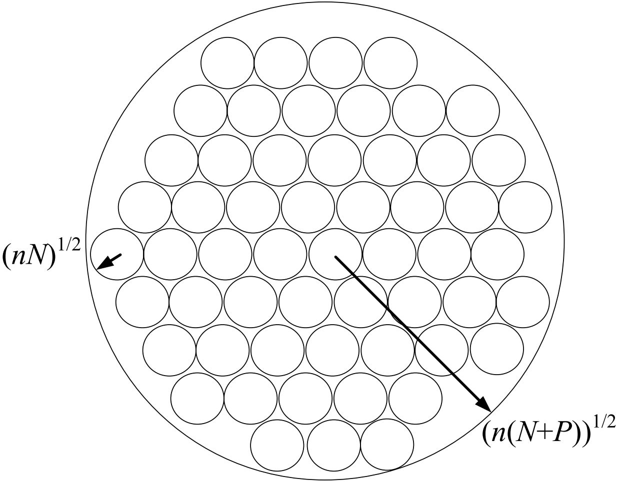
- Με χρήση του νόμου των μεγάλων αριθμών, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε, για $n > n_0$ και ακολουθία $\mathbf{x} = x^n$, το διάνυσμα $\mathbf{x} + \mathbf{z}$ να βρίσκεται στο φλοιό σφαίρας n διαστάσεων πάχους ϵ με κέντρο $\mathbf{x}$ και ακτίνα $\sqrt{n\mathbb{E}[\|\mathbf{z}\|^2]}$ με πιθανότητα αυθαίρετα κοντά στο 1.

Γεωμετρικό Επιχείρημα (Sphere Packing Argument) (3)

- Για μεγάλο n, ο χώρος όλων των πιθανών ακολουθιών στο δέκτη έχει ακτίνα περίπου ίση με $\sqrt{n(P+N)}$. Δεδομένου ότι σε κάθε x^n αντιστοιχεί μια σφαίρα ακτίνας περίπου $\sqrt{nN}$ και ότι ο όγκος μιας $n-$διάστατης σφαίρας ισούται με $C_n r^n$, ο αριθμός "σφαιρών" που αντιστοιχούν σε μηνύματα και τις οποίες μπορούμε να χωρέσουμε στο χώρο όλων των y^n προκειμένου αυτές να μην επικαλύπτονται (και, επομένως, να μη γίνονται σφάλματα εκτίμησης στο δέκτη) δεν μπορεί να υπερβεί τις

$$\frac{C_n\left(\sqrt{n(P+N)}\right)^n}{C_n\left(\sqrt{nN}\right)^n} \Rightarrow \log\left(\frac{C_n\left(\sqrt{n(P+N)}\right)^n}{C_n\left(\sqrt{nN}\right)^n}\right) = \frac{n}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right).$$

Γεωμετρικό Επιχείρημα (Sphere Packing Argument) (4)



Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης

Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης

- Στη φύση, τα κανάλια είναι όχι μόνο συνεχών τιμών αλλά και συνεχούς χρόνου (waveform channels).
- Το Γκαουσιανό κανάλι συνεχούς χρόνου και πεπερασμένου εύρους ζώνης, W, δίνεται από τη σχέση

$$Y(t) = (X(t) + Z(t)) * h(t),$$

  όπου $Z(t)$ είναι λευκός Γκαουσιανός θόρυβος και $h(t)$ είναι η κρουστική απόκριση ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου με $f_{\max} = W$.
- Από το Θεώρημα Δειγματοληψίας Nyquist-Shannon-Kotelnikov γνωρίζουμε ότι οποιοδήποτε βαθυπερατό σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί χωρίς απώλεια πληροφορίας με χρήση τουλάχιστον $2W$ δειγμάτων του ανά δευτερόλεπτο.

Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης (2)

- Συνεπώς, για σήματα $X(t)$ τα οποία δεν έχουν φασματικό περιεχόμενο σε συχνότητες μεγαλύτερες της W, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα δείγματά τους και, επομένως, διακριτό μοντέλο καναλιού.
- Για πληρέστερη δικαιολόγηση δείτε π.χ. Cover & Thomas 9.3. Για μια εξαντλητική εξέταση του προβλήματος με όλες τις απαραίτητες λεπτομέρειες δείτε Gallager, Chapter 8.

Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης (3)

- Έστω ότι παρατηρούμε το σήμα $X(t)$ εύρους ζώνης W για T s. Εάν η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (PSD) της $Z(t)$ ισούται με $\frac{\mathcal{N}_0}{2}$, η ισχύς του θορύβου ισούται με $\frac{\mathcal{N}_0}{2}2W = \mathcal{N}_0 W$. Επομένως, η διασπορά κάθε δείγματος θορύβου (από τα $2WT$, συνολικά) ισούται με $\frac{\mathcal{N}_0 WT}{2WT} = \frac{\mathcal{N}_0}{2}$.
- Η ενέργεια ανά δείγμα ισούται με $\frac{PT}{2WT} = \frac{P}{2W}$.
- Αποδεικνύεται ότι τα δείγματα λευκού Γκαουσιανού θορύβου είναι ανεξάρτητες και ομοίως κατανεμημένες (i.i.d.) Γκαουσιανές τ.μ.

Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης (4)

- Συνεπώς, η χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού με πεπερασμένο εύρος ζώνης ισούται με

Χωρητικότητα Γκαουσιανού καναλιού πεπερασμένου εύρους ζώνης W

$$C = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{P}{2W}}{\frac{\mathcal{N}_0}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{\mathcal{N}_0 W}\right) \text{ bits/δείγμα} \Rightarrow$$

$$C = W\log\left(1+\frac{P}{\mathcal{N}_0 W}\right) \text{ bits/s.}$$

Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης (5)

Χωρητικότητα Γκαουσιανού καναλιού εύρους ζώνης W

$$C = W \log\left(1 + \frac{P}{\mathcal{N}_0 W}\right) \text{ bits/s}$$

Παρατηρήσεις:

- Η χωρητικότητα έχει λογαριθμική εξάρτηση από την ισχύ. Επομένως, καθώς αυξάνουμε την ισχύ, το "κέρδος" που αποκομίζουμε μειώνεται.
- Ή αλλιώς: Για δεδομένη ισχύ, εάν είναι διαθέσιμα δύο Γκαουσιανά κανάλια (ταυτόχρονα) με ίδιο θόρυβο, είναι καλύτερο να μοιράσουμε την ισχύ στα κανάλια.
- Για $W \to \infty$, $C = \frac{P}{\mathcal{N}_0} \log_2 e$ bits/s. Επομένως, για άπειρο εύρος ζώνης, η χωρητικότητα αυξάνει γραμμικά με την ισχύ.

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια

- Έστω k παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μετάδοση πληροφορίας.
  - Για παράδειγμα, μπορεί να έχουμε Γκαουσιανό κανάλι συνεχούς χρόνου με έγχρωμο θόρυβο (με διαφορετική, δηλαδή, πυκνότητα ισχύος σε κάθε συχνότητα). Το κανάλι σε κάθε συχνότητα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως Γκαουσιανό. Τυπικό παράδειγμα: Συστήματα DSL.
  - Το μοντέλο παράλληλων Γκαουσιανών καναλιών μπορεί, επίσης, να εφαρμοστεί σε κανάλια με διαλείψεις (fading). Στην περίπτωση επίπεδων (flat) διαλείψεων το κάθε ένα από τα k κανάλια αντιστοιχεί σε μια χρονική στιγμή.

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (2)

- Επομένως, για το κανάλι j,

$$Y_j = X_j + Z_j,\ j = 1, 2, \dots, k,\ \text{και } Z_j \sim \mathcal{N}(0, N_j).$$

- Τέλος, θεωρούμε ότι η *συνολική* ισχύς που είναι διαθέσιμη για μετάδοση είναι πεπερασμένη. Δηλαδή, $\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{k} X_j^2\right] \leq P$.
- Ποια είναι η χωρητικότητα του συστήματος και πώς επιτυγχάνεται;

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (3)

- Η "πληροφοριακή" χωρητικότητα των k παράλληλων καναλιών ισούται με

$$C = \max_{f(x_1, x_2, \ldots, x_k) : \sum \mathbb{E} X_i^2 \leq P} I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k).$$

- Αποδεικνύεται ότι, και για τα παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια, η "λειτουργική" χωρητικότητα ισούται με την "πληροφοριακή".
- Δεδομένου ότι οι Z_i είναι ανεξάρτητες,

$$\begin{aligned}
& I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) \\
& = h(Y_1, \ldots, Y_k) - h(Y_1, \ldots, Y_k | X_1, \ldots, X_k) \\
& = h(Y_1, \ldots, Y_k) - h(Z_1, \ldots, Z_k | X_1, \ldots, X_k) \\
& = h(Y_1, \ldots, Y_k) - h(Z_1, \ldots, Z_k) \\
& = h(Y_1, \ldots, Y_k) - \sum_i h(Z_i)
\end{aligned}$$

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (4)

$$I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) = h(Y_1, \ldots, Y_k) - \sum_i h(Z_i)$$
$$\stackrel{(a)}{\leq} \sum_i h(Y_i) - h(Z_i) \stackrel{(b)}{\leq} \sum_i \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P_i}{N_i}\right),$$

όπου $P_i = \mathbb{E}\left[X_i^2\right]$.

- Η ισότητα στο (a) ισχύει όταν οι Y_i είναι ανεξάρτητες (και, επομένως, οι X_i, δεδομένου ότι οι Z_i είναι ανεξάρτητες). Η ισότητα στο (b) ισχύει για Γκαουσιανές X_i.
- Επομένως, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε
$$(X_1, X_2, \ldots, X_k) \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{bmatrix} P_i & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & P_k \end{bmatrix}\right).$$

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (5)

- Απομένει να βρούμε την κατανομή ισχύος (δηλαδή τα $P_i : \sum_i P_i \leq P$) η οποία μεγιστοποιεί την $I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$.
- Πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} \text{μεγιστοποίησε την ποσότητα} \quad & \sum_i \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P_i}{N_i}\right) \\ \text{με τον περιορισμό} \quad & \sum_i P_i = P \end{aligned}$$

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (6)

- Με χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange (βλ. π.χ. Cover & Thomas 9.4) αποδεικνύεται ότι η λύση δίνεται από την

$$P_i = (\nu - N_i)^+,$$

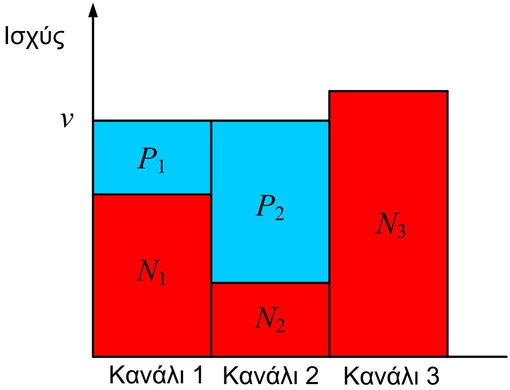
όπου

$$(x)^+ = \begin{cases} x & \text{εάν} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{εάν} \quad x < 0 \end{cases}$$

και $\sum_i (\nu - N_i)^+ = P$.

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια – Waterfilling

- Η κατανομή ισχύος ονομάζεται waterfilling (ή waterpouring) γιατί η διαθέσιμη ισχύς χρησιμοποιείται για να "γεμίσει" δοχεία με ύψος πάτου ανάλογο της ισχύος του θορύβου.



Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια – Waterfilling (2)

- Στην πράξη, ο αλγόριθμος waterfilling, μπορεί να υλοποιηθεί ως εξής (βλ. και Cioffi `http://www.stanford.edu/group/cioffi/book/chap4.pdf`).
  1. Έστω ότι K^* είναι ο αριθμός των καναλιών που χρησιμοποιούνται για τη μετάδοση (όπου, δηλαδή, $P_i > 0$). Αρχικά υποθέτουμε ότι όλα τα κανάλια είναι "ενεργά" και τα διατάσσουμε ως προς το θόρυβο. Το κανάλι 1 έχει τη μικρότερη διασπορά θορύβου ($N_i \leq N_j$ για $i < j$).
  2. Επομένως, $K^* = K$, $P_i = (\nu - N_i)$ και $P = \sum_{i=1}^{K} P_i = K\nu - \sum_{i=1}^{K} N_i$.
  3. Λύνουμε ως προς τον άγνωστο ν.
  4. Θεωρούμε το κανάλι K^* με το μεγαλύτερο θόρυβο.
     - Εάν $P_{K^*} = \nu - N_{K^*} \leq 0$ και τα K^* κανάλια χρησιμοποιούνται (εκτός, πιθανώς, από κάποια με $P_i = 0$) και η βέλτιστη κατανομή δίνεται από τα $P_i = \nu - N_i$, $i = 1, \ldots, K^*$.
     - Εάν $P_{K^*} = \nu - N_{K^*} < 0$, το κανάλι K^* δε χρησιμοποιείται και το αφαιρούμε. Θέτουμε $K^* = K^* - 1$ και επιστρέφουμε στο Βήμα 3.

Μια εναλλακτική μέθοδος εύρεσης του τρόπου κατανομής ισχύος

Μια εναλλακτική μέθοδος εύρεσης του τρόπου κατανομής ισχύος

- Με δεδομένο ότι η μετάδοση σε κάθε κανάλι πρέπει να γίνει ανεξάρτητα με χρήση Γκαουσιανού βιβλίου κωδικων, ένας άλλος τρόπος να βρεθεί ο τρόπος κατανομής της ισχύος είναι ο εξής:
- Παραγωγίζοντας τη χωρητικότητα του $i-$στού καναλιού ως προς P_i προκύπτει ότι

$$\frac{\partial C_i}{\partial P_i} = \frac{1}{2N_i}\frac{N_i}{N_i + P_i}\log_2 e = \frac{\log_2 e}{2(N_i + P_i)} > 0.$$

- Παρατηρούμε ότι η $\frac{\partial C_i}{\partial P_i}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση της ισχύος P_i.
- Επίσης, η $\frac{\partial C_i}{\partial P_i}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση της φασματικής πυκνότητας ισχύος, N_i, του θορύβου.

Μια εναλλακτική μέθοδος εύρεσης του τρόπου κατανομής ισχύος (2)

- Επομένως, αρχίζοντας από $P_i = 0$ για όλα τα i, το πρώτο κανάλι, έστω j, στο οποίο πρέπει να δοθεί ισχύς ΔP είναι αυτό για το οποίο ισχύει $N_j \leq N_i$ για όλα τα i.
- Στο επόμενο βήμα, το επίπεδο "θορύβου" σε όλα τα κανάλια ισούται με N_i, εκτός από το j-στό κανάλι, το οποίο έχει επίπεδο "θορύβου" ίσο με $N_j + \Delta P$.
- Εάν $N_j < N_i$ για όλα τα $i \neq j$, θα συνεχίσουμε να αναθέτουμε ισχύ στο κανάλι j έως ότου $N_j + P_j = N_k$, όπου $N_j < N_k \leq N_i$, $k \neq i$ και $k \neq j$.
- Στη συνέχεια, η ισχύς θα μοιράζεται εξίσου και στα δύο κανάλια j και k έως ότου υπάρξει τρίτο κανάλι m για το οποίο $N_j + P_j = N_k + P_k = N_m$.

Μια εναλλακτική μέθοδος εύρεσης του τρόπου κατανομής ισχύος (3)

- Συνεπώς, όταν τελειώσει η συνολική ισχύς, P, για όλα τα κανάλια τα οποία χρησιμοποιούνται θα ισχύει $N_i + P_i = \nu$, ενώ για τα κανάλια για τα οποία $N_j > \nu$, $P_j = 0$.
- Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε D. Tse, ‘‘*Optimal Power Allocation over Parallel Gaussian Broadcast Channels,*’’ Ενότητα 3.2. http://www.eecs.berkeley.edu/∼dtse/broadcast2.pdf